Digitized by Google

by Google

N 125

VIRORUM CELEBERR.

GOT. GUL. LEIBNITII
ET
JOHAN. BERNOULLII
COMMERCIUM
PHILOSOPHICUM
ET
MATHEMATICUM.

TOMUS PRIMUS,
Ab ANNO 1694. ad ANNUM 1699.



LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumpt. MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Socior.

MDCCXLV.

Digitized by Google

Digitized by Google

ILLUSTRISSIMÆ

REGIÆ

SCIENTIARUM

ACADEMIÆ,

MUNIFICENTIA

POTENTISSIMI REGIS

LUDOVICI XIV.

AD

PROMOVENDAM

PHILOSOPHIAM & MATHESIN

FUNDATÆ,

AUSPI-

Digitized by Google

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMI REGIS

LUDOVICI XV.

FLORENTISSIMÆ,

HAS

SOCIORUM ACADEMIÆ MERITISSIMORUM

EPISTOLAS MUTUAS

Humillime

D. D. D.

MARCUS-MICHAEL BOUSQUET.

Digitized by Google

LECTORI BENEVOLO

SALUTEM.

EDITORI conſilium atque inſtitutum ſuum laudanti plerumque objicitur illud, *quis Mercator merces unquam vituperavit ?* Mihi verò, ſi laudare vellem conſilium à me ſuſceptum has edendi Litteras, timendum eſſet ne regereretur, ut quondam cuidam HERCULEM laudare molienti, *quis unquam talia vituperavit ?* Adeo maniſeſtum eſt utiliſſimas eſſe Doctorum Reipublicæ Doctorum Epiſtolas. *Etenim*, ut verbis utar Celeberrimi BACONIS *, *nihil ſanius, nihil præſtantius, quàm hujuſmodi Epiſtolæ. Habent enim plus nativi ſenſûs, quàm Orationes*, (addi meritò poteſt & quàm libri;) *plus etiam maturitatis, quàm colloquia ſubita.* Quod ſi conſilium hujuſmodi in genere commendare ſupervacaneum eſt; tempus omnino tererem, ſi quid pro his peculiariter Epiſtolis dicerem. Leviter

* De Augmentis Scientiarum, *lib. II. cap. XII.*

Digitized by Google

evolve librum hunc, & ubi videbis tot anecdota litteraria; tot acutiſſimas & ſolidiſſimas de rebus altiſſimis Phyſicis, Metaphyſicis, & Mathematicis commentationes diſputationeſque, totus, ſatis novi, librum attentè legendi, conſiderandi, ediſcendi deſiderio flagrabis, & de illius utilitate præclara ſenties. Præſertim, cùm longam annorum ſeriem continuam complectatur, &, (ut ait idem *Verulamius* †) Epiſtolæ, *quando continuantur ſecundum ſeriem temporum* . . . . . ſint *certè ad Hiſtoriam pretioſiſſima ſupellex.* Loquitur ille quidem de Civili Hiſtoria, ſed non vereor ut mihi id vitio vertatur, quod ejus verba ad rei litterariæ atque ingeniorum, ſcientiarumque Hiſtoriam, quæ, ſummo jure, maximo nunc eſt in pretio, accommodaverim. Sed, quid ego hæc memoro, quid dico *leviter evolve librum*, quaſi nomina legiſſe non ſufficeret? Nam, Dii Boni! Quæ nomina reſpicienti ſe ſe ſtatim offerunt? LEIBNITIUS & BERNOULLIUS. Ubi clariora & Doctis chariora reperies? Verumtamen, nec iſtud, (quantulumcunque illud eſt,) ut Lectorum cupiditas inflammetur, faciendum ſupereſt. Jamdiu deſiderantur hæ Litteræ, jamdiu expetuntur, requiruntur, &, ſi quæ pretio comparari hucuſque potuerunt, nunquam nimio conſtare viſæ ſunt. Igitur

> *Hic eſt, quem petis, ille, quem requiris,*
> *Toto notus in Orbe* Litterarum
> Liber . . . .

At, fortaſſe muſſitabit aliquis, plura certè hic ſunt, quæ Lectores minimè tangunt. Quandoquidem, pro rerum humanarum conditione, in libris omnibus

> *Sunt mala, ſunt bona, ſunt mediocra quædam;*

& ſemper in Epiſtolis multa ſunt, quæ parùm ad Publicum pertineant, parùm Lectoris ſtomachum ſollicitent, quippe parùm aut

† De Augmentis Scientiarum, *lib. II. cap. XII.*

Digitized by Google

aut nihil utilitatis afferentia, & ad res domeſticas, atque Amicorum officia mutua ſpectantia. Non ignoro ſæpiùs de hoc incommodo queſtos eſſe Viros doctos, nec, quamvis plura fuerint repoſita, querelas non ceſſaviſſe. Hinc factum eſt ut lacunæ quædam hic appareant. Dum enim librum tibi approbare cogor, multa aut leviuſcula, aut ad Litterarum Orbem & Scientias non pertinentia delere fuit neceſſe. Hoc non ægrè laturos beatos LEIBNITII Manes, & æqui bonique ducturum Optimum BERNOULLIUM confido, atque ut id faciat oro obteſtorque. Te verò, Lector benevole, Litteras haſce non mancas eſſe, ſed perfectiores (quod ad uſum tuum,) quàm ſi integræ fuiſſent, intellecturum, animoſque nobis additurum ſpero, quò præclaris aliis operibus Rempublicam litterariam augere pergamus. Vale.

Lauſannæ apud *Helvetios* in *Bernenſium* Pago. Pridie Kalend. Februar. Ann. MDCCXLV.

INDEX
EPISTOLARUM,
EARUMQUE BREVIARIA.

TOM. I.

EPISTOLA I.

Officii ergo. Rogat ut ipſum commendet ANTONIO ULRICO Duci *Brunſwicenſi*, *pag.* 1

II.

Teſtatur quàm ſit jucundum ſibi cum BERNOULLIO Commercium Epiſtolicum. Communicat conſilium ſcribendi De *Scientia Infiniti.* De Tetragoniſmo univerſali per motum. In quadraturis deſiderata, 3

III.

Declarat quam vellet ipſum inviſere. De *Scientia Infiniti.* De Methodo Tangentium inversâ, quæ invenerit. De Calculo percurrentium. Quæ quadraturæ ad Circuli & Hyperbolæ quadraturam reduci poſſint, 5

IV.

De conſtruendis æquationibus differentialibus homogeneis. De Calculo percurrentium ſeu exponentialium. De conſtruendis Curvis ex data Tangentium conditione. De quadraturis ad ſeries revocandis. De *Scientia Infiniti*, 10

V.

De Calculo exponentiali. De conſtruendis Curvis ex Tangentium conditione. De quadraturis ad Circuli & Hyperbolæ quadraturam reducendis. Rectificatio Ellipſis & Hyperbolæ non pendet ab earum quadratura. De Serie univerſaliſſima ad quadraturas. De Trajectoriis orthogonalibus, 13

VI.

Digitized by Google

V I.

De *Scientia Infiniti.* De quadratura curvæ exponentialis. De integrandis quantitatibus logarithmicis. De Seriebus. De quadraturis. De Trajectoriis orthogonalibus, 18

V I I.

De quadraturâ Curvæ exponentialis, & integratione quantitatis Logarithmicæ. De ſerie univerſali pro quadraturis. De Problemate Curvæ æquilibrationis. De propagatione Calculi differentialis, 25

V I I I.

Valetudinis ſuæ rationem reddit. De Curva æquilibrationis. Nemo ſibi natus eſt. De Jacobo BERNOULLIO. Series ſummatoria, 32

I X.

De illius infirma valetudine & MALEBRANCHII remedio univerſali. Seriei ſummatoriæ Correctio. Spatia quadrabilia. De quibuſdam Mathematicis Gallis. Dnus. CHIRAC Calculi infiniteſimalis diſcendi cupidus. De Curvarum oſculo. De CRAIGIO & TSCHIRNHAUSIO. De Profeſſione Mathematica apud *Batavos* vacante, 38

X.

De Conſenſu inter poteſtates & differentias. De Curvis *Maximi* vel *Minimi* proprietate gaudentibus. Tentamen ſolutionis per ſeries infinitas. De Curvis tranſcendentibus, quarum infinita puncta aſſignari poſſunt. De Problemate Curvæ æquilibrationis. De methodo quadraturarum *Craigianâ.* De Mechanicâ æquationum differentialium conſtructione. De Profeſſione Mathematica, 46

X I.

De Conſenſu inter Poteſtates & differentias, atque inde promovendo Caculo integrali. De Coefficientibus terminorum poteſtatum inveniendis. De Curvis *Maximi* vel *Minimi* proprietate gaudentibus. De *Maximis Maximorum* vel *Minimis Minimorum.* De *Maximis* numericis. De regreſſus puncto. De Curvis tranſcendentibus per puncta deſcribendis. De quadraturarum methodo *Craigiana.* De oſculis Curvarum. De Dynamica & Viribus Corporum. De Profeſſione *Groningenſi*, 52

X I I.

Digitized by Google

XII.

De Calculo differentialium promoto. De Coefficientibus terminorum poteſtatum. De Curvis *Maximi* proprietate gaudentibus. De Curvarum oſculis. De Viribus Corporum. De HUGENIO. De NIEUWENTIITIO, TSCHIRNHAUSIO, & Jac. BERNOULLIO. Quomodo Litteratos agere deceat, 65

XIII.

Diſceſſum paranti quædam negotia commendat, 72

XIV.

Ad Profeſſionem *Groningenſem* vocatus Patriam relinquere parat. Seriei univerſalis pro quadraturis nova demonſtratio. De puncto regreſſûs difficultas. De Curvis percurrentibus. De Curvarum oſculis. De Viribus Corporum. De NIEUWENTIITIO, & *Medicinâ Mentis* TSCHIRNHAUSII. De ſuâ indole & valetudine. De dimenſione Curvarum per arcus Circuli. De HUGENIO, 74

XV.

De HOSPITALIO. Difficultatis circa punctum regreſſûs ſolutio. De Curvis tranſcendentibus, annon percurrentes omnes. De oſculis Curvarum. De TSCHIRNHAUSIO. De Viribus Corporum vivis. De HUGENIO, 82

XVI.

Hallenſis Profeſſio BERNOULLIO offertur, 88

XVII.

Proficiſcitur *Groningam*. De Studiis Mathematicis apud *Gallos*. De oſculis Curvarum. De comparandis Curvis cum arcubus Circularibus. De Viribus Corporum. De HUGENIO, 90

XVIII.

Tranſcendentes Curvæ annon percurrentes omnes. De Viribus Corporum & potentiæ æſtimatione ex ponderum elevatione. De actione gravitatis. De HUGENIO. Series ſummatoria. De VOLDERO, 94

XIX.

De ſtudiis Mathematicis *Groningæ*. De Tranſcendentibus Curvis. De Potentiæ æſtimatione LEIBNITIO aſſentitur. De HUGENIO. De Serie ſummatoria, 101

XX.

Digitized by Google

XX.

De Viribus Corporum difficultates removet. De differentiis, quarum exponentes non integri, 105

XXI.

De Viribus Corporum æſtimandis objectiones ulteriores. De Controverſia LEIBNITII & PAPINI circa id argumentum. De actione gravitatis. Ex impulſu obliquo & Viribus centrifugis æſtimatio Virium. De Mediorum reſiſtentia. De perpetuo mobili, 108

XXII.

De PAPINO, ſuaque cum illo controverſiâ. De actione Corporis infinite velocis. De incurſu obliquo. Æſtimatio Virium *à priori*. De celeritatibus elementaribus. De motu perpetuo. De Dynamicâ. De conſervatione Virium & directionis. De celeritate auctâ. De Ipecacuanha, 119

XXIII.

De actione gravitatis. De actione Corporis infinite velocis. De Mediorum reſiſtentia. De æſtimatione Virium *à priori*. De Curva æquabilis preſſionis. De centri gravitatis quiete vel motu non turbato ex actionibus Corporum. De Legibus motus. De reſiſtentia, 128

XXIV.

De reſiſtentia mediorum. Controverſia cum PAPINO. De æſtimatione Virium *à priori*. De centri gravitatis quiete vel progreſſu uniformi. Tractatus Dynamicus. De Legibus motus. De notis algebraïcis, 138

XXV.

De actione gravitatis. De æſtimatione Virium *à priori*. De conſervatione Virium & directionis. De Corpore à pluribus ſimul Potentiis impulſo. Ac reſiſtentia mediorum. Demonſtratio Centri oſcillationis ex Viribus vivis. De ſignis algebraicis. De notis *Hugenii* ad *Acta Eruditorum*, 148

XXVI.

De actione gravitatis. De æſtimatione Virium *à priori*. De NIEUWENTIITIO. De Signis algebraicis. De HUGENIO, 156

XXVII.

De actione materiæ gravificæ in Corpora gravia. De ictûs vi & quantitate:

Digitized by Google

titate. De æſtimatione Virium *à priori.* De NIEUWENTIITIO. De HUGENII annotationibus ad *Acta Erudit.* De TSCHIRNHAUSII putatitio invento comparandi arcus parabolicos. Curvæ Brachyſtochronæ Problema, 160

XXVIII.

De actione materiæ gravificæ. De æſtimatione Virium *à priori*. Diſſertatio Dynamica. De annotationibus *Hugenianis*. Quanti fecerit Calculum differentialem. Problematis Curvæ Tachyſtoptotæ ſive Brachyſtochronæ ſolutio, 168

XXIX.

De actione materiæ gravificæ. De æſtimatione Virium *à priori.* De Problemate Brachyſtochronæ. Cyclois eſt linea ſegmentorum. De Synchronà. De Trajectoriis orthogonalibus. De *Hugenii* notis. De CLUVERIO. WALLISII Operum Editio, 174

XXX.

De Problematis Brachyſtochronæ termino prorogando. De ejuſdem ſolutione directà celandà. Solutionis *Leibnitianæ* fundamentum. De ſchediaſmate *Jac.* BERNOULLII. De NIEUWENTIITIO. De tractione gravitatis & æſtimatione virium *à priori*, 182

XXXI.

De Problemate Brachyſtochronæ. De NIEUWENTIITIO. De actione gravitatis & æſtimatione virium *à priori.* Methodi Fluxionum & Calculi differentialis identitas. De FULLENIO. De HOLLANDERI amaltheo aſtronomico, 187

XXXII.

De Problemate Brachyſtochronæ. De Synchrona & Trajectoriis orthogonalibus. De NEWTONO. De GREGORII Elementis Dioptricæ & Catoptricæ. De Axiomatibus demonſtrandis. De HOLLANDERI amalthæo aſtronomico, 193

XXXIII.

Solutio Problematis *à Jacobo* BERNOULLIO propoſiti, 198

XXXIV.

LEIBNITIUS creatus Conſiliarius. Quales curvæ in ſe redeuntes poſſint rectificari. Error TSCHIRNHAUSII. De Progreſſionis harmo-

Digitized by Google

harmonicæ ſummatione compendiariâ. De annotationibus *Hugenianis* ad *Acta Eruditorum*. De Problemate Brachyſtochronæ & Trajectoriis orthogonalibus. GREGORII Tractatus Catoptrico-Dioptricus. De Axiomatum Demonſtratione, 200

XXXV.

De notis *Hugenianis*. De Curvis rectificabilibus & quadrabilibus. De Curvis ex plurium punctorum relatione determinandis. Varia, 206

XXXVI.

De HUGENII adnotationibus ad NEWTONUM. De quadraturis. De Trajectoria orthogonali Logarithmicarum, 208

XXXVII.

De *Analyſi infinite parvorum* HOSPITALII. De tangentibus curvarum per Focos deſcriptarum. De curvis ex plurium punctorum proprietate determinandis. De Serie quadratorum reciproca. Varia, 211

XXXVIII.

De Serie quadratorum reciproca & ſummandis quantitatibus Logarithmicalibus, 214

XXXIX.

De ſummis Serierum ad quadraturas & æquationes differentiales reducendis, & de ipſis in partes datam rationem habentes diſpeſcendis. De GRONINGIO. Curva unicum ſpatium habens quadrabile. De NIEUWENTIITII ſcripto, 217

XL.

De ſummandis quantitatibus logarithmicalibus. De ſeriebus. De approprinquationibus ex fonte implicationum. De GRONINGII hiſtoria Cycloïdis. De TSCHIRNHAUSII ſcripto, 226

XLI.

De quantitatum logarithmicalium ſummatione. De ſeriebus. Cycloïdis ſegmenta innumera quadrabilia. De TSCHIRNHAUSIO. De tentamine quodam ſolutionis Probl. celerrimi deſcenſus. Dni. SAUVEUR ſcheda de Problemate celerrimi deſcenſus, 231

XLII.

Tentamen Solutionis Probl. Brachyſtochronæ refutatur. De SALVATORE,

TORE, TSCHIRNHAUSIO & GRONINGIO. Varia. 236

XLIII.

De eodem tentamine Prob. Brachyſtochronæ. De SALVATORE. De ludis & arte conjectandi. De Probl. celerrimi deſcenſus. De TSCHIRNHAUSIO & GRONINGIO, 242

XLIV.

De NIEUWENTIITIO. De Probl. celerrimi deſcenſus. De Curva ſegmentorum, i. e. illa quæ rectas per datum punctum actas ita ſecat, ut ſegmentorum datæ poteſtates datam ſummam efficiant, 246

XLV.

De ſolutione *Hoſpitaliana* Probl. celerrimi deſcenſus, 249

XLVI.

De Arte conjectandi. Varia, 251

XLVII.

De NIEUWENTIITIO. De Probl. celerrimi deſcenſus. De Catenaria per maximum Centri gravitatis deſcenſum determinanda. De Curva ſegmentorum, 252

XLVIII.

De inventione Curvæ ſegmentorum. De catenaria & maximo deſcenſu centri gravitatis. De Probl. celerrimi deſcenſus ſolutionibus, 257

XLIX.

De inventione Curvæ ſegmentorum tam *Leibnitiana*, quam *Newtoniana*, & *Bernoulliana*. De Curva quæ rectas per datum punctum actas ita ſecat ut ſolidum ſub uno ſegmento & alterius quadrato ſit datum. De NIEUWENTIITIO, & TSCHIRNHAUSIO. De Brachyſtochrona datæ Longitudinis, 261

L.

De ſolutionibus Problematis celerrimi deſcenſus, præſertim NEWTONIANA. De Epiſtola BELVALLII. De animadverſionibus ſuis in *Principia* CARTESII. De inventione Curvæ ſegmentorum, alteriuſque affinis, 266

LI.

De ſolutione *Newtoniana* Problematum ſuorum. De inventione Curvæ ſegmentorum, 271

LII.

De Curva ſegmentorum. Obſervatio Dioptrica. De Machina arithmetica ſua. De ſolutionibus Curvæ Brachyſtochronæ. De Problemate Iſoperimetrico. De TSCHIRNHAUSIO, 277

LIII

De Curva ſegmentorum. De Obſervatione dioptrica. De machina arithmetica.

Digitized by Google

metica. De Problemate Iſoperimetrico, & Curva citiſſimi appulſus ad datam poſitione rectam. De TSCHIRNHAUSIO & LAHIRIO, 281

L I V.

De Curva ſegmentorum. De machina arithmetica. De Curva citiſſimi appulſus & Synchrona. De Problemate Iſoperimetrico, 288

L V.

De Problematibus Fraternis. De Curva citiſſimi appulſus. De Problematis Iſoperimetrici ſolutione. De Animadverſionibus *Leibnitianis* in *Principia* CARTESII. De cauſa duritiei ex motu conſpiranti, 292

L V I.

De occupationibus ſuis. De curva citiſſimi appulſus. De Iſoperimetris. De Synchrona. De Trajectoriis orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Animadverſionibus in CARTESIUM. De MALEBRANCHIO. De cauſa duritiei, 302

L V I I.

De Synchronis. De curva ex infinitis Ellipſibus arcus æquales reſecante. De Iſoperimetris. De Trajectoriis orthogonalibus. De atomis. De legibus motus. MALEBRANCHII ſententia, 308

L V I I I.

De Synchronis. De Trajectoriis orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Iſoperimetris. De MALEBRANCHIO. De Atomis. De Synchrona iterum, 313

L I X.

Differentiationis de curva in curvam Principia, 319

L X.

De methodo differentiandi de curva in curvam, 321

L X I.

De Synchronis. De Curva citiſſimi appulſus. De Trajectoriis Orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Iſoperimetris. De Atomis. De HARTZOEKERO & LA MONTRAEO. Methodus differentiandi de Curva in Curvam promovetur. De Trajectoriis, 323

L X I I.

De Trajectoriis. De curva citiſſimi appulſus. De virium æſtimatione, & legibus Motus, 334

L X I I I.

De methodo differentiandi de curva in curvam. De ſolutione *Hoſpitaliana* Problematum ſuorum. De viribus æſtimandis, 337

L X I V.

De integrationibus ad quadraturas revocandis. De Synchrona. De Problemate Iſoperimetrico. De virium æſtimatione. De TSCHIRNHAUSII

HAUSII errore circa arcuum Parabolicorum comparatione. De linea breviſſima in ſuperficie curva, 342

LXV.

De virium æſtimatione. De legibus motus. Philoſophiam experimentalem docendi munus ſibi impoſitum monet, 344

LXVI.

De LA HIRIO & OZANAMMO. De Philoſophia experimentali. De viribus corporum, 346

LXVII.

De LA HIRIO & ROEMERO. De OZANAMMO & Marchione HOSPITALIO. De VARIGNONIO. De viribus corporum, 348

LXVIII.

De Problemate Iſoperimetrico. De LA HIRIO. De *Tſchirnhauſiana* arcuum parabolicorum comparatione. Varia, 351

LXIX.

De controverſia Fraterna. De TSCHIRNHAUSIO, HOSPITALIO & VARIGNONIO, 354

LXX.

De Arcuum Parabolicorum comparatione, & TSCHIRNHAUSII objectionibus. De BIGNONIO & HOSPITALIO, 357

LXXI.

Reſponſio ad Objectiones TSCHIRNHAUSII. De HOSPITALIO. De Parabolarum rectificationibus & transformationibus, 362

LXXII.

De TSCHIRNHAUSIO. De Oenometro quodam. De Barometro portatili. De Aſtronomiæ & Geographiæ progreſſu apud Gallos. De Tautochroniſmo Cycloïdis. De artium deſcriptione, & libello MARIOTTI huc pertinente. De infinito & variis infinitorum ordinibus, 367

LXXIII.

De Oenometro duplici ratione conficiendo. De Thermometris calorem præteritum indicantibus. De Geographia. De TSCHIRNHAUSIO, & MENCKENIO. Solutionum ſuarum Problematis Iſoperimetrici communicatio. De infinitorum ordinibus. De ejuſdem corporis reſurrectione controverſia. De itinere ſuo in *Bataviam*. De VOLDERO. De Logogripho *Hugeniano*, ejuſque Coſmotheoro, 371

LXXIV.

Præcedentem Epiſtolam amiſſam nunciat. De VOLDERO. De Materiæ natura. De infinito. De HUGENII Poſthumis. De Geographia, 378

LXXV.

De virium conſervatione. De infinitorum natura difficultas. An infinitæ quantitates dentur. De ſignis algebraïcis. De linea breviſſima in ſuperficie curva, 381

LXXVI.

LXXVI.

De Infinito. De natura corporis. De Oenometro. De TSCHIRNHAUSIO. De Iſoperimetri Probl. ſolutionibus ſuis. De linea breviſſima in ſuperficie curva. De Oenometro Pariſienſi. De controverſia fraterna, 389

LXXVII.

Mittit Reſponſionem fraternam, 395

LXXVIII.

De Oenometro Pariſienſi. De TSCHIRNHAUSIO & MENCKENIO. De Iſoperimetris. De Infinito. De Corporum natura & monadibus. De vacuo & gravitatione univerſali. De ſignis algebraïcis. De quadratura arithmetica. Mittit GREGORII *Catenariam*, 396

LXXIX.

Cenſura *Catenariæ* GREGORII. De TSCHIRNHAUSIO, & Fraterna ſolutione Problematum ſuorum. De Infinito, Natura corporis & Monadibus, 400

LXXX.

De *Catenaria* GREGORII. De Infinito. De Academiæ Pariſienſis hiſtoria. De Machiniſta quodam Pariſienſi, 403

LXXXI.

De *Catenariæ Gregorianæ* Paralogiſmis. De Infinito, monadibus, & natura corporea. De lege continuatis. De infinitis infinitorum ordinibus. De lege gravitatis *Newtonianæ*. De figura fornicibus aptiſſima, 406

LXXXII.

De Infinito, natura corporis & Monadibus. De lege gravitatis *Newtonianæ*. De fornicum curvatura. Varia, 413

LXXXIII.

De natura corporis & monadibus. De infinito. De lege gravitatis. De fornicum figura. Hortatur ut meditationes dynamicas in lucem emittat, 417

LXXXIV.

De infinito, Natura Corporis & Monadibus. Varia, 423

LXXXV.

De virium æſtimatione. De Infinito, & Natura Corporis. De Dei libertate. Varia, 425

LXXXVI

De virium æſtimatione. De Monadibus. De Dei libertate & ſapientia. De harmonia præſtabilita. De Mente humana. De infiniteſimis quantitatibus, 428

LXXXVII.

De Monadibus. De Dei libertate. De vacuo & Atomis. De Commercio animæ cum corpore. De Entelechiarum ortu & interitu. De infiniteſimis. De Hiſtoria Academiæ Pariſienſis. De Phoſphoro, 432

LXXXVIII.

De libertate Dei, & permiſſione mali. De Commercio animæ cum corpore. De Entelechiis. De infiniteſimis. De Phoſphoro. Gratulatur BERNOULLIO, quod ſit in Academiam Pariſienſem adſcitus, 438

LXXXIX.

De libertate Dei. De Commercio animæ cum corpore. Varia. De GRONINGII *hiſtoria Cycloïdis*. De CLUVERIO, 441

XC.

Mittit nonnulla, 444

XCI.

De Dei libertate, deque peccato. De Academia Scientiarum Pariſienſi. De Differentiis quarum exponentes fracti vel irrationales. Varia. Mittit Schedam CLUVERII, 445

XCII.

De litteris LEIBNITII ad VOLDERUM. De Dei libertate. De ſua cum quibuſdam Theologis controverſia. De Academicis quibuſdam Pariſinis. De Schediaſmate *Cluveriano*, 450

XCIII.

De controverſia ſua cum VOLDERO. De Dei libertate. De vacuo & atomis. Varia. De aeris compreſſione, 453

XCIV.

De FATII inveſtigatione lineæ celerrimi deſcenſus. De ſuis Epiſtolis a WALLISIO edendis. De CLUVERIO. De aëris compreſſione. Varia, 456

XCV.

Mittit reliquam partem Opuſculi *Fatiani*, ſuamque ipſius reſponſionem, qua occaſione varia quærit, 461

XCVI.

De VOLDERO. De FATII Opuſculo. Inveſtigatio ſolidi minimæ reſiſtentiæ, 463

XCVII.

De ſuis ad Volderum litteris. De opuſculo *Fatiano*. Varia, 471

XCVIII.

De *Leibnitianis* ad VOLDERUM litteris. De lite inter NEWTONUM & FATIUM. De libertate Dei. De aëris compreſſione & elaſticitate, 474

XCIX.

De libertate Dei. De aëris compreſſione & elaſticitate. De WALLISII Operum Tomo tertio, 479

C.

De libertate Dei. De aëris condenſatione, & elaſticitate. De WALLISIO. Litteræ *Volderianæ*.

INDEX
EPISTOLARUM,

EARUMQUE BREVIARIA.

TOM. II.

EPISTOLA CI.

De ſua cum VOLDERO Controverſia. De aëris condenſatione & elaſticitate. De WALLISIO & Nationum æmulatione. De MENCKENIO. De natura demonſtrationis. De aſcenſu corporum. De P. HOSTE libro de Navium ſtructura, Pag. 1

CII.

De VARIGNONIO. De ſubſtantiarum activitate. De poſſibili. Varia. Hortatur ut rei navalis ſcientiam mathematice tractare ſuſcipiat, 5

CIII.

De VOLDERO, ſubſtantiarum activitate, & viribus corporum. De poſſibili & neceſſario. De re nautica mathematice conſideranda. De LEIBNITII ad Acad. Pariſienſem Epiſtola, & de Calendarii correctione. De Opp. WALLISII Tomo 3°. 7

CIV.

De Epiſtola *Bernoulliana* in *Actis* edita. De Calendarii reformatione, 11

CV.

De LEIBNITII Apologia contra FATIUM. De Calendario reformando. Varia, 13

CVI.

De Societate Regia *Berolinenſi.* De Calendario. Varia. De re nautica. De poſſibili & neceſſario, 15

CVII.

CVII.

De Societate *Berolinenſi*. De Phoſphoro ſuo mercuriali. De ROLLIO Calculi differentialis adverſario, 18

CVIII.

De Phoſphoro mercuriali. De phoſphori igniferi inventore. Varia. De Calculi differentialis adverſariis, 24

CIX.

De Phoſphoro ſuo mercuriali. De FATIO. De GREGORII reſponſione ad Examen ſuæ *Catenariæ*. De CARREO, VOLDERO, BRAUNIO, 26

CX.

De HERMANNI reſponſione ad NIEUWENTIITIUM. De FATIO, & GREGORIO, & BRAUNIO. De phoſphoro mercuriali, 30

CXI.

De phoſphoro ſuo mercuriali. Varia, 33

CXII.

Phoſphori mercurialis vaſculum petit &c. 34

CXIII.

De invento *Tſchirnhauſiano*, circa rectificationes. De Arithmetica binaria. Phoſphorum mercurialem iterum petit, 35

CXIV.

De Arithmetica binaria. Mittit reſponſionem ad Objectiones *Rollianos* in Calculum differentialem, 38

CXV.

De Notis *Leibnitianis* in Objectiones *Rollianas* adverſus Calculum differentialem. De methodo *Huddeniana* maximi & minimi. De Arithmetica binaria. De HERMANNO. De Controverſia fraterna, 40

CXVI.

De Methodo *Huddeniana* maximorum & minomorum. De Arithmetica binaria, 46

CXVII.

Digitized by Google

CXVII.

De phoſphori mercurialis invento Societati *Berolinenſi* communicato. De controverſia fraterna, 48

CXVIII.

De nova Calendarii forma. Varia. De Methodo Maxim. & Minim. De phoſphoro mercuriali. De Opuſculo FATIANO, & Aſtronomia GREGORII, 49

CXIX.

Petit Phoſphori mercurialis ſpecimen. De NEWTONI Theoria lunari, & HERMANNO, 51

CXX.

Mittit ſpecimen phoſphori mercurialis. Varia. De Ciſſoidis rectificatione, 53

CXXI.

Nunciat accepiſſe ſe phoſphorum mercurialem lucidum, 56

CXXII.

Mittit Diploma admiſſionis in Societatem Regiam Berolinenſem, 57

CXXIII.

Gratiarum actio pro ſua in eum Coetum receptione, 58

CXXIV.

Suas ad Societatem Berolinenſem litteras ipſi commendat, 59

CXXV.

Gratias agit pro Diplomate Societatis Berolinenſis. De novo Barometro ſuo. De GRONINGII hiſtoria Cycloidis. De phoſphoro mercuriali ſuo, 60

CXXVI.

De ſcientiis, hiſtoria naturali præſertim, promovendis. Nunciat phoſphorum mercurialem Regi Reginæque oſtenſum. De novo Barometro. De GRONINGII hiſtoria Cycloidis. De hydracontiſteriis *Batavis*. Corporis naturam in extenſione ſitam non eſſe, 64

CXXVII.

Varia mittit. De Barometro, & Phoſphoro ſuis. De vitris *Tſchirnhauſianis*, & de ratione quadam ſingulari ſpecula cauſtica conficiendi. De Machinis hydraulicis. De extenſione & corporis natura, 66

CXXVIII.

De litteris VARIGNONII, ejuſque cum ROLLIO controverſia. De Barometro portatili. De ſpeculis cauſticis. De MENCKENII morbo. De phoſphoro mercuriali, 69

CXXIX.

De Litteris ſuis ad VARIGNONIUM. De Barometro portatili. De ſpeculis cauſticis. De inventis *Tſchirnhauſianis*, ejuſque vitris. De ſectionibus angularibus. Varia. DEMONSTRATIO MULTISECTIONIS ANGULARIS, 74

CXXX.

De ſua cum BAYLIO controverſia. De GRONINGII recenſionibus litterariis, 77

CXXXI.

De ROLLII refutatione & inventis *Tſchirnhauſianis*. De Barometro portatili. De quibuſdam Problem. *Bernoullianis*. De integrandis differentialibus rationalibus methodus *Leibnitiana*. De reducendis quadraturis irrationalibus ad rationales. Varia, 78

CXXXII.

Cum litteris ad VOLDERUM & BAYLIUM, 85

CXXXIII.

Nunciat Regem Pruſſiæ juſſiſſe ipſi nummum aureum mitti. De ſuis ad BAYLIUM & VOLDERUM litteris. De PITCARNIO & GREGORIO, 86

CXXXIV.

Cum numiſmate Regis Pruſſiæ, 87

CXXXV.

CXXXV.

Significat miſſum eſſe Regium numiſma, 88

CXXXVI.

Gratias agit de numiſmate Regio. De eodem Epigramma, 89

CXXXVII.

Regi Pruſſiæ gratias agit de munere Regio, 91

CXXXVIII.

De ſubſtantia & natura corporis. Varia, 92

CXXXIX.

De Poſthumis *Hugenianis*. De TSCHIRNHAUSII circa Dioptricam promiſſis. De Curvarum transformationibus. De CUPERO, 93

CXL.

Officii ergo. De *Clerveriano* microſcopio, 94

CXLI.

De Curvarum transformatione. De CHEQUÆI methodo fluxionum inverſa. De ſtatione mutanda vel conſervanda. De quibuſdam Mstis. præcipue CARTESII, 95

CXLII.

Laudat conſilium manendi *Groningæ*. De ſtudio matheſeos. De ſua methodo Curvas transformandi. De Opuſculo *Chequæano*. Quod Methodum Serierum non habuerit a NEWTONO. De *Poſthumis* CARTESII, & ROLLII *Algebra*. De HUGENII phoronomicis, & legibus motus, 97

CXLIII.

De litteris ſuis amiſſis. De ſpeculis cauſticis. Methodus transformandi curvas, ex Principio optico, 102

CXLIV.

De CRAIGIO, & CHEYNÆO, & GREGORIO. De NEWTONI Optica & Theoria lunari. De HALLEIO, 105

CXLV.

De ſpeculis cauſticis. De curvis transformandis & addendis. De lege continuitatis, 107

CXLVI.

De *Bernoullianis* in CHEYNÆUM Animadverſionibus. De PARENTII *Elementis Mechanices*, 111

CXLVII.

De ipſius reſtituta valetudine. De rei medicæ utilitate. De PARENTIO & VOLDERO, 114

CXLVIII.

De ipſius valetudine. De praxi medica. De *Novis litterariis Helveticæ*, deque Curvarum per focos deſcriptarum tangentibus. De TSCHIRNHAUSIO, 116

CXLIX.

De extenſione & corporis natura, fundamentoque virium. De HUDDENIO, & NIEUWENTIITIO, & TSCHIRNHAUSIO, 119

CL.

De CHEYNÆI iniqua agendi ratione. De MOIVRÆI in CHEYNÆUM Animadverſionibus &c. 121

CLI.

De CHEYNÆO, MOIVRÆO & CRAIGIO. De Conicis HOSPITALII, Obſervationibus FLAMSTEEDII, Objectionibus GREGORII, & quibuſdam NEWTONI operibus, 123

CLII.

De ipſius in Patriam reditu inſtituto, 125

CLIII.

Amiſſam Epiſtolam queritur, ejuſque nonnulla Capita repetit. De CHEYNÆO. De ſua Regula pro determinando valore fractionis $\frac{0}{0}$. VARIGNONII de vi centrifuga error, 126

CLIV.

CLIV.

De Academia Equeſtri *Berolinenſi.* De CHEYNÆO & HOSPITALIO. De VARIGNONIO & MOIVRÆO. De Problematibus ſolvendis. Varia, 129

CLV.

De errore VARIGNONII circa vires centrifugas. De Profeſſione *Ultrajectina* ſibi oblata. De Curvarum transformatione, 131

CLVI.

Nunciat reperiſſe ſe Epiſtolam quæ amiſſa credebatur. De viribus centrifugis. De Aſtronomia GREGORII, ejuſque errore circa Ellipſim *Caſſinianam.* De notatione differentialium. De APOLLONII ſectione rationis. De Regula GULDINI apud PAPPUM reperienda, 135

CLVII.

De reditu in Patriam, & *Fratris* ejus morte. De HERMANNO, & vacantibus apud *Batavos* Profeſſionibus. De Mathematicorum inter *Germanos* raritate. De CHEYNÆI libro pro veritate Religionis. De ſua methodo transformandi Curvas. De arithmetica dyadica, & Phoſphoro mercuriali, 139

CLVIII.

De *Jacobo* BERNOULLIO Diſtichon. De BERNARDO Profeſſore Leydenſi. De transformatione Curvarum ope ſpeculi elliptici, 141

CLIX.

De *Analyſi infinite parvorum* HOSPITALII. De curvarum transformatione ex principio optico. De HERMANNO, 143

CLX.

Queritur parum amice exceptas ſuas Objectiones in Methodum transformandi curvas ope ſpeculi elliptici. Quod idem exequi liceat ope ſpeculi ſphærici. Theorema Catoptricum. De motu radente. De HERMANNO. De SAURINI & ROLLII controverſia. De LA HIRII paralogiſmo, 145

CLXI.

De Curvarum transformatione ope ſpeculi ſphærici. De lite SAURINUM inter

inter & ROLLIUM. De LA HIRIO paralogizante. De calculi differentialis inventione. De locis Geometricis, & opere HOSPITALIANO, 149

CLXII.

De ſuis occupationibus. De motu radente errorem ſuum agnoſcit. De lite SAURINUM inter & ROLLIUM. De LA HIRIO ejuſque Tabulis aſtronomicis. De FLAMSTEEDIO. De VERSALIA, & GRANDIO. Varia, 152

CLXIII.

Mittit Annotationem in BERNARDI *Novellas Reip. litt.* de inventione Calculi differentialis, 155

CLXIV.

Demonſtratio Theorematis Catoptrici. De limitanda ſolutione Probl. transformationis curvarum, ope ſpeculi ſphærici. Varia, 156

CLXV.

De transformatione curvarum & motu reptorio. De Calculo integrali, ejuſque inventione. De Curvarum apicibus, 160

CLXVI.

De ſua valetudine infirma. De Ellipſi in curvam multigibbam transformanda per motum reptorium. De Elliptica peripheria ad Circularem reducenda per approximationem celerrimam. De curvarum apicibus. De ROLLIO & DU TALIO, 162

CLXVII.

De curvis multigibbis. De ROLLIO, DU TALIO, LA HIRIO & PARENTIO. De circuli rectificatione per approximationem. De *Miſcellaneis Berolinenſibus* edendis, 171

CLXVIII.

De curvis quibuslibet ad circuli peripheriam reducendis per approximationem. De Circuli rectificatione & Quadratrice deſcribenda. De *Miſcellaneis Berolinenſibus*, 174

CLXIX.

De *Abbate* GALLOSIO. Varia, 178

CLXX.

De HERMANNO. De HOSPITALII Sectionibus Conicis. De Obſervationibus FLAMSTEEDII. De ZUMBACHIO. De Imperatore Sinenſi, 180

CLXXI.

De *Arithmetica univerſali* NEWTONI. De Botanica. Varia. De curvis multigibbis. De *Genevenſium* ad Regem *Boruſſiæ* conſilio irenico, 182

CLXXII.

De infirma ſua valetudine. De NEWTONI Regula pro inveniendis diviſo-

Digitized by Google

diviſoribus. De curvis multigibbis ſine flexu contrario. Moivræi commendatio, 185

CLXXIII.

De ejus valetudine adverſa. De Newtoni Regula. De Rollio & P. Gouye. De Aleæ calculo. De multigibbis, 210

CLXXIV.

De *Miſcellaneis Berolinenſibus*. De Parentio. De Mariotti experimento circa Colores Theoriæ *Newtonianæ* adverſo, 212

CLXXV.

De curvis multigibbis. De Craigii errore. De Parentio & La Hirio. De Montmortii Opere de Aleæ calculo. De *Nic.* Bernoullii uſu *Artis conjectandi in Jure*. De curva elliptica ad circularem reducenda, 214

CLXXVI.

Varia. De æſtimandis reditibus ad vitam. De Logica probabilium, 219

CLXXVII.

De oblata ſibi Cathedra *Leydenſi*. De Craigio, Scheuchzero & Moivræo. De Agnato ſuo. De *Fratris Arte conjectandi*. De Wolfio, Hermanno, Gulielmino, Fardella & Contio. De Newtoni Principiis. Deque Hermanni Phoronomia, 221

CLXXVIII.

De ſuis occupationibus. De Burneto & Scheuchzero. De Logica probabilium. De Hermanno. De Wolfii Aërometria. De Newtoni Principiis Philoſophiæ. De ſtudio mathematico, 224

CLXXIX.

Optat videre ipſius Iconem. De vocatione *Leydenſi*. De Scheuchzeri meritis. De Poleni *Miſcellaneis*. De Wolfio. Obſervationes in Newtoni *Principia Philoſophiæ*. De Problemate virium centralium inverſo. De motu Corporum in medio reſiſtente, 227

CLXXX.

Promittit ſuam Iconem. De Phyſica mathematice ſcribenda. De Poleni machina arithmetica. De ejus in Newtonum Obſervationibus. De Mariotti experimento circa Colores. Varia. De Nugeto. De ſua cum Stahlio controverſia. De Hartsoekero, 233

CLXXXI.

Gratias agit pro Icone promiſſa. De *Miſcellaneis Berolinenſibus*. De cæruleo *Berolinenſi*. De Phyſica mathematice ſcribenda. Obſervationes aliæ in Newtoni *Principia*. De Mariotti experimento circa Colores. De Nugeto & Stahlio, 237

CLXXXII.

De *Miſcellaneis Berolinenſibus*. De Villemoto & Sturmio. De reſiſten-

reſiſtentia ex defectu lubricitatis. De STAHLIO & HERMANNO, & HARTSOEKERO, 243

CLXXXXIII.

De HARTSOEKERI cavillationibus. De HOTTINGERI adverſus COPERNICUM diſputatione, 247

CLXXXXIV.

De Societate *Berolinenſi*. De HARTZOEKERO, & HOTTINGERO. De P. REGINALDI *Analyſi demonſtrata*, 250

CLXXXXV.

De *Miſcellaneis Berolinenſibus*. De STURMIO & SCHEUCHZERO. De reſiſtentia ex defectu lubricitatis. De motu muſculorum. De HERMANNO, LA HIRIO, & HARTSOEKERO. De Profeſſionibus *Francofurtana* & *Patavina*. De P. REGINALDI *Analyſi demonſtrata*, 252

CLXXXXVI.

De HERMANNO ad *Francofurtanam* & Nic. BERNOULLIO ad *Patavinam* Profeſſionem vocandis. De nervorum contractione, & RÖMERI norte, &c. 258

CLXXXXVII.

De Profeſſionibus *Francofurtana* & *Patavina*. De Cæruleo *Berolinenſi*, &c. 261

CLXXXXVIII.

De Profeſſionibus, &c. deque valetudine ſua, 263

CLXXXXIX.

De Profeſſione *Patavina*. De HARTZOEKERO. De Transformatione Curvarum. De Experimentis *Londini* factis circa aeris reſiſtentiam, ejuſque per metallum candens tranſitu, atque refrangibilitate fluidorum pellucidorum. De Problemate *Praga* miſſo. De VARIGNONII Reſponſione ad GRANDIUM. De ipſius valetudine, 264

CXC.

De Profeſſionibus *Patavina* & *Francofurtana*. De ratione inter quantitates poſitivas & negativas imaginaria. De Problemate *Pragenſi*, &c. 268

CXCI.

De Profeſſione *Patavina*, 270

CXCII.

De Profeſſione *Patavina*. Hortatur ut Medicinæ matheſim applicet. Varia, 272

CXCIII.

De Profeſſione *Patavina*. De ratione inter quantitates poſitivas & negativas imaginaria. De Logarithmis Numerorum negativorum. Aliud Problema *Pragenſe*. De infuſione ſummitatum urticarum. De uſu Matheſeos

Digitized by Google

Matheſeos in re Medica. De cauſa elaterii, 275

CXCIV.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De MUYSII Elementis Phyſices. De ſua cum HARTSOEKERO controverſia, 278

CXCV.

De Profeſſione *Patavina*, & HERMANNO. Varia, 280

CXCVI.

De Agnato ſuo & HERMANNO. De Logarithmis Numerorum negativorum. De MUYSII *Elementis Phyſicæ*. De COLLINSII Commercio Epiſtolico, 281

CXCVII.

De *Nicol.* BERNOULLIO, & Profeſſione *Patavina*, 284

CXCVIII.

De BERNARDO & MUYSIO. De Commercio Epiſtolico *Anglorum*, &c. 286

Scheda de nullis Logarithmis numerorum negativorum, 287

CXCIX.

De Agnati ſui itinere in *Angliam*. De Filio ſuo *Nicolao*. Varia, 290

CC.

De hiſtoria Calculi differentialis quæ in *Anglia* paratur, 291

CCI.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De NEWTONI errore in comparandis Seriei infinitæ terminis cum differentialibus omnium graduum, 292

CCII.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De errore NEWTONI ejuſque Fluxionum Methodo, 296

CCIII.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De NEWTONI in *Actis Lipſienſibus* refutatione. De Calculo differentiali & Fluxionum. Varia, 298

CCIV.

De *Nic.* BERNOULLIO. De Commercio Epiſtolico COLLINSII, 301

CCV.

De ipſius & Agnati ejus in ſocietatem *Londinenſem* receptione. De Calculi differentialis hiſtoria. De Logarithmis Numerorum negativorum. Varia, 302

CCVI.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De COLLINSII Commercio Epiſtolico. De primo Inventore Calculi differentialis, 305

CCVII.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De COLLINSII Commercio Epiſtolico, 312

CCVIII.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De Commercio Epiſtolico COLLINSII. De Problemate *Anglis* proponendo. De CHEYNÆI jactantia. De HERMANNO, 315

CCIX.

De Profeſſione *Patavina*. De Commercio Epiſtolico COLLINSII, 319

CCX.

De Profeſſione *Patavina*. De Nova editione *Principiorum* NEWTONI. VARIGNONII Judicium de Inventore Calculi differentialis. De HERMANNO, 321

CCXI.

De ſua cum *Newtonianis* lite, deque Doctrina ſerierum promovenda, 325

CCXII.

De Profeſſione *Patavina*. De HERMANNO. De Serierum Doctrina. De NEWTONO, 327

CCXIII.

De Seriebus convergentibus. De ſua cum *Newtonianis* lite. Varia, 329

CCXIV.

De Profeſſione *Patavina*. De Seriebus convergentibus. De NEWTONO, & ejus Enumeratione linearum tertii Ordinis. De *Theoria Manuaria nautica*. De SCHEUCHZERO, 332

CCXV.

Varia, 336

CCXVI.

De *Commercio Epiſtolico*, & LEIBNITII ad id Reſponſione. De Serie *Leibnitiana* vel *Gregoriana* pro quadratura Circuli, &c. 337

CCXVII.

De Theoria Nautica. De lite ſua cum *Newtonianis*. De Profeſſione *Patavina*. De SCHEUCHZERO, 340

CCXVIII.

De ſua Theoria nautica. De *Commercio Epiſtolico* & KEILII libello. De Problemate *Newtonianis* proponendo, 342

CCXIX.

De re nautica perficienda. Hortatur ut hydraulicam tractet. De Metaphyſica NEWTONI. De Problemate *Anglis* proponendo. De æquationibus ad ſuperficies, 346

CCXX.

CCXX.

De re nautica promovenda. De PARENTII annotatis in ſuam *Manuariam Nauticam*. De Hydraulica mathematice tractanda. De Problemate *Anglis* proponendo. De RICCATI ſcripto quodam Analytico, 348

CCXXI.

Commendatio *Joh.* ARNOLDI *Angli.* De KEILIO, 351

CCXXII.

De PARENTIO. De *Com.* RICCATI ſcripto analytico. De longitudinibus ex Theoria lunari inveniendis. De HARTSOEKERO, 352

CCXXIII.

De Filio ſuo *Nicolao*. De PARENTIO. De RICCATI cum Agnato ſuo controverſia. De HERMANNI Phoronomià. De HARTSOEKERO, 355

CCXXIV.

De Problemate *Anglis* proponendo. De ipſius Filio *Nicolao*. De SCHULEMBURGIO. Varia, 358

CCXXV.

Mittit Problema *Anglis* proponendum. De HERMANNI Phoronomia, &c. 361

CCXXVI.

De *Commercii Epiſtolici* recenſione in *Tranſ. Philoſ.* De NEWTONI Philoſophia. De Problemate *Anglis* propoſito. De HERMANNO. De Horologio turbinatorio, 364

CCXXVII.

De *Commercii Epiſtolici* recenſione. Mittit Filii ſui ſolutionem Problematis ſpecialis *Anglis* propoſiti. Alia proponit difficiliora. De HERMANNO. De Horologio turbinatorio, 367

CCXXVIII.

De Problemate *Anglis* proponendo. De Horologio turbinatorio. De Profeſſione *Patavina*. De ſuo Opere hiſtorico, 371

CCXXIX.

Mittit Problema Trajectoriarum, quale requirebat, *Anglis* proponendum. De Horologio turbinatorio, 373

CCXXX.

De ſua cum NEWTONO lite, &c. 375

CCXXXI.

De ſpeciali Problematis Trajectoriarum ſolutione, alteroque viciſſim a TAYLORO propoſito. De NEWTONO & KEILIO, 377

Digitized by Google

CCXXXII.

De Problemate Trajectoriarum. De TAYLORI methodo incrementorum. De ſua cum CLARCKIO controverſia. De Horologio Turbinatorio, 380

CCXXXIII.

De TAYLORO. De ipſius cum CLARCKIO diſceptatione. De Agnati ſui ad *Patavinam* Profeſſionem revocatione, 383

CCXXXIV.

Gratulatur ipſius Agnato. De HERMANNI Solutione Problematis Trajectoriarum. De *Ruſſorum* Monarcha, & SCHEUCHZERO, 385

CCXXXV.

De Profeſſione *Patavina*. De HERMANNI Solutione Problematis Trajectoriarum. De VERZALIA. De TAYLORI methodo incrementorum, 387

CCXXXVI.

De NEWTONI ſolutione Problematis Trajectoriarum. De ſua cum CLARCKIO diſceptatione. De Mathematicis *Italis*. De TAYLORI methodo incrementorum. Varia, 390

CCXXXVII.

Nunciat ſuum diſceſſum *Patavium*, & gratias agit. Problematis à TAYLORO propoſiti ſolutio. De Solutione Problematis Trajectoriarum. De TAYLORI methodo incrementorum, 393

CCXXXVIII.

De Solutione *Newtoniana*, & *Hermanniana*, Problematis Trajectoriarum. De ipſius *Theodicæa*. De ipſius cum CLARCKIO controverſia. De VARIGNONIO & PARENTIO, 395

EPISTOLA I.

EPISTOLA PRIMA

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Officii ergo. Rogat ut ipſum commendet ANTONIO ULRICO Duci *Brunſvicenſi.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime.

NISI inſignis Tua humanitas jam multis 1694
nominibus mihi eſſet comperta, merito Mart.
hæſitaſſem an graviſſima negotia, quibus Te diſtractiſſimum eſſe non ignoro, præſentibus hiſce interpellare liceret. Quicquid tamen temeritatis hac in parte commiſſum fuerit, pro more ſingularis Tuæ erga me benevolentiæ, quam ſæpius jam perſentiſcere mihi contigit, haud difficulter condonabis. Nihil unquam magis mihi cordi fuit quam divinæ Matheſeos ſtudium; quippe quod Medicinæ, cui ego aliqualiter addictus, plurimum lucis

Digitized by Google

1694 Mart. confert, clavemque præbet ad referanda abditiſſima Naturæ clauſtra. Huic ſcientiæ, præſertim penitiori ejus parti, a juventute ſedulo incumbens, *eos* in illa, per Dei gratiam, feci progreſſus, ut, ſi dicere fas eſt, jam mihi comparaverim præcipuorum Mathematicorum applauſum, cumprimis Academiæ Scientiarum *Pariſienſis*, aliorumque, quorum neceſſitudinem in *Gallia* nactus ſum: Et Tibi ipſimet, Vir Celeberrime, libuit tenuia mea inventa pluris quam par eſt æſtimare, deque iis benigniorem ſententiam paſſim in *Actis Lipſienſibus*, proferre, quam ſperare ullatenus auſus fuerim. Qualiacunque autem illa ſint, profiteor, & uſque profitebor, ortus illorum unice deberi ſubtiliſſimis Tuis lucubrationibus, quas cum Orbe literato ſubinde communicare non dedignatus fuiſti; quæ & ſatis oſtendunt, nihil prorſus in univerſa Matheſi tam abſconditum eſſe, quod ſtupendam aciem ingenii Tui acutioris ſubterfugiat. Hoc ipſum eſt in cauſa cur ſemper in votis habuerim & eo collimarim, quo Amplitudini Tuæ aliquandiu propior eſſe poſſem, ſi modo exoptata occaſio ſeſe offerret, ut tanquam ex ſcaturigine ipſa haurirem, quæ huc-uſque non-niſi ex rivulis remotiſſimis haurire licuit; &, ſi magnis addere licet parva, arduum ſtudium mathematicum ad majorem perfectionis gradum promovendum adjuvarem. Cum verò, non ſine delectamento, intellexerim quod, ut ut ſævientis Martis fax ubique fere ſit accenſa, nihilominus bonæ artes & literæ veſtris in regionibus non parum vigeant & floreant, & cum fama ad aures noſtras pervenerit quod Celſiſſimus & Sereniſſimus Dux Antonius Ulricus, juxta graviſſima regiminis negotia eorumque prudentiſſimam adminiſtrationem, etiam ſummum delectamentum capiat ex arcanis Naturæ & Artis, eorum indagationem benigniſſimè promoveat, omniumque ſcientiarum, præcipue mathematicarum, cultores gratioſiſſimo nutu foveat & protegat; quam ſane regiam ſuæ Celſitudinis generoſitatem totus eruditus Orbis nunquam ſatis laudabit, ego autem humillimo juxta ac profundiſſimo pectore *perpetuo* recordabor; Hoc, inquam, cum intellexerim, enixe Te, Vir Celeb. *rogatum cupio* ut auctoritate qua polles, *propter ſummam* Tuam eruditionem, cauſam meam ita agas apud Celſitudinem ſuam, ut ad ſcopum optatum pertingere

gere poſſim; quod ut Tibi difficile factu non erit, credas velim mihi opus fore longe gratiſſimum, quodque æternum obſtringet

Amplitudinis Tuæ cultorem devotiſſimum

J. Bernoulli.

EPISTOLA II.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Teſtatur quam ſit jucundum ſibi cum Bernoullio *Commercium Epiſtolicum. Communicat conſilium ſcribendi de* Scientia Infiniti. *De tetragoniſmo univerſali per motum. In quadraturis deſiderata.*

Vir Celeberrime, Amice Honoratiſſime,

Percommode accidit, quod ante monſtratas Sereniſſimo Duci literas Tuas, mutata conſilia & Patriam Urbem Tibi manum injeciſſe intellexi. Habet illa jus retractus, quanto magis jus retentionis. Atque illi quidem rectè conſuluiſti; precor etiam ut Tibi, cui omnia fauſta opto: cum ſuis eſſe, etiam minore emolumento, dulce eſt; præſertim in dubia ſpe majorum. Præterea, meo judicio ac ſenſu, vel ſola *Fratris* Tui, inſignis Viri, conſuetudo poterat Te illic tenere devinctum, dum Vobis mutuo & auxilio eſtis & incitamento. Mihi certe, ſi quis Veſtri ſimilis adeſſet, multum ea voluptas aliis pleriſque potior foret. Ceterum non humanitati tantum, ſed & benevolentiæ imputo verba Epiſtolæ tuæ in me effuſiora, quibus non inferiores etiam res expecto. Itaque, ſi ſcripſeris in poſterum crebrius, & meditationum veſtrarum egregiarum ſubinde me participem feceris, hoc ego maxima affectus argumenta putabo; præſertim cum ego nunc multo plura a Te ſperem, quam à me poſſint reddi. Itaque favore erga me ſupplere Vos opus eſt, quæ utilitati Veſtræ decedet. 1694 Mart.

A 2 Tuum

1694 Mart. Tuum ingenium natura vividum, florens ætate, exercitationibus mathematicis excolitur: mihi, ſi qua naturæ vis fuit, tempore plurimum imminuta eſt, & quod reſtat fère alio verti debet. Si quid tamen, uti memoras, priſtina mea ſtudia Vobis profuere; ego viciſſim, quaſi jure quodam poſtulo ut Veſtris præclaris inventis frui detur, etſi præter ſinceri animi lætos plauſus præſtare vix quicquam ipſe poſſim.

Cogitavi aliquando me utcunque abſolvere his ſtudiis, conſcripto Libello, quem *Scientiam infiniti* non incommode inſcribi poſſe putem, in quo ſuperioris Matheſeos principia traderentur; hæc enim ubique infiniti conſiderationem involvunt, quemadmodum Geometria, quæ Algebræ innititur, Matheſim habet generalem quantitatum nonniſi finitarum. Putem autem, non moli tantum, ſed & multo magis pretio Operis plurimum acceſſurum, ſi veſtra egregia reperta adjicerentur. Veſtra enim non minus hæc methodus, quam mea eſt. Itaque & Tuam & *Fratris* Tui, Viri eximii, ſententiam expecto. In candore certe meo ſaxo ne quid deſideretis.

Gaudeo meam Tetragoniſmum generalem per motum (1) Tibi (quemadmodum intellexi) non mediocriter probari: minus eſt impeditus, quam prima ſpecie videtur, & vix Algebraicæ Geometriæ conſtructionibus per regulas mobiles facilitate cedit. Uſus ſum curva rigida prædeſcripta, ut generalem methodum traderem, nam alioqui curvarum deſcriptrices rectæ rigidæ vicariam pro curva operam præſtare poſſunt. In eodem omnia plano fieri poſſe jam annotaveram & ipſe in poſteriore ſcheda (2) *Actis* inſerta: Sed vel hinc agnoſco rem a Te accurate conſideratam, qui idem monuiſti. Præclarum erit, ſi aliis Tangentium converſis aptæ conſtructiones accommodentur, quod nemo Te melius poſſet: Multa multis modis fieri poſſunt, ſed ſemper præ cæteris aptam rationem,

(1) *Agitur de Schediaſmate quod inſertum eſt* Actis Lipſienſ. ann. 1693. *Septemb.* p. 385. *ſub hoc titulo.* G. G. L. Supplementum Geometriæ dimenſoriæ, ſeu generaliſſima omnium Tetragoniſmorum effectio per motum: ſimiliterque multiplex conſtructio lineæ ex data tangentium conditione.

(2) *Eodem anno, menſe Octob.* p. 477. *Videatur etiam* p. 527. *menſis Nov. ejuſdem anni.*

nem, & velut in hoc deſtinatam, habet rerum natura. In Quadraturis ipſis duo adhuc potiſſimum deſidero; unum pro conſtructione, alterum pro analyſi. Nam etſi conſtructionem illam prædictam habeam, deſiderarem tamen alias adhuc ad ſcientiæ augmentum: Et inter alia præſtat reducere Quadraturas ad Rectificationes Curvarum, quam contra, ut vulgò fieri ſolet; eaque de re dudum cum ſucceſſu cogitavi: nam ſimplicior utique eſt dimenſio lineæ, quam dimenſio ſuperficiei. Pro analyſi autem deſidero reductionem Quadraturarum omnium ad certa quædam genera, quæ inter ſe invicem ſint irreducibilia, aptaſque in eam rem valorum expreſſiones velim. 1694 Mart.

Cum illuſtri Viro Dom. *Marchione* HOSPITALIO, quæ Tibi fuit liticula, compoſitam puto. Quanto pauciores ſunt ſolidæ ſcientiæ cultores, eo magis eos inter ſe amicos eſſe convenit. Sunt tot alii, quos appello mercenarios in Litteris, qui nihil agerent, niſi vel neceſſitate, vel pravis cupiditatibus impellerentur. Hos inter ſe conflictari ſinamus. Vale & Dom. *Fratrem Tuum* mihi æſtimatiſſimum à me officioſe ſaluta.

Dabam *Hanoveræ* 21 Martii 1694.

Ad omne officiorum genus paratiſſimus

Godefridus Gulielmus LEIBNITIUS.

EPISTOLA III.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Declarat quam vellet ipſum inviſere. De Scientia Infiniti. *De Methodo Tangentium inverſa, quæ invenerit. De calculo percurrentium. Quæ quadraturæ ad circuli & hyperbolæ quadraturam reduci poſſint.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor honorande,

Si patria mihi abiturienti manum injecit, hoc tantò *ægrius* fero, quantò majori ſpe, quam de laribus veſtris mihi jamjam invi- 1694 Mai.

1694 Mai. ſendis conceperam, alebar. Repeto & denuò repetam, nec aliter potero quam deplorare ſiniſtram meam ſortem, quæ me ab Ampl. Tua præſentia ſeparatum tenet. Utinam conſilium & medium ſuperſtes eſſet, quod me in viciniam veſtram vocaret: Sane Patria neque retentionis, neque retractus jus in me haberet: nec ejus dulcedo, vel etiam ipſa *Fratris* conſuetudo me teneret devinctum: Sed Fata regunt omnia. Cæterum tòt tantiſque Tui erga me affectus teſtimoniis abundat nupera Ampl. Tuæ Epiſtola, ut tantum non pudibundus obmuteſcam. Quæ mihi attribuis, Tibi debentur: Laudes, in quas excurris, non promerui: Meditationum mearum leviuſcularum vis particeps reddi, quaſi vero Sol à Planetis lumen mutuetur & ſcaturigo aquam ex rivulis petat. Mihi inſuper concedis poteſtatem Tibi crebrius ſcribendi, non igitur indignaberis ſi frequenter moleſtiam creo. Primum intellexi ex litteris *Menkenianis* Ampl. Tuam ad prelum parare Opuſculum complectens *Scientiam infiniti* & pridie ante acceptam Epiſtolam Tuam Dno. Menkenio reſcripſi, ſimulque unum & alterum Tibi ſignificandum commiſi. Nobis interim & toti Orbi Litterario multum gratulamur de futuro iſto Opere, & jam in anteceſſum ſingulare quid nobis promittimus, non dubitantes quin ut cæteræ Tui ingenii proles, ita & hoc ſui æſtimatores ubique nacturum ſit, præſertim eos qui, quod ſubtile eſt, à communi norunt diſcernere. Non autem è re fore puto, Vir Celeb. exigua noſtra inventa Tuis adjungere: dolerem ſi fœtus hic qui, dubio procul, jam omni poſſibili perfectione gaudet, à nobis dedecoratus in lumen ederetur. Si tamen verum, quod aiunt, oppoſita juxta ſe poſita magis eluceſcunt, eò lubentius Amp. Tuam petiti compotem facere poterimus, quod evidentius Tua à noſtris dignoſcentur. Id ſaltem velimus, ut mentem Tuam apertius explices, qua ratione hoc factum à nobis velis: num ſcilicet ut notabiliora noſtra inventa Tibi ocyus tranſmittamus; num verò, ut Mſto. Tuo ad noſtras prius delato manus, quædam adjiciamus in modum adnotationum.

Gaudeo Te agnoſcere Tuum Tetragoniſmum generalem per motum à me accurate fuiſſe conſideratum: illum cum *Fratre* meo, qui de ejus obſcuritate querebatur, forſan ob non adhibitam perlectio-

lectionem ſatis attentam, explicuiſſem; idem mecum de eo ſenſit, 1694
& hanc Tuam methodum non mediocriter probavit. Non ſpero Mai.
methodum tangentium inverſam generalem unquam detectum iri: mihi tamen ſunt diverſæ regulæ, per quas peculiaria exempla quamplurima reſolvo: in aliis autem pro rerum natura & conſtitutione diverſas tento vias & plerumque non infeliciter. Hoc enim unicum intendo, ut in æquationibus differentialibus indeterminatæ x cum ſuis differentialibus dx ſeparentur ab indeterminatis y & dy, quod palmarium eſt in hoc ſcrutinio: Secus enim ad conſtructionem æquationis differentialis non pervenitur. Ad hoc autem præſtandum multas habeo vias ſpeciales. Ex. gr. ſi in æquatione differentiali nullæ occurrunt quantitates conſtantes, quæ dimenſionum numerum adimplent, poterit illa, quantumvis perplexa, converti in aliam, ubi indeterminatæ cum ſuis differentialibus unius nominis ſeparantur ab indeterminatis alterius nominis; ponendo nempe $x = \frac{zy}{a}$, vel, ſi mavis, $y = \frac{fx}{a}$. Si verò in æquatione differentiali ſint etiam quantitates conſtantes, ſed indeterminatæ non-niſi ad unicam dimenſionem aſcendunt, res etiam facile mihi expedietur. Si æquatio differentialis eo reduci poteſt, quod plerumque fit, ut x ſit $= y$ multiplicato vel diviſo per quantitatem aliquam, rationalem vel irrationalem, quomodocunque compoſitam ex differentialibus dx & dy, plus conſtante multiplicata vel diviſa per quantitatem, ſi vis, aliter compoſitam ex differentialibus dx & dy; poterit illa æquatio ſemper conſtrui; ſed curva proveniens evadit interdum mechanica ſecundi generis; id eſt, quæ requirit quadraturam mechanicæ ſimplicis inquadrabilis: Contra verò interdum æquatio differentialis, licet ſecundi gradus, per mechanicam ſimplicem conſtruitur, qualis illa $addx = dy^2$, cujus conſtructionem exhibui in ſchediaſmate *Fratris* Actorum anni elapſi, p. 254 (3), quam etiam pridem, una cum Analyſi, Dno. *Marchioni* Hospitalio communicaveram. Hac occaſione oportune mentionem injiciam novæ mihi repertæ ſpeciei curvarum ***percurrentium***, quæ quaſi medium tenent inter geome-

(3) Acta Erudit. 1693. *Jun.* pag. 254. *vel Jac.* Bernoulli Op. N°. LVI. pag. 570.

Digitized by Google

1694 Mai. geometricas CARTESII, & inter mechanicas. Curvæ geometricæ vulgo dicuntur illæ, quarum natura exprimitur per æquationem certi & determinati gradus: mechanicæ, quarum æquatio conſtat ex differentialibus. Medias autem vel *percurrentes* appello, quarum æquatio eſt indeterminati gradus, id eſt, in qua literæ indeterminatæ & conſtantes aſcendunt ad dimenſionem indeterminatam, & proinde omnes poſſibiles dimenſiones percurrunt. Hæ æquationes à Tuis tranſcendentibus in eo differunt, quod numerus dimenſionum in illis ſit vagus & indeterminatus, in his verò determinatus ſed incognitus. Cum autem hujuſmodi curvæ percurrentes peculiare requirant ſyſtema ad puncta in Curvis, ad Tangentes, ad Quadraturas, &c. definiendas; jam ab aliquo tempore mihi ideam formavi novi *Calculi percurrentis*, ubi modum trado ſumendi differentialia æquationum percurrentium, & conſtruendi omnes curvas percurrentes, ope Logarithmicæ vulgaris, quæ, ut deprehendo, ipſa etiam eſt curva percurrens; ejus enim æquatio, poſitis abſciſſa x, applicata y & conſtante a, eſt hac $a^x = y$, adhibita nempe unitate, per quam dimenſio x ſubintelligitur diviſa, ita ut hic non lineam indeterminatam, ſed numerum indeterminatum denotet. Leviſſimum hic exemplum adducam. Sit (*Fig.* 1.) curva quædam FGH percurrens, cujus æquatio eſt hæc $x^x = y$ (poſitis CI, x, & IH, y) quæritur ejus conſtructio, ſubtangens, & quadratura. Conſtructa ad axem productum FCM Logarithmica vulgari ABN, cujus prima applicata CA ſit = unitati aſſumtæ: ducatur BIH parallela ipſi DC, & BD parallela ipſi CA, fiatque $CM = \frac{CI \times CD}{CA}$, & ductæ applicatæ MN ſumatur æqualis IH: erit punctum H in curva quæſita. Fiat denique ut IB + ſubtangens Logarithmicæ, ad eandem ſubtangentem, ita AC ad IL; erit IL ſubtangens ad punctum H. Spatium curvilineum FGHIC exprimitur per infinitas ſeries ſimul ſumtas; excepto unico caſu, cum I cadit in A; tum enim ſpatium FCAG exprimitur per unicam ſeriem: eſt enim (poſita CA = 1) $FCAG = 1 - \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{3 \times 3 \times 3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5}$ &c. Tuam nunc expecto ſententiam, Vir Ampl. num hujus Calculi percurrentis principia paulo fuſius explicata mereantur publicari.

TAB. I.

Recte,

- Recte, ut opinor, mones quod præſtat reducere Quadraturas ad Rectificationes curvarum, quam contra; & hoc eſt quod etiam olim à me obſervatum fuit in conſtructione mea Catenariæ, beneficio curvæ parabolicæ: mihi quoque plures ſunt viæ, quibus hoc in aliis caſibus præſtari poteſt: inter plures una præ aliis placet, per quam omnes illæ Quadraturæ curvarum, quarum applicatæ in quantitatibus rationalibus, vel ſaltem latus quadratum non excedentibus, exprimuntur, ad Rectificationes aliarum reduci poſſunt. Quod reductionem Quadraturarum ad certa genera ſpectat, de ea re jam dudum quoque cogitavi, & quidem cum ſucceſſu, quoad Quadraturas circuli & hyperbolæ: arbitror enim me omnes poſſe determinare Quadraturas, quæ ad prædictas reduci poſſunt; id quod jam *Pariſiis* D^no^. Hospitalio in meis, ipſius in gratiam compoſitis, Lectionibus patefeci *. Sic conſtructionem Catenariæ, quæ prima fronte dependere videtur à Quadratura curvæ 4^or^. dimenſionum, ad Quadraturam Hyperbolæ reducere mihi facile fuit, quod tamen Nob. Hugenio ſatis arduum videbatur, ut conjicio ex iis quæ dedit in *Hiſtoria Operum Erudit.* anno 1697, menſe Febr. A *Fratre* plurimum ſalutatus Vale & Fave. 1694 Maii

Amplitudinis Tuæ obſequentiſſimo

J. Bernoulli.

* J. Bernoulli Opp. Tom. III. N°. CXLIX. L. 2. pag. 396.

Digitized by Google

EPISTOLA IV.

LEIBNITII AD BERNOULIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De conſtruendis æquationibus differentialibus homogeneis. De calculo percurrentium ſeu exponentialium. De conſtruendis curvis ex data Tangentium conditione. De quadraturis ad ſeries revocandis. De Scientia Infiniti.

Vir Nobiliſſime & Clariſſime, Fautor Honoratiſſime,

1694 Jun. GRatiſſimæ mihi fuere Tuæ litteræ, vel ideo quod amiſſam Tui videndi ſpem utcunque ſolantur. Gaudeo de illo, quem obſervo, animorum ac methodorum conſenſu: video enim multa Tibi animadverſa, in quæ & ego incideram.

Superiore anno ad Dominum *March.* HOSPITALIUM ſcribere memini, eſſe mihi rationem omnes æquationes differentiales primi gradus, [ſeu carentes differentio-differentialibus,] in quibus adeſt conſtans implens leges homogeneorum, reducendi ad Quadraturas: Id nunc Tibi quoque innotuiſſe animadverto; quemadmodum & methodum meam quærendi naturam & tangentes curvarum exponentialiter tranſcendentium; ubi ſcilicet in æquatione curvæ ipſa indeterminata ingreditur exponentem, qua ego jam a multo tempore ſum uſus, & ſpecimina etiam HUGENIO miſeram, cui inſolens id calculandi genus videbatur. Ego ſic procedo: Sit verbi gratia $x^x = y$. Ergo (2) $x \log. x = \log. y$. ſeu (3) $x\int(dx:x) = \int(dy:y)$. Datur ergo log. y, ex data x, ejuſque Logarithmo, adeoque datur & y. Porro differentiando ex æq. 3. fit (4) $dx + dx\int(dx:x) = dy:y$, ſeu $dy: dx = yx(1+\int(dx:x))$ Ergo habetur & ductio tangentium, ex poſitis Logarithmis. De Quadratura Figuræ res eſt altioris indaginis.

Ex

Digitized by Google

Ex tranſcendentibus æquationibus ego has ipſas ſemper judicavi ſimpliciſſimas: Nam tales æquationes finitæ ſunt, nec niſi ordinarias quantitates habent ingredientes; immiſcet ſe tamen, profundiore quadam ratione, tranſcendentalitas ſeu infinitum. Aliquoties in *Actis* de illis mentionem injeci, ſed Methodum calculo tractandi Operi meo reſervaveram; tametſi res facilis ſit animadvertenti connexionem cum Logarithmis. Elegantiſſima videtur Series illa tua 1694 Jun.

$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4}$ &c., quæ aream quandam dictæ figuræ exhibet: quomodo inde oriatur non video. Si potes determinare omnes Quadraturas, quæ reducuntur ad Quadraturam Circuli vel Hyperboles; rem præſtas egregiam, gratumque erit videre quid Dno. *Marchioni* Hospitalio communicaveris. Mihi ipſi nondum vacavit calculos inſtituere neceſſarios ad dijudicandum annon curva Ellipſeos vel Hyperbolæ reduci poſſit ad Hyperboles & Circuli quadraturas.

Curvas ex tangentium proprietate inveni, peculiari calculi differentialis uſu; ut ſi (*Fig.* 2.) data ſit relatio inter A p & p C normalem ad curvam; item ſi detur relatio inter A p & A π, vel inter A θ & A T. Eaque Methodus ad plura adhuc porrigi poteſt. Fundamentum eſt in iis, quæ non ita pridem in *Actis* dedi April. 1692 (2), nempe quod ſic curva quæſita formatur linearum infinitarum poſitione datarum interſectione. Sic ſi p C detur ex A p, formatur linea A C interſectione circulorum poſitione datorum, centris p, radiis p C deſcriptorum. Si detur relatio inter A p & A π; dantur poſitione ipſæ p π, quarum concurſu formabitur linea, cujus evolutione habebitur linea A C. Si detur relatio inter A T & A θ; dabuntur poſitione ipſæ T θ, quarum concurſu formabitur linea A C. &c. Tab. I.

Illud adjiciam pro Quadratura figuræ $x^x = y$ per ſeriem, non opus eſſe rècurrere ad numerum infinitum Serierum infinitarum.

 Nam

(2) *De Linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter ſe concurrentibus formata, easque omnes tangent. ac de novo in ea re Analyſis infinitorum uſu.* Act. Erud. 1692. April. p. 168.

Videatur præſertim G. G. L. *Nova calculi differentialis applicatio & uſus, ad multiplicem linearum conſtructionem, ex data tangentium conditione.* Acta Erud. 1694. Jul. pag. 311. vel *Jac.* Bernoulli Opp. N°. 61. p. 613.

1694 Jun.

Nam æquatio liberata a vinculis ſummatoriis, erit (⊙) $yydx^2 + xdy^2 = yxddy$, poſito dx eſſe conſtantem; unde faciendo $y = b + cx + ex^2 + fx^3 + gx^4$, &c. habebitur etiam yy, & dy & dy^2 & ddy, quibus valoribus ſubſtitutis in æquatione ⊙, prodibit æquatio identica, ſeu cujus omnes termini erunt tollendi, & ita ad obtinendam deſtructionem, invenientur ipſæ b, c, e, f, &c. quibus habitis, habetur & $\int ydx = bx + \frac{1}{2}cxx + \frac{1}{3}ex^3 + \frac{1}{4}fx^4$ &c. Ita quævis hujuſmodi facile ad commodam Seriem revoco; eamque methodum eo majoris faciendam puto, quod eſt generaliſſima, praxique aptiſſima, & ad omnes differentialitatis gradus porrigitur, quemadmodum id explicavi in *Actis* (3). Pergratum quoque erit diſcere ſpecialem tuam Methodum qua conſtruis curvam cum datur $x = y$, (multiplicatæ per quantitatem formatam ex dy, dx) $+ a$, (multiplicatæ per aliam formatam ex dy, dx).

Quæ ab amicis Operi meo (4) adjicienda ſuppeditabuntur, ſeparari a meis æquiſſimum eſt, ut ſua cuique merita in rem litterariam conſtent. Non omnia unus poſſum agere, nec ſi poſſim, velim, ſatis per alia diſtractus.

Primæ a me gratiæ BERNOULLIIS debentur: vos enim primi effeciſtis, ut qualiacunque tentamina mea in uſus publicos transferrentur. Et Tua opera Dominus *Marchio* HOSPITALIUS nobis acceſſit. Hujus admonitu, & HUGENIUS, quamvis ipſe per ſe maximus Geometra, delectari noſtris cœpit. Nam etſi antea mecum commutaret litteras, nondum tamen hoc Calculi genere capiebatur, quod vim ejus nondum propriis meditationibus comperiſſet. Quæ cum ita ſint, quod molior ego Opus, non magis meum quam veſtrum erit; idque Titulus ipſe ita profitebitur, uti vos probabitis. Meditata ergo Veſtra ſpeciminave parate, ut lubet & prout videbitur indicate, vel ſummittite; prorſus utar conditione Veſtra ex præſ-

(3) G.G.L. *Supplementum Geometriæ practicæ, ſeſe ad problemata tranſcendentia extendens, ope Methodi novæ generaliſſimæ per ſeries infinitas.* Acta Erudit. 1693. April. p. 178.
(4) *De ſcientia infiniti.*

præſcripto, aut certe nihil niſi Vobis conſciis conſentientibuſque mutabo. Vale & clariſſimum virum *Fratrem Tuum* a me ſaluta, qui ſum.

Hanoveræ 7. Jun. 1694.

Cultor Veſter ſtudioſiſſimus

Godefridus Guillelmus Leibnitius.

P. S. Duos olim Helvetios novi in ſtudiis quoque Mathematicis & Phyſicis egregios, Ottium & Sevetam. Quid illi nunc agant ſcire pervelim, nam vivere & valere ſpero.

EPISTOLA V.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Calculo exponentiali. De conſtruendis curvis ex Tangentium conditione. De quadraturis ad Circuli & hyperbolæ quadraturam reducendis. Rectificatio ellipſis & hyperbolæ non pendet ab earum quadratura. De ſerie univerſaliſſima ad quadraturas. De Trajectoriis orthogonalibus.

Vir Ampliſſime & Celeberrime, Fautor honoratiſſime.

CUm ante paucas ſeptimanas rure [ubi per aliquot menſes commoratus, aquarum *Fabarenſium* gratia mihi potandarum] in Urbem reverterer, poſtremæ Tuæ gratiſſimæ mihi demum tradebantur, quod cauſæ eſt, ut ob ingruentes Nundinas *Lipſienſes*; ad quas noſtrates jamjam abituriunt, Te tui petiti omnino compotem reddere nequeam, Breviter tamen, quantum per anguſtiam temporis licet ad Tuas reſpondebo. Gaudeo & Tibi quoque eſſe conſideratas curvas illas quas vocas *exponentialiter tranſcendentes*, ego au- 1694. Septemb.

1694. Septem. tem *percurrentes*; quid peculiare in illis obſervaverim paucis exponam. Æquatio percurrens conſtat quantitatibus percurrentibus, quæ ſunt vel primi, ſecundi, tertii, vel ulterioris generis. Quantitas percurrens primi generis eſt, cum ejus exponens eſt numerus vel quantitas ſimpliciter indeterminata, ut y^m: ſecundi verò generis, cum ejus exponens eſt quantitas percurrens primi generis, ut y^{m^n}, & ita de aliis, *&c.*

Sequebantur Principia calculi percurrentis, quemadmodum videntur in Actis Erudit. 1697. Mart. pag. 126. & ſeq. *Aut.* Joh. BERNOULLIO, Opp. Tom. I. N°. XXXVI. pag. 182.

Diutius quam par eſt, Vir Celeb., his immoror, quæ forſitan jam me melius noſti: Interim meas ſuper hac materia meditationes Tecum communicare volui, ut, quouſque cum Tuis conſpirent, videas.

Egregium eſt, Vir Ampl., quod annotaſti, curvas interdum ex Tangentium proprietate deſcribi poſſe, per interſectiones infinitarum curvarum: ratio modi, quem tradis, cuivis attendenti manifeſta fit: interim obſervo iſtius modi curvas plerumque eſſe Algebraicas, vel ſaltem ex Algebraïcarum evolutione generari, quarum proinde puncta etiam Algebraïce determinari poſſunt.

TAB. I. Sic ſi P C (*fig.* 3.) normalis ad curvam detur ex A P, id eſt, ſi P C ſit æqualis applicatæ P R, curvæ datæ A R, determinabitur punctum C, abſcindendo ſubtenſam P C $=$ P R ex circulo P C θ, deſcripto ſubtangente P θ tanquam diametro. Hinc & ipſa ducta θ C erit Tangens curvæ A C.

TAB. I. Si detur relatio (*fig.* 4.) inter A T & A θ, id eſt, ſi A T ſit æqualis applicatæ θ R curvæ A R datæ, habebitur punctum C, ſumendo θ C quartam proportionalem ad A P, θ P, & θ T.

Circa Quadraturas quæ reduci poſſunt ad quadraturas Circuli & Hyperbolæ, hoc habeo. Omne ſpatium, cujus elementum exprimitur per quantitatem differentialem, quæ per aliam factam poſitionem literarum reducitur ad $dx.\, x^p \sqrt{aa \mp xx}$ vel $\frac{x^p\, dx}{\sqrt{aa \mp xx}}$ aut eſt quadrabile

aut

aut dependet à Quadratura Circuli aut Hyperbolæ, quod demonſtrare poſſum : ſed viciſſim, ſi aliquod ſpatium eſt quadrabile, vel dependet ab alterutra iſtarum Quadraturarum, ejus elementum neceſſariò quidem mutari poſſe debet in aliud, quod exprimatur per alterutram expreſſionem differentialem, ope novæ cujuſdam ſuppoſitionis litterarum. Regulam autem generalem pro hac ſuppoſitione generaliter inſtituenda adhuc deſidero, nec unquam inventam iri ſpero : ſaltem non magis quam illam, per quam cognoſci poſſet, num æquatio Algebraïca quantivis gradus & quantumvis compoſita deprimibilis eſſet, nec-ne. Si quis enim quantitatis alicujus irrationalis & valde compoſitæ ſumeret differentiale (quod facile fit) illudque mihi integrandum proponeret ; neſcio ſane an-non diu ipſi inhærerem, & tandem non niſi caſu & palpando, vel etiam nunquam, eò pervenirem. Id ſaltem aſſerere auſim, rectificationem Ellipſis & Hyperbolæ, ad earumdem Quadraturas non poſſe reduci : harum quippe curvarum elementa ad neutram dictarum formularum redigi poſſunt, facile enim omnes poſſibiles & neceſſariæ ſuppoſitiones inſtituuntur. . . 1694 Septem.

. . . .

Mirifice placet methodus Tua in *Actis* (5) jam explicata, per quam quamvis Quadraturam ad ſeriem revocas : generaliſſima enim eſt, & in praxi facilis : id tamen incommodi habet, quod ſi in æquatione differentiali reperiatur y & dy, vel x & dx duarum pluriumve dimenſionum ; ſeries inde orta nullam manifeſtam legem progreſſionis obſervet, ut accidit in quadranda curva $x^x = y$. Meæ autem ſeries, licet numero infinitæ, ſi modo inceptæ fuerint, quantumvis continuari poſſunt : quia evidente lege progrediuntur. Adde & hoc, quod per aggregationem terminorum homogeneorum in unicam ſeriem converti poſſent.

Commode hic mentionem injiciam ſeriei univerſaliſſimæ, non ita pridem mihi repertæ, quæ omnes quadraturas & rectificationes generaliter exprimit, quæque methodo tangentium inverſæ aptiſſima eſt. Poſita enim quacunque differentiali quantitate integranda $n\,dz$ (per n intelligo quantitatem quomodocunque formatam ex indetermi-

(5) G. G. L. *Supplementum Geometriæ practicæ, ſeſe ad problemata tranſcendentia extendens, ope novæ methodi generalis per ſeries infinitas.* Act. Erudit. 1693. April. pag. 178.

1694 Septemb. terminatis & conſtantibus) erit, poſita dz conſtante, ejus integrale æquale huic ſeriei $nz - \frac{1}{1.2} zz \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3.} z^3 \frac{ddn}{dz^2} - \frac{1}{1.2.3.4} z^4 \frac{dddn}{dz^3}$ &c. quæ ſi applicetur in propoſito quodam exemplo, deſtruentur dn, ddn, $dddn$, &c. per dz, dz^2, dz^3 &c. totaque ſeries conſtabit terminis pure Algebraïcis. Univerſalis hujus ſeriei ope, facile invenio Sinum rectum ex dato arcu & radio, cæteraque Problemata ſolvo, quæ ſolviſti per Tuam methodum in *Actis* April. 1693. explicatam. Modus quo ad hanc ſeriem perveni prodibit in *Actis* (6), cujus uſum fuſius ibi explicatum videbis.

Hæc quidem ſunt, Vir Cel., quæ raptim conſcribere potui, brevitas temporis plura in præſentiarum non permiſit: pleraque, eaque notabiliora quæ feci inventa, mihi non ſunt in ſcripto, ſed in aliorum manibus verſantur, in quorum gratiam ea ſcriptis mandaveram, quæ ſi de novo concinnanda eſſent, non parum laboris faceſſerent mihi, qui nunc alia prorſus ago; ea nimirum ad quæ Magiſtratus noſter me deſtinavit : breves omninò horulæ meditationibus Mathematicis impendendæ mihi ſuperſunt, quod mecum reputans, non poſſum non multoties optare quandam occaſionem ubi me totum ſtudio Mathematico applicare poſſem; Ea enim capacitate, qua Tu polles pluribus toto cælo differentibus incumbendi, inque iis ſimul excellendi, ego non polleo, ſed cui me addico, id me totum requirit. Tuum opus *de Scientia infiniti* impatienter expectamus; faxis, rogamus, ut propediem lucem videat; Tu Tibi ipſimet ſatis ſuppeditabis materiæ, & ſi quædam adjicias de noſtris, urbanitati Tuæ, non neceſſitati tribuemus. Vale & Fave

Amplitudinis Tuæ, devinctiſſimo &
ſtudioſiſſimo cultori
J. Bernoulli.

Baſileæ 2. Septembris 1694.

P. S.

(6) *Additamentum effectionis omnium quadraturarum & rectificationum curvarum per ſeriem quandam generaliſſimam* Acta. Erudit. 1694. Nov. pag. 437. *vel.* Joh. Bernoulli Opp. Tom. I. N°. XXI. pag. 125.

P. S. Eodem hoc momento, quo præſentes obſignaturus ſum, affertur mihi *Actorum menſis Julius*, in quo novam Tuam Calculi differentialis applicationem & uſum (1) video. Quantum fugitiva huc uſque perluſtratione cernere licet, eſt quod eas curvas, quarum in poſtremis Tuis ad me datis mentionem feciſti, & quarum unius & alterius conſtructionem ſupra dedi, artificioſe deſcribere, earumque calculum ad certas regulas revocare doceas, ex quo ſane non parum delectamenti capio, omniaque ſtudioſe perlegam. Memini me olim ſimiles fere ſpeculationes habuiſſe, ex occaſione inſignis Problematis quod mihi Dn. Fatio de Duillier, *Nicolai* Frater, propoſuerat, de invenienda curva quæ ſingulas Parabolas à Globis ex ſingulis elevationibus Mortarii ejectis deſcriptas tangit; quam deprehendi & ipſam eſſe Parabolam, ſimulque modum inveni, per quem hujuſmodi Problemata per vulgarem Geometriam *Carteſianam* ſolvi poſſent, quorum exemplum de determinandis Cauſticis in *Actis* Jan. 1692. (*pag.* 30.) (2) exhibui. Aliud nunc Problema non minus elegans quam utile, ob ſummam affinitatem quam cum hiſce habet proponam. *Datis*, nempe, *infinitis curvis poſitione*, *invenire curvam qua omnes ad angulos rectos ſecat*, vel ut Ampl. Tuæ verbis utar, *Lineis*, *propoſitam normaliter ſecantibus*, *poſitione ordinatim datis*, *invenire propoſitam*. Si poſitione ordinatim datæ ſint Parabolæ, eundem axem & eundem Verticem, ſed Parametros variabiles habentes, curva optata erit Ellipſis. Si poſitione ordinatim datæ ſint Parabolæ eædem eundem Axem, ſed variabiles vertices habentes, curva quæſita erit Logarithmica vulgaris. Sic in quovis exemplo peculiari rem facile expedire poſſem. Tibi autem difficile non erit generales pro hoc excogitare Regulas. Cæterum hoc Problema inſignem uſum præſtat in determinanda curvatura radiorum lucis per medium inæquabiliter denſum tranſeuntium, juxta hypotheſes Dn. Hugenii; ſiquidem radius nihil aliud eſt quam linea undulationes ad angulos rectos ſecans. 1694. Septemb.

 (*Voyez*

(1) *Acta Erud.* 1694. Jul. p. 311. vel *Jac.* Bernoulli Opp. N°. LXI. pag. 613. G. G. L. *Nova Calculi differentialis Applicatio & Uſus, ad multiplicem linearum conſtructionem, ex data tangentium conditione.*

(2) *vel* Opp. Tom. I. N°. VI. pag. 52.

1694. Septemb. (*Voyez ſon Traité de la Lumiére, pag.* 44.) ubi quidem radium AHEB undulationes BC normaliter ſecantem incurvari oſtendit, ſed qualem proprie curvaturam induat non innuit. Poſſet præſens Problema adhuc latius extendi, nempe ſic, *Lineis, propoſitam ad angulum datum ſecantibus, poſitione ordinatim datis, invenire propoſitam*: Si lineæ datæ ſint rectæ in puncto coeuntes, curva quæſita erit (ceu manifeſtum eſt) Loxodromica plana (1). Sed lator harum ex puncto diſceſſurus me abrumpere cogit.

EPISTOLA VI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM

Reſponſio ad præcedentem.

De Scientia infiniti. De quadratura curvæ exponentialis. De integrandis quantitatibus logarithmicis. De ſeriebus. De quadraturis. De Trajectoriis orthogonalibus.

Vir Celeberrime Fautor Honoratiſſime.

1694. Decemb. Triduum eſt, quod Tuæ, mihi ab itinere aliquo reverſo, ſunt redditæ; quod amicus, qui *Lipſia* attulit, non rectâ huc veniſſet & me deinde non inveniſſet. Gratias ago, quod de Calculo mearum exponentialium vel Tuarum percurrentium, aliiſque id genus rebus egregiis ad me ſcribis. Tametſi enim ex prioribus meis facile judicaveris, Principia illa exponentialium, & mihi familiaria eſſe a multo tempore; Calculum tamen circa altiores earum ſpecies non ità longè produxi; & ſæpe ita diſtrahor, ut propemodum his ſtudiis valedicere cogerer, niſi mihi plus ab amicis in poſterum, quam a meis meditationibus pollicerer. Unde illud, quod *de infiniti ſcientia* cogito Opuſculum, ſi Veſtris [ut Tuæ innuere videntur] auxiliis

(1) *Nunc* Logarithmicam ſpiralem *communius vocant.*

Digitized by Google

auxiliis deſtitueretur, vereor ut mature prodeat in lucem, aut omnino ut prodeat. Quanquam etiam id parum veſtra referre judicem, qui ope amplius mea adeo non indigebitis, ut mihi potius opus ſit veſtra. 1694 Decemb.

Quadraturam figuræ, cujus ordinata ſit x^x vellem citra Seriem poſſe dari, in quo eſſet aliquod ſcientiæ incrementum; Certe ad quædam vicina gradum dudum promovere memini; ſed non vacat inter Chaos Schedarum inordinatarum inquirere, aut actum agere. Non improbo, quod ipſo lx in ſerie uteris valorem ipſius $x^x = y$ exprimente. Et elegans eſt quæ inde ducitur ſpecialis ſeries $\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3}$ &c. Si tamen abſtineas ab lx, ſolaque x, vel ejus potentiis utaris; prodibit opinor Series generalis non minus ſimplex, aut certa lege procedens, quam eſt generalis tua. Nam, ob æquationem, $-dy + ydx + ylx\,dx : a = 0$, Sic explicatam, ut faciamus $x = 1 + z$ & $a = 1$ & $y = 1 + cz + dz^2 + ez^3 + fz^4$ &c. cum lx ſit $\frac{1}{1} z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4$ &c. fiet æquatio, in qua, ut identica ſit, omnes terminos deſtruendo, prodeunt æquales deſtructitiæ ſatis ordinatæ, nempe $c = 1$, $d = \frac{\frac{1}{1} + c}{2}$, $e = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{1} c + d}{3}$, $f = \frac{+\frac{1}{3} - \frac{1}{2} c + \frac{1}{1} d + e}{4}$, $g = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} c - \frac{1}{2} d + \frac{1}{1} e - f}{5}$; &c. quæ eo ipſo regularem atque univerſalem exhibent conſtructionem numerorum c, d, e, f &c. idemque eſt in cœteris Seriebus, quas mea methodo invenio; nec potentiæ altiores ipſius y vel dy regulares progreſſus impediunt, etſi magis compoſitos reddere ſoleant.

Sed ſi adhibere velimus ipſam quantitatem logarithmicam, res ſimpliciſſima ratione hoc loco fiet, quærendo non y ſed ly. *Sic quoties variant morbi variabimus artes.* Quærendo igitur non ordinatam, ſed ejus Logarithmum, ſic procedo; quia poſui $x = 1 + z$, ut fiat $lx = \frac{1}{1} z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3$ &c. & $xlx = lx + zlx$;

1694 Decemb. &, ob æquationem $y = x^x$, eſt $ly = xlx$, ſeu (⊙) $-ly + lx + zlx = 0$, faciamus $ly = nz + pz^2 + qz^3 + rz^4$ &c. & explicatione æquationis ⊙ prodibit.

$$0 = \left\{ \begin{array}{lllll} -ly = -nz & -pz^2 & -qz^3 & -rz^4 & \&c. \\ +lx = \frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \&c. \\ +zlx & +\frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & \end{array} \right\} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Ergo } n = 1, \\ p = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ r = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \text{\& ita porro} \end{array}$$

adeoque fiet $ly = z + \frac{1}{1.2} z^2 - \frac{1}{2.3} z^3 + \frac{1}{3.4} z^4 - \frac{1}{4.5} z^5$ &c. quemadmodum, & ſine hoc calculo, primo obtutu haberi poterat; ſed volui formam generalem inquirendi ſervare. Atque hæc eſt ordinata artificialis [ut *Angli* ſolent loqui], magna ſimplicitate expreſſa: unde ex Tabulis Logarithmorum habetur facile ordinata naturalis: idque ſufficit in praxi, cum de area figuræ ſimilibuſque non quæritur. Sed ſi ponatur ipſa y per ſeriem, licebit uti ſerie a me adhibita pro inveniendo numero ex dato Logarithmo. ſit Logarithmus l, erit numerus $1 + \frac{1}{1} l + \frac{1}{1.2.} l^2 + \frac{1}{1.2.3.} l^3 + \frac{1}{1.2.3.4} l^4$, &c. Hinc quia ly (ſeu l) hoc loco eſt xlx, fiet $y = 1 + \frac{1}{1} xlx + \frac{1}{1.2.} x^2 (lx)^2 + \frac{1}{1.2.3.} x^3 (lx)^3$ &c.

Dum hæc ſcribo, ad Tuam Seriem reſpiciens, video plane hanc ipſiſſimam eſſe; nam ante, quod impeditior calculus videretur, fugiente tantum oculo luſtraveram, ubi illud præclariſſime a Te animadverſum video, quod termini $(xlx)^e$ poſſunt ſummari, quod per ſe egregium eſt, etſi ad inveniendum $\int y dx$ non ſerviret. Sane tales Quadraturas & mihi dudum fuiſſe cognitas dicere auſim, Te non invito, ſed tamen & hoc auſim addere facile obvias non eſſe.

Originem Quadraturarum hujuſmodi adſcribam, ſaltem ut videas an Tuæ conſpirent. Nempe differentiando $x^b lx^r$ prodit (1) $h. x^{b-1} lx^r dx + r x^{b-1} lx^{b-1} dx$, hinc ſi $r = 1$, fiet (2)

$b\int x$

$h\int x^{h-1}\, lx\, dx = x^{h} lx^{r} \frac{1}{h} x^{h}$. Ergo ſi $h - 1 = m$; pa- 1694. Decemb.
tet utique ſummari poſſe omnes $x^{m}\, lx\, dx$, ſeu dari $\int x^{m}\, l x\, d x$. Sed hinc rurſus, ope æquationis (1) inveniri poteſt etiam $\int x^{m}\, lx^{2}\, d x$; nam ſi in æquatione (1) ponas $r = 2$, fiet (3) $d(x^{h} lx^{2}) = h x^{h-1}\, lx^{2}\, dx + 2 x^{h-1}\, l x\, d x$. Unde (4) $h\int(x^{h-1}\, lx^{2}\, dx) = x^{h} lx^{2} - 2\int(x^{h-1}\, lx\, dx)$. Sed datur $\int(x^{h-1}\, lx\, dx)$ per æquationem (2.) Ergo datur & $\int(x^{h-1}\, lx^{2}\, dx)$ ſeu datur (5) $\int(x^{m} lx^{2}\, dx)$ Hinc vero jam iterum ope æquationis (1.) inveniri poteſt etiam $\int(x^{m}\, lx^{3}\, d x)$. Nam ſi in æquatione (1) ponas $r = 3$, fiet rurſus (6) $d(x^{h} lx^{3}) = h x^{h-1}\, lx^{3} dx + 3 x^{h-1}\, lx^{2} dx$. Unde (7) $h\int(x^{h-1}\, lx^{3}\, dx) = x^{h}\, lx^{3} - 3\int(x^{h-1}\, lx^{2}\, dx)$. Unde cum detur $\int x^{h-1}\, lx^{2}\, dx$) per concluſionem (5), dabitur & $\int(x^{h-1}\, lx^{3} dx)$ per (7), adeoque dabitur (8) $\int(x^{m}\, lx^{3}\, dx)$, & ita porro pergendo, dabitur generaliter $\int(x^{m}\, lx^{e}\, dx)$, & quidem per ſeriem finitam, ſi e ſit numerus integer. In noſtro autem caſu, m & e ſunt æquales, & quidem integri.

Sic etiam cum varia olim circa variorum graduum differentias tentarim; in ſeriem alterius tuæ ſimilem incidere memini. Imo fuere hæ cogitationes inter meas primas *Pariſienſes*, cum ſummas tantum Dettonvillæ vel Pascalii meditarer.

Sit ſeries decreſcens	a, b, c, d &c.
ejus differentiæ primæ	e, f, g, h &c.
ſecundæ	l, m, n, o &c.
tertiæ	p, q, r, s &c.
quartæ	t, u, v, x &c.
quintæ	$\beta, \gamma, \delta, \theta$ &c.

1694. Decemb. $a = e + f + g + h$ &c. $= 1l + 2m + 3n + 4o$ &c. $= 1p + 3q + 6r + 10s$ &c. $= 1t + 4u + 10v + 20x$ &c., & ita porro. Rurſus $e = e$, $f = 1e - 1l$, $g = 1e - 2l + 1p$, $h = 1e - 3l + 3p - 1t$; Et ita porro. Et ſemper ordine procedunt numeri, qui figurati dicuntur, vel combinatorii. Hos valores ipſarum e, f, g, &c. ſubſtituendo in æquatione $a = e + f + g + h$ &c.

fit $a = 1e$

$1e - 1l$

$1e - 2l + 1p$

$1e - 3l + 3p - 1t$

$1e - 4l + 6p - 4t + 1\zeta$

&c. &c. &c.

Atque hæc quidem procedunt, tam in ordinariis ſeriebus, quarum termini ſunt quantitates ordinariæ, quam in iis, ubi ſunt infinite parvæ.

Jam rem ad Calculum differentialem, in infinite parvis nobis uſitatum, accommodando, pro a ponatur y, & pro e, l, p, t, ζ, &c. poni poterit reſpective dy, ddy, d^3y, d^4y, d^5y &c. ipſa autem quantitas conſtans, pro unitate ſumpta, ſit dx infinite parva, & $1 + 1 + 1 + 1$ &c. in infinitum erit x, & ideo $1 + 2 + 3 + 4$ &c. erit $\int x$, & $1 + 3 + 6 + 10$ &c. eſt $\int\int x$, & $1 + 4 + 10 + 20$ &c. eſt $\int\int\int x$ &c. Ergo fit a, ſeu $y = dy.\,x - ddy\int x + d^3y\int\int x - d^4y\int\int\int x + d^5y\int^4 x$ &c. Sed $\int x = \frac{1}{1.2}xx$ & $\int^2 x = \frac{1}{1.2.3}x^3$ & $\int^3 x = \frac{1}{1.2.3.4}x^4$ &c. Ergo (& quidem ſupplendo legem homogeneorum per dx unitatem) fit tandem $y = \frac{1}{1}x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1.2}xx\frac{ddy}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}x^3\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{1}{1.2.3.4}x^4\frac{d^4y}{dx^4}$ &c. ſive, ut ad rem opinor tegendam, ponere maluiſti, promovendo; y, dy, ddy, &c. in $\int y$, y, dy, &c. reſpective, quod hic eodem redit fiet $\int y\,dx = \frac{1}{1}xy - \frac{1}{2}xx\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2.3}x^3\frac{ddy}{dx^2}$ &c. Series autem harmonica id habet

bet peculiare, ut termini *a*, *b*, *c*, *d* &c. coincidant ipſis *a*, *e*, *l*, *p*, &c. 1694. Decemb.

De reductione Quadraturarum ad Quadraturam Circuli vel Hyperbolæ adhuc amplius inquirendum cenſuerim. Quomodo ego Curvam Iſochronam Paracentricam per rectificationem conſtruxerim, in *Actis* videritis. *

Doleo temporis non ſatis Tibi ſuppetere ad præclaras meditationes mathematicas proſequendas pro voto tuo, quibus præ aliis pleriſque Te parem eſſe conſtat. Itaque non ſine multo ſcientiæ detrimento alia ſubinde a Te agi debere video. Ego ipſe pro affectu quo præclaros viros complector, obviam ire cogitaveram, ſed conſilium Tuum ornandæ Patriæ non potui non laudare. Interea *Junior* Sturmius locum obtinuit, qui Tibi paratus erat, & lauta ſatis conditio eſt. *Nicolaus* Fatius Duillerius in Anglia, ut accepi, non incommodam ſtationem invenit. Ejus *Fratrem* fratriſſare ex litteris tuis intelligo, Tuo opinor exemplo.

Pene exciderat Problema inveniendi curvam, quæ ordinatim poſitione datis occurrit ad angulos rectos. Cujus Methodus meo judicio conſiſtit in duabus æquationibus, una continente relationem inter x, y & conſtantem quamdam in curva poſitione data, ſed pro diverſis talibus ordinatim datis variabilem, b; altera continente valorem ipſius $dy : dx$ in curva quæſita, expreſſam ex proprietate perpendicularium in curva poſitione data, cujus æquationis ope, datur ipſius b valor per dy, dx, y, x, pro re nata; quarum duarum æquationum ope tollendo b, habetur æquatio differentialis primi gradus pro relatione inter x & y. Sic ſi poſitione ordinatim datæ ſint Parabolæ verticis communis, quarum ſemiparametri b, fiet æquatio $2bx = yy$. Jam ex conditione problematis, ſeu perpendicularitate ad parabolam fit $b = -ydx : dy$. Unde tollendo b, fit $-2xydx = yydy$, ſeu, ſummando $aa - xx = \frac{1}{2} yy$, quæ utique eſt ad Ellipſin, & ſatisfaciunt utique Ellipſes infinitæ. Et has ordinatim poſitione datas, manifeſtum eſt, viciſſim a Parabolarum unaquaque

* G. G. L. *Conſtructio propria Problematis de Curva Iſochrona Paracentrica.* &c. Acta Erud. 1694. Aug. pag. 364. vel Jac. Bernoulli Opp. N°. 64. pag 627.

1694. Decemb. quaque normaliter ſecari. Cæterum præclare a Te notatum eſt, hoc Problema uſum habere in Dioptricis, pro curvatura radii in medio continue variante. Nihil potuit dici aptius.

Poſtremo *Fratrem* tuum celeberrimum Virum, rogo ut a me officioſiſſime ſalutes. Boisotius Abbas ex *Comitatu Burgundiæ*, vir egregius, ſpem mihi fecit monumentorum quorumdam hiſtoricorum: rogavi, ut *Baſileam* ad Dominum *Fratrem* Tuum [a cujus benevolentia id humanitatis ſpero, & mereri conabor,] mitteret, quoniam locorum ſitus ita ferre videtur. Inde *Lipſiam*, occaſione nundinarum deferri poterunt ad communem amicum Dnum. Menckenium. Vale.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{6}{16}$ *Decembris* 1694.

Cultor ſtudioſiſſimus

G. G. Leibnitius

P. S. Duos noveram olim Eruditos Schafhuſinos, Ottium & Scretam. Audio Scretam obiiſſe diem ſuum. Quid Ottio factum ſit, ſcire gratum foret.

EPIS-

EPISTOLA VII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De quadratura curvæ exponentialis, & integratione quantitatis logarithmicæ. De Serie univerſali pro quadraturis. De Problemate curvæ æquilibrationis. De propagatione Calculi differentialis.

Vir Ampliſſime ac Celeberrime, Fautor Honoratiſſime,

QUoties litteras Tuas aſpicio, toties amiſſa Tui videndi ſpes reacerbat dolorem; ſiſtunt enim profundiſſimi ingenii amplam imaginem, ſed ipſius Archetypi fruitione deſtituor. Invitus & invidus intelligo juniorem STURMIUM obtinere locum qui mihi paratus erat. Siqua alia commoda occaſio pace aliquando *Europæ* reconceſſa ſeſe offerat, eam avide acciperem, ſi modo Tibi me propiorem redderet: hìc enim quia alia omnino agere debeo, vereor, quod & ipſe vereris, ne tandem ſtudiis mathematicis valedicere cogar. 1695 Januar.

Non video qua ratione quadratura figuræ cujus ordinata eſt x^x poſſit citra ſeriem dari. Si verò in ſerie abſtinendum ab lx, per Tuam methodum inveniuntur quidem æquationes deſtructitiæ ſatis ordinatæ, ipſa autem quæ inde emergit Series non ita evidenter procedit, ut ſepoſitis æquationibus deſtructitiis, a quovis alio continuari poſſet. Recte mones quod ſi adhibere velimus ipſam quantitatem logarithmicam, hoc eſt, ordinatam artificialem, res ſimpliciſſima ratione fieri poſſit: interim etiam obſervo, quod, ſine calculo & formatione æquationum deſtructitiarum, primo intuitu habeatur: etenim $ly = x\,lx$ & $x = 1 + z$, $lx = \frac{1}{1}z - \frac{1}{2}\times$

1695 Januar. $z^2 + \frac{1}{3} z^3$ &c; Ergo multiplicando x per lx, habetur $ly = \frac{1}{1} \times$

$$z \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 \text{ \&c.} \\ +\frac{1}{1} \quad -\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{3} \end{array} \right\} = z + \frac{1}{1.\,2} z^2$$

$- \frac{1}{2.\,3} z^3 + \frac{1}{3.\,4} z^4$ &c. quæ eadem eſt quæ Tua.

Integrale termini $x^m lx^e\, dx$ unica operatione invenio per additionem & ſubtractionem terminorum æqualium, nempe ſic,

$$x^m lx^e dx = x^m lx^e dx + \frac{1}{m+1} x^{m+1} dlx^e - \frac{e}{m+1} x^m lx^{e-1} dx$$

$$- \frac{e}{\overline{m+1}^2} x^{m+1} dlx^{e-1} + \frac{e.\,\overline{e-1}}{\overline{m+1}^2} x^m lx^{e-2} dx$$

$$+ \frac{e.\,\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3} x^{m+1} dlx^{e-1} - \frac{e.\,\overline{e-1}.\,\overline{e-2}}{\overline{m+1}^3} x^m lx^{e-3} dx$$

$- \frac{e.\,\overline{e-1}.\,\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4} x^{m+1} dlx^{e-3}$ &c. Nam termini 2us & 3us, 4us & 5us, 6us & 7us ſe deſtruunt ob $dlx = \frac{dx}{x}$: Verum 1us & 2us, 3us & 4us, 5us & 6us &c., ſimul ſumti per conſtructionem ſummari poſſunt, fiet itaque $\text{I} x^m lx^e dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \times$

$$lx^e - \frac{e}{\overline{m+1}^2} x^{m+1} lx^{e-1} + \frac{e.\,\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3} x^{m+1} lx^{e-2}$$

$- \frac{e.\,\overline{e-1}.\,\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4} x^{m+1} lx^{e-3}$, &c. ubi ſtatim patet, quod ſi e ſit numerus integer & poſitivus, ſeries futura ſit finita, & quidem tot terminorum, uno ſubducto, quot in e continentur unitates. Integrale ejuſdem quantitatis $x^m lx^e dx$ aliter inſuper inveniri poteſt per ſeriem infinitam in quocunque caſu; ponatur enim $\overline{m+1}\, lx = s$, erit $x^{m+1} = ns$ (per ns intelligo numerum ipſius s) & $lx^e = \frac{s^e}{\overline{m+1}^e}$: Eſt autem $ns = 1 + \frac{1}{1} s + \frac{1}{1.2} \times$

$s^2 +$

$s^2 + \frac{1}{1.2.3} s^3 + \frac{1}{1.2.3.4} s^4$ &c., & differentiando hanc ſeriem 1695.
habebitur dns ſeu $\overline{m+1}\, x^m dx = ds$ Januar.
$\times \overline{1 + \frac{1}{1} s + \frac{1}{1.2} s^2 + \frac{1}{1.2.3} s^3 + \&c.}$, ideoque multiplicando illud per $\frac{lx^e}{m+1}$ & hoc per æquale $\frac{s^e}{\overline{m+1}^{e+1}}$ erit $x^m lx^e dx = \frac{ds}{\overline{m+1}^{e+1}}$
$\times \overline{s^e + \frac{1}{1} s^{e+1} + \frac{1}{1.2} s^{e+2} + \frac{1}{1.2.3} s^{e+3} + \frac{1}{1.2.3.4} s^{e+4}}$, &c.
Ergo ſumendo integralia terminorum ſingulorum proveniet,

$$\int x^m lx^e dx = \frac{1}{\overline{m+1}^{e+1}} \times \frac{s^{e+1}}{e+1} + \frac{s^{e+2}}{1.\overline{e+2}} + \frac{s^{e+3}}{1.2.\overline{e+3}} + \frac{s^{e+4}}{1.2.3.\overline{e+4}}$$

&c. = (ſubſtituto loco s ejus valore $\overline{m+1}\, lx$)

$$\frac{lx^{e+1}}{e+1} + \frac{\overline{m+1}.\, lx^{e+2}}{1.\,\overline{e+2}} + \frac{\overline{m+1}^2\, lx^{e+3}}{1.2.\overline{e+3}} + \frac{\overline{m+1}^4\, lx^{e+4}}{1.2.3.\overline{e+4}}$$ &c.

Hæc itaque Series erit etiam æqualis illi ſupra inventæ $x^{m+1} \times \frac{1}{m+1} lx^e - \frac{e}{\overline{m+1}^2} lx^{e-1} + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3} lx^{e-2} - \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4} lx^{e-3}$ &c. Quod hic obiter tanquam conſectarium dictum velim. Cæterum ſpeculationes iſtæ adhuc ulterius extendi poſſunt, ſi nempe quantitates logarithmicæ lx, lx^2, lx^3, &c., cum numeris x, vel x^2, x^3, &c. vel conſtantibus quomodocunque componantur, & compoſitæ ſint comprehenſæ ſub ſignis radicalibus, poſſunt enim plerumque ſummari, vel per vel citra ſeries, vel etiam per extenſiones curvarum. Ex. gr. $\int dx \sqrt{xx + lx^2}$ eſt = curvæ extenſæ cujus coordinatæ ſunt $\frac{1}{2} xx$ & $x\, lx - x$. Plura alia, eaque non contemnenda circa hanc materiam animadvertere poſſem, quæ verò, brevitatis ergo, omitto, Tuæ relinquens induſtriæ, cui nihil

Digitized by Google

1695 Januar. effugere poteſt: Nondum ſatis tentavi extenſionem ipſam curvæ $x^x = y$, num commode per ſeriem, vel etiam ſine ſerie exhiberi poſſet; Vellem ut ipſe diſquireres, meretur enim Tuam applicationem.

Quod concernit alteram meam ſeriem & quidem univerſaliſſimam pro omnibus quadraturis & integralibus $\int y\,dx = \frac{1}{1}xy - \frac{1}{2}x^2 \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2.3}x^3 \frac{ddy}{dx^2}$ &c., jam forſan in *Actis* * videbis me ejus originem non ita longe accerſere; cum in eum finem nihilo alio opus ſit, quam continuâ additione & ſubtractione terminorum æqualium, ceu ut ſupra feci: præclariſſime tamen eandem deducis ex ſerie tua decreſcente, ejuſque differentiis primis, ſecundis, tertiis, &c.; quo non parum gaudeo; multas enim proprietates de quibus antea non conſtabat circa numeros figuratos exinde detexi: Obſervo etiam quod ſi ſeries decreſcens ſit harmonica, non ſolum coincidunt termini a, b, c, d, &c. ipſis a, e, l, p &c., ſed etiam e, f, g, h, &c., ipſis b, f, m, q, &c. & l, m, n, o &c. ipſis c, g, n, r &c. & ita conſequenter. Item, ſi progreſſio harmonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ &c., continuetur, ut numerus terminorum ſit x, erit ſumma progreſſionis $= x - \frac{x.x-1}{1.2.2} + \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3.3} - \frac{x.x-1.x-2.x-3}{1.2.3.4.4}$ &c. Hinc tamen nondum perſpicio, quomodo ſumma progreſſionis harmonicæ finitæ, expeditè per compendium exhiberi poſſit, uti exhibentur ſummæ progreſſionum figuratarum, vel etiam arithmeticæ & geometricæ: ſi quem noveris modum pro hoc, mecum haud gravatim communicabis.

Dum hæc ſcribo recipio litteras a Dno. *Marchione* HOSPITALIO, in quibus mittit novam ſolutionem cujuſdam Problematis, quod mihi jam ante bimeſtre communicavit, una cum ſuâ tum inventa

* Act. Erud. 1694. 437, *vel* Joh. BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. XXI. p. 125.

Digitized by Google

ſinventa ſolutione *, quam ut quantocyus *Lipſiam* mitterem rogavit, quod etiam feci ſine mora, adnectens ſchediaſmati *Hoſpitaliano* animadverſionem meam, ubi exhibui aliam ſolutionem ejuſdem Problematis, ſed generalem, quam per communem Geometriam & ſimpliciſſime inveni, cum tamen *Hoſpitaliana*, quæ ſpecialis eſt, multo differentialium calculo opus habeat. Quod cum Dno. Hospitalio indicaſſem, Problemati ſe de novo applicuit, invenitque etiam generalem Solutionem, quam nunc mittit †, quamque a mea parum differre reperio: optaret ut prior ſua, ut & mea ſupprimerentur, & nova ſua ſubſtitueretur: ſed cum eam *Lipſiæ* non ſatis mature appulſuram putem, rogo Dnum. Menckenium per literas quibus præſentes Tuæ incluſæ, ut hanc novam ſolutionem Hospitalii priori ſubnectere, vel ſaltem ſubſequenti *Actorum* menſi inſerere velit; qua ratione ipſi quodammodo ſatisfieri ſpero. Problema autem eſt tale: Sit (*Fig.* 5.) pons ſublicius AB, convertibilis circa Axem A, ſitque trochleæ C circumductus funis BCM, cujus una extremitas ſuſtinet pontem, altera pondus vel ſacoma M: Quæritur qualis debeat eſſe curva CMN, ſic ut ubicunque exiſtens pondus M in curva, ſemper æquilibrium faciat cum Ponte AB. Hoc Problema ita generaliter propono. Dato (*Fig.* 6.) in plano verticali curva quavis AB, quæritur in eodem plano altera curva LM; ita ut duo pondera data B, M, communi funiculo BCM trochleam poſitione datam C ambienti alligata, & curvis ubicunque impoſita ſemper ſibi mutuo æquilibrentur, vel quod tantundem eſt, ut minima vi moveri poſſint. Prius comprehendi ſub hoc poſteriori evidens eſt, gravitas enim dimidia pontis ſublicii concentrari intelligitur in extremitate B, & ſic curva data AB in hoc caſu eſt peripheria circuli. Ubi hoc animadverſione dignum reperio, quod, in ſpeciali caſu, curva CMN ſit Cyclois ex rotatione circuli ſuper circulo æquali deſcripta. Cæterum, ex occaſione hujus, aliud mihi venit in mentem Problema quod etiam

1695 Januar.

TAB. II.

TAB. II.

* *Ill.* Marchionis Hospitalii *Solutio Problematis Phiſico-Mathematici*, ab *Erudito quodam Geometra propoſiti*. Acta Erud. 1695. Febr. p. 56. 59. *vel* Joh. Bernoulli Opp. Tom I. N°. XXII. XXIII. p. 129. 132.

† *Hanc vide in* Act. Erud. Suppl. Tom. II. Sect. VI. pag. 289. vel. *Joh.* Bernoulli Opp. T. I. N°. XXV. p. 140.

1695 Januar. TAB. II. ad calcem novæ ſolutionis Hospitalii Geometris ſolvendum propono: Vellem horulam otioſam ipſi impenderes, ut viderem an ſolutio tua meæ correſponderet. Quæro (*Fig.* 7.) in plano verticali curvam ABC ſecundum quam pondus B libere deſcendendo ſemper æquali vi tendat filum annexum BE, quod ex evolutione curvæ DE deſcribit quæſitam ABC; vel, ſi mavis curvam ABC concipere rigidam, ut pondus B non annexum filo & propria gravitate deſcendens illam quovis momento premat æquali vi centrifuga. Reperio curvam ABC poſſe eſſe tranſcendentem & algebraïcam trium dimenſionum, & etiam rectam.

Nicolaum Fatium Duillerium in Anglia ſtationem inveniſſe lubenter audio; lubentius tamen ipſi aliquam in Patria ſua optarem, ubi mihi vicinior foret: ſed vel hinc intelligo, in *Anglia*, alibique, Mathemata pluris æſtimari quam hîc loci; quod ille apud exteros commorari malit, quam in Patria, in qua omnibus bonis abundat. Fratrem ejus *Johannem Chriſtophorum*, qui natu major eſt, familiariter novi *Genevæ*: tanto autem judicii acumine non gaudet ac *Nicolaus*; hinc practicis magis delectatur quam theoreticis: nihilominus fundamenta peritioris Geometriæ à me *Genevæ* edoctus, nunc paulo diligentius noſtram colit: hunc in finem, quas ipſi feceram Lectiones ſedulo conſcripſit, ut volumen ſatis amplum efformarent. Cum *Pariſiis* agerem, inter alios Mathematicos intimum mihi reddidi Dnum. Varignonium, cui auctor extiti, ut ineffabilem voluptatem caperet ex Tuo differentialium calculo, teſtibus litteris nuper ad me datis, in quibus ita erumpit: *Je ne ſaurois dutout perdre de vuë le charmant & merveilleux calcul differentiel de M.* Leibnitz, *de ſorte qu'il ſe paſſe peu de jours, que je n'en faſſe quelque choſe: devinez, ſi, avec cet invincible penchant, j'ai pu lire ſans tranſport les* Actes de Leipſic *de l'Année paſſée qu'on m'a prêté il y a quelques jours*, &c. Alii inſuper quam-plures *Galliæ* Mathematici imbiberunt principia hujus calculi, qui cum ante meam peregrinationem Gallicam neutiquam innotuiſſet, nunc (abſit jactantia dictis) ibi paſſim inclareſcit. Hinc vides, Vir Celeberrime, mihi ſemper ſummæ curæ fuiſſe, ut inventa Tua, tam utilia, propalarem noviſque propagarem; non melius

Digitized by Google

melius talentum meum collocaſſe credens, quam ſi aliis prodeſſe potuiſſem; non enim nobis, ſed aliis ſumus nati, quod ſæpiſſime ex ore Malebranchii audivi. . . . . 1695 Januar.

. . . .

Quid Dnus. De Tschirnhaus agat ſcire percuperem: miror nunquàm amplius in *Actis* apparere. Injurius es, tam in Te ipſum, quam in totum Orbem literatum, quod Opus Tuum *de Scientia infiniti*, quod ſub manibus habes, eidem diutius invides: Si quando publicatum fuerit, poſſem aliquas notulas, in modum Commentarii adnectere, ſi ita viſum Tibi; ipſum enim Opus jam per Te ſatis completum erit. Scretam audio mortuum. Ottius, qui de vitiis oculorum ſcripſit, fuit ſenator Scaphuſianus, ... nunc autem extra urbem in ſuo prædio particulariter vivit. Vale & Fave.

Ampliſſimi Tui Nominis

Cultori ſtudioſiſſimo

J. Bernoulli.

EPIS-

EPISTOLA VIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Valetudinis ſuæ rationem reddit. De curva æquilibrationis. Nemo ſibi natus eſt. De Jacobo BERNOULLIO. *Series ſummatoriæ.*

Nobiliſſime & experientiſſime Domine Fautor Honoratiſſime.

1695 Febr. UTinam quam gratæ ſunt mihi Tuæ, imo proficuæ, poſſem ego viciſſim referre par pari: ſed tot laboribus diſtrahor, & valetudine ſum tam dubia, ut cogar attentiores meditationes præſertim abſtractas fugitare, quantum poſſum. In æſtate 1693 febri tentatus fueram: ſuperiori æſtate, pro febri, cujus jam initia aderant, venere mirabiles quædam phlogoſes, ut nulla ſtatuta hora, jam a multo tempore, pleriſque diebus ſentiam extraordinarium quemdam dolorem, blandum quidem & nulla ratione moleſtum, timendum tamen in futurum; præſertim cum illis, qui me aliquandiu non videre, viſus ſim macilentior factus, ipſe jam ſum ſatis natura macilentus. Porro calor ille inprimis acriore meditatione manifeſtiſſime excitatur; quæ res facit, ut ægrè ad problemata ſolvenda accedam, optemque ſaltem perficere atque in ordinem redigere poſſe dudum a me effecta; quid de tali effectu ſentias, noſſe velim. . . . .

. . . .

Pulcherrima mihi profecto Tua feriei obtinendi ratio viſa eſt, quam in *Actis* * explicuiſti, & inexpectata.

Fateor & ego, nec mihi occurrere rationem x^x ſummandi, niſi per ſeriem; & ſummationem terminorum numero finitorum progreſſionis harmonicæ (nam ſi infinitus ſit numerus, & ſumma infinita

* Act. Erud. 1694. Nov. p. 437. vel Opp. Tom. I. N°. XXI. pag. 125.

finita eſt,) non poſſum exhibere, niſi forte per approximationes. 1695 Febr.

Elegantiſſimum eſt Problema *Hoſpitalianum*, cum augmento tuo.* Utinam me quoque in talibus excercere liceret. Nunc quidvis potius cogitare cogor. Nolim tamen hoc interpreteris, quaſi ego jactem, me ſtatim iſta ſolvere poſſe, ſi attingerem. Nam eo ſum ingenio, ut gaudeam me a vobis ſuperari, cum ſcientiæ profectu. Idem dico de Tuo Problemate circa vim centrifugam. Et gratiſſimum erit Veſtro beneficio intelligere tales ſolutiones.

Ingratus ſim, ſi non agnoſcam quantum Tibi debeam, quod plurimum ad meditationes meas qualeſcunque, apud egregios Viros, *Pariſiis* & alibi commendandas, ſuffragio & exemplo Tuo conſuluiſti; aut ut verius dicam, quod illis ex ingenio Tuo, uſuque feliciſſimo, pretium addidiſti. Dnum VARIGNONIUM quoque noſtrorum guſtum habere, hactenus ignorabam. Noſſe velim quinam ſint alii, & an inter alios, ſit Dnus OZANAM, qui non admodum bene ſe erga me geſſit, † ut fortaſſe noveris.

Cæterum plane probo optimi MALEBRANCHII noſtri, quam memoras ſententiam; omnino occaſione ſimilia inculco, ut quiſque intelligat, ſe (quod jam & CICERO dixit,) ſibi natum non eſſe. Imo hoc meum dogma eſt, quanto quiſque ardentius ſinceriuſque quærat commune bonum, eo magis felicitati ſuæ conſulturum: quod ſane invictis argumentis oſtendi poteſt. Itaque laudo admodum, quod ad alios juvandos, augendaſque generis humani opes propenſum Te oſtendis; præſertim cum præ aliis plurimis facere operæ pretium poſſis.

Fratrem tuum egregiæ ſane doctrinæ Virum ſemper conatus ſum habere amicum & faventem; nec puto quicquam a me profectum, de quo queri poſſit. Neſcio quomodo tamen ille viſus eſt ſe ſubinde oſtendere, ſi non averſum, certe nonnihil alienum. Neque

* Opp. Tom. I. Nis. XXII--XXV. pag. 129--141.

† *Scil. Geometria, quæ inter reliquas* Curſus *ſui* Mathematici *partes, prodiit* Pariſiis A°. 1693. in 8°. *inſeruit* OZANAM, *pag.* 163. ſeq. *Quadraturam Circuli* Leibnitianam, *fere verbotenus, ex ejus* Opuſculo Quadraturæ Arithmeticæ *deſumptum, ne nominato quidem* LEIBNITIO. *Vid.* Epiſt. *ſequentem* ut & LXVIam. ac LXVIIam.

1695 Febr. vero illa deſigno, quæ aliquando objecit in *Actis*; id enim ſummo jure poteſt: ſed illud potius non potui non mirari quod ad litteras quaſdam meas, olim ſatis prolixe ſcriptas, quibus quæſitis ejus utcunque ſatisfaciebam, non reſpondit. Fateor ultra annum reſponſionem meam hæſiſſe; ſed hoc contigerat ob abſentiam: nam cum ejus litteræ huc veniſſent, ego in *Italiam* iveram, eaſque demum reverſus inveneram, & tunc quidem nullam feceram reſpondendo moram. Quæ ad ſchediaſma * ejus Junio ultimo inſertum † reſponderim, videris nunc haud dubie, gratumque mihi erit intelligere judicium Tuum.

De radiis oſculorum obſervabis, quomodo ex meo calculo differentiali reciproco (ubi x & y conſiderantur ut indifferentiabiles,) talia multo generalius & tribus verbis deriventur. Dedi etiam conſtructionem Iſochronæ per rectificationem curvæ ordinariæ, ſed Veſtra conſtructio poſtea data †† eſt ſimplicior. Notavi etiam per quodvis datum punctum duci poſſe talem Iſochronam; non, ut illi viſum, unicam eſſe; eadem ſcilicet altitudine lapſus primi. Denique ea occaſione addidi aliquid de controverſia inter illum & me, circa numerum radicum in caſu oſculi; quin & explicui modum generalem per polygona, ſeu appropinquationem, conſtruendi curvam ex data tangentium proprietate, ſeu æquatione differentiali, diverſiſſimum ab eo quem poſtea vidi a Te datum. ** Tuum notavi derivari ex ea conſideratione, quod, data tangentium curvæ quæſitæ proprietate, ordinatim poſitione dantur infinitæ numero curvæ ipſi quæſitæ occurrentes in punctis, ubi curvæ, ſeu tangentis ejus inclinationes, ſive anguli ad axem dantur. Hanc rem ſæpe

* J. B. *Curvatura Laminæ Elaſticæ*, &c. Acta Erud. 1694. Jun. 262. Jac. Bernoulli Opp. N°. 58. pag. 576. Ejuſdem *ſolutio Problematis* Leibnitiani *de Curva acceſſus & receſſus æquabilis a puncto dato.* &c. Ibid. pag. 277. Jac. Bernoulli Opp. N° 59. pag. 601.

† G. Gl. *Conſtructio propria Problematis de Curva Iſochrona Paracentrica.* Ibid. Aug. p. 364. Jac. Bernoulli, Opp. N°. 64. pag. 627.

†† Joh. Bernoulli *Conſtructio facilis Curvæ receſſus æquabilis a puncto dato, per rectificationem curvæ Algebraicæ.* Ibid. Oct. p. 394. Joh. Bernoulli Opp. T. I. N°. XIX. pag. 119.

** *Modus generalis conſtruendi omnes æquationes differentiales primi gradus, Auctore* Joh. Bernoulli. Ibid. Nov. p. 435. Opp. Tom. I. N°. XX. p. 123.

Digitized by Google

pe conſideravi, ut viderem an aliquid inde poſſem ducere, & videtur adhuc nonnihil ſubeſſe nondum ſatis exploratum. 1695 Febr.

Æmulationem Fraternam notatam in *Actis* putabam nihil prorſus affectui mutuo officere. Sed homines ſumus, difficileque eſt æquo animo ferre, ut alii nos præcurrant, vel ſaltem æquent, qui longiſſime antea poſt nos fuerunt. Quod ego æquius animatus ſum, cauſa fortaſſe eſt diverſitas materiarum, in quibus habeo campum exercendi me, conſolandique. Sunt enim in quibus ſperem præſtare aliqua Calculo differentiali non inferiora, ſi vel ſanitatem, vel auxilia amicorum mihi ſpondere poſſem. . . . .

Quod ſcopum nos videndi propius conſecuti non ſumus, forte ambo nonnihil in cauſa ſumus; dum non ſatis omnia prolixè utrinque expoſuimus. Quid! ſi alia ſeſe aliquando offerat non inferior occaſio. Noſſe velim, an, quam in Tuis memoras, pacem *Europæ* ſis neceſſario expectaturus. Hoc anno vix audebo manum admovere meæ *ſcientiæ infiniti*; nam alii a me labores exiguntur Superiore juſſu. Ubi habebo delineatam, Tuis animadverſionibus libentiſſime ſubmittam. Vale & fave

Hanoveræ 28. Febr. 1695.

Cultori ſtudioſiſſimo

Leibnitio.

P. S. Tametſi plane conſtituiſſem temperare mihi nonnihil valetudinis cauſa ab analyticis meditationibus, non potui tamen impetrare a me, quin pulcherrimam illam rationem, qua ſeriem generalem indagaſti, conſiderarem attentius. Quo facto vidi, altero termino deſtructo, ſimili methodo talem ſeriem haberi:

Poſito $ddz = 0$ Nota d^2n eſt ddn, d^3n eſt $dddn$, $\int n = \int(dzn)$ & $\int\int n = \int(dz(dzn))$, poſito $dz = 1$

1695 Febr. $\int(z^e d^m n) + e\int(z^{e-1} d^{m-1} n dz) = z^e d^m n$

$$- edz\int(z^{e-1} d^{m-1} n) - eedz\int(z^{e-2} d^{m-2} ndz)$$

$$= - ez^{e-1} d^{m-1} ndz$$

$$+ eedz\int(z^{e-2} d^{m-2} n) + e^3 dz^2 \int(z^{e-3} d^{m-3} ndz).$$

$$= + e^2 z^{e-2} ndz^2 e$$

Ergo

$$(1)\int(z^e d^m n) = z^e d^m n - ez^{e-1} d^{m-1} ndz + e^2 z^{e-2} d^{m-2} ndz^2$$

$$- e^3 z^{e-3} d^{m-3} ndz^3, \text{ \&c.}$$

ubi notandum, poſſe quidem e eſſe numerum non integrum, ſed m ſemper integrum eſſe; niſi quis adinſtar metaphyſicarum potentiarum (ſeu Logarithmorum) etiam metaphyſicas neſcio quas differentias (vel ſummas) fingere vellet.

Etſi autem ſic exhauriri m videatur, poſito eſſe integrum affirmativum, non tamen hoc fit, nam $d^0 n = \int^0 n = n$ & $d^{-1} n = \int^1 n$ & d^{-2} eſt $\int\int$ ſeu $\int^2$.

Hinc, poſito exempli gratia $m = 1$, & poſito eſſe $dz = 1$, ex æquatione (1), fit (2) $\int z^e dn = z^e dn - ez^{e-1} n + e^2 z^{e-2} \int n - e^3 z^{e-3} \int\int n + e^4 z^{e-4} \int^3 n$ &c. & (3) $\int z^e ddn = z^e ddn - ez^{e-1} dn + e^2 z^{e-2} n - e^3 z^{e-3} \int n + e^4 z^{e-4} \int^2 n$ &c.: ex quibus etiam intelligitur, quam apte ponatur ſumma differentiis reciproca, adeoque ſumma ſummarum reciproca differentiis differentiarum. Idem ex ſeriebus patet in infinitum decreſcentibus

Termini a, b, c, d, e, &c. ſummæ

Differentiæ l, m, n, p, q, &c. Termini

Nempe l diff. inter a & b; m diff. inter b & c, & ita porro.

Sed a ſumma $l + m + n$ &c. & b ſumm. $m + n + p$, &c. & ita porro.

Unde Tibi deliberandum relinquo, annon, pro Integralibus veſtris, præſtet in poſterum, uniformitatis & harmoniæ gratia, non inter

Digitized by Google

Inter nos tantum, ſed & in ipſa doctrina, adhiberi Summatorias expreſſiones; ita ut, exempli gratia, $\int y\,dx$ ſignificet ſummam omnium y in dx reſpondentes ductorum, ſeu ſummam omnium hujuſmodi rectangulorum: præſertim cum, tali ratione, ſummationes geometricæ, ſeu quadraturæ, optime cum arithmeticis, ſeu ſerierum ſummis conferantur. Nolim tamen vobis præſcribere quicquam; ſed tantum ejus, quod maxime rationi conſentaneum videbitur, putem rationem maxime habendam. Ego certe in totam hanc methodum me fateor, ex hac conſideratione reciprocationis inter ſummas differentiaſque, incidiſſe; & a Seriebus numerorum ad linearum, ſeu ordinatarum, conſiderationes proceſſiſſe. 1695 Febr.

Unum addam, quod etiam hanc reciprocationem confirmet. Si ponamus in æquatione (1) m eſſe numerum negativum ſeu $m = -r$; fore $d^m = \int^r$ unde ex æquatione (1) fiet (poſita $dz = 1$.) (4) $\int(z^e \int^r n) = z^e \int^r n - e.z^{e-1} \int^{r+1} n + ee.z^{e-2} \int^{r+2} n - e^3.z^{e-3} \int^{r+3} n$, &c. ſemper tamen Series tales infinitas ita decreſcere intelligendum eſt, ut termini continuando fiant quibuſvis datis minores. Venere etiam nonnulla adhuc in mentem, quæ te rogarem. In celſiſſimi Principis *Abbatis St. Galli* Bibliotheca, extare Chronicon ALBERICI *Monachi Trium fontium* in litteras relatum eſt. Ita enim VOSSIUS narrat in libro *de Hiſtoricis latinis*: Habemus idem in his regionibus ab anno 960 incluſive, uſque ad finem, ſeu annum 1241; ſed deſunt præcedentia ab initio mundi uſque ad annum 960; minus quidem neceſſaria, quia antiqua melius in aliis habentur, ſed quæ tamen ſuppleri deſideramus. Similiter habemus Hiſtoriam JOHANNIS *Vitodurani*, quæ itidem in Monaſterio *S. Galli* extare dicitur. In noſtro codice habentur quidem omnia ab initio, ſed deſunt poſtrema ab anno 1277 ad annum 1348, in quo finire ſcriptor dicitur. Obſtringeres me Tibi magis magiſque, nec mediocriter, ſi è vicinia, per amicum aliquem, apud Celſiſſimum & Reverendiſſimum Principem, vel ſaltem Monaſterii illius principalis Bibliothecarium, deſcriptionem noſtris ſumptibus impetrares.

Digitized by Google

Cui ſi ſimile beneficium addi poteſt, per aliquem amicum cui occaſio eſſet, ſollicitandi pro me Dnum. *Abbatem* Boisot, qui abbatiæ *S. Vincentii* prope *Veſontionem* præeſt, ut mitteret, quorum ſpem fecit; cumulus accederet his deſideratis meis. Iterum Vale.

EPISTOLA IX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De illius infirma valetudine, Malebranchii *remedio univerſali, Sorici ſumatoriæ correctione. Spatiis quadrabilibus. De quibuſdam Mathematicis Gallis. Dnus.* Chirac *Calculi infiniteſimalis diſcendi cupidus. De curvarum oſculo. De* Graigio & Tschirnhausio. *De Profeſſione mathematica apud Batavos vacante.*

1695 April. Tarde quidem ad venerunt poſtremæ Tuæ, quod forſan moram fecerunt *Lipſiæ*; maturè tamen ſignificatrices fuere vacillantis Tuæ valetudinis, de qua non ſum parum anxius. Optimus Deus avertat mali incrementum, faxitque ut hæ præſentes priſtinæ exoptatæque ſanitati te reſtitutum offendant. Non eſt inſolens, quod qui febre laborarunt, ſi non radicitus curetur, ſingulis annis novos & inordinatos paroxyſmos ſentiant; eandem forte ob rationem, ob quam vina quandoque, præſertim tempore vindemiarum, de novo ebullire & fermentari deprehendantur. Sic nullus dubito, reliquias febriles in corpore tuo adhucdum hoſpitari, quæ cum manifeſtum paroxyſmum producere non valeant, excitant ſaltem phlogoſes illas mirabiles. Illis itaque tempeſtive remediis idoneis occurrendum, ne, quod multoties accidit, quartanam, vel etiam hecticam, poſt ſe trahant. Interim à vigiliis & occupationibus nocturnis omninò abſtinendum, & recte facis quod attentiores meditationes fugitas; nihil enim eſt, quod humores pravos, tarta-

tartareos, & viſcidos, alimentum nempe febrium intermittentium 1695 April.
magis foveat & cumulet, cruditates pariat & coctionem impediat: diſſipant enim laudabiles, tenuiores & ſpirituoſas humorum partes, craſſiora vero ſedimenta relinquunt. Hic autem medicum agere nolim; habetis enim, haud dubie, expertos practicos, quos conſulere poteris. Memini, cum *Pariſiis* agerem, P. Malebranchium, qui etiam natura eſt valde macilentus ſed procerus, ſimili fere affectu aliquandiu laboraſſe; is ſibi ipſi eſt medicus, & mirabilem medendi methodum habet: quemadmodum enim unicam cauſam primariam omnium morborum, depravationem nempe maſſæ ſanguineæ, ſtatuit; ſic unicum remedium, idque ſimpliciſſimum, agnoſcit: Quotieſcunque ægrotat, ſingulis mane jejunus ingurgitat magnam quantitatem aquæ fontanæ puriſſimæ; incipiendo primis vicibus à minori, & poſtmodum augendo numerum hauſtuum, ad-inſtar acidularum, ad duas vel tres uſque menſuras Pariſienſes: aqua autem non debet eſſe calida, ne nauſeam moveat, niſi forſan ventriculum data opera per vomitum purgare velit, nec etiam debet eſſe frigida, ne fibrarum ſtomachalium & inteſtinalium tono noceat; ſed eam nonnihil tepidam aſſumit. Principium, quo nititur; non adeo abſurdum eſt; cum enim aqua omni ſapore careat, debitam habeat conſiſtentiam, nec nimis craſſam, nec nimis fluidam, idoneam eſſe dicit, ad omnia ſanguinis vitia corrigenda, dum ejus particulas acriores infringet, nimis craſſas & viſcidas diluet; nimis tenues & volatiles coercebit, tandemque omnem materiam morbificam abſterget, & per urinam educet. Et revera per iteratam iſtam potationem aquæ omnino ſe liberaverat à moleſtiſſimo affectu à quo detentus fuerat, mihique affirmavit ſe nullo alio remedio per totam vitam uſum fuiſſe. Poſtea ab Ill. Hospitalio intellexi, conjugem ſuam eodem hoc remedio ab angina & inflammatione faucium curatam fuiſſe. Quantum ad me, nemini id conſulerem, niſi prius complexionem ſuam probe exploratam haberet, & ſecurus eſſet vires ſuas tot aquis perferendis pares eſſe, alioquin natura quaſi ſuccumbere & ſuffocari poſſet; præſertim ſi non eadem quantitate ſtatim per urinam redderentur.

Cum Tua mihi ſit carior ſanitas quam mea; ei hac vice rebus mathe-

1695 April mathematicis non ero moleſtus: id ſaltem monebo, quod in Tuis ultimis annotavi. Egregia ſunt quæ ex ratione mea ſeriem generalem indagandi deduxiſti; mihi ſufficit, ſi inventa mea, ut ut tenuia, magnis viris occaſionem dederint ad majora: Interim in calculo tuo lapſum reperio, quem haud dubie præcipitanter commiſeris: quique facit ut ſeries pro $\int(z^e d^m n)$ ſit longe alia & notabilior, quam ipſe putaveris. Ut diſcrimen videas, calculum Tuum hic repeto. Poſito $ddz = 0$

$$\int(z^e d^m n) + e\int(z^{e-1} d^{m-1} ndz) = z^e d^m n$$
$$- edz\int(z^{e-1} d^{m-1} n) - eedz\int(z^{e-2} d^{m-2} ndz)$$
$$= - ez^{e-1} d^{m-1} ndz$$
$$+ eedz^2\int(z^{e-2} d^{m-2} n)$$
$$+ e^3dz^2\int(z^{e-3} d^{m-3} ndz) = + e^2z^{e-2} d^{m-2} ndz^2.$$

Ergo

$$\int(z^e d^m n) = z^e d^m n - ez^{e-1} d^{m-1} ndz + eez^{e-2} d^{m-2} ndz^2 - e^3z^{e-3} d^{m-3} ndz^3 \ \&c.$$

Hæc, meo judicio, ita corrigi debent. Poſito $ddz = 0$

$$\int(z^e d^m n) + e\int(z^{e-1} d^{m-1} ndz) = z^e d^{m-1} n$$
$$- e\int(z^{e-1} d^{m-1} ndz) - e.\overline{e-1}\, dz.\int(z^{e-2} d^{m-2} ndz) = - e.z^{e-1} d^{m-1} ndz$$
$$+ ee-1dz\int(z^{e-2} d^{m-2} ndz)$$
$$+ e\overline{e-1}.\overline{e-2}\,dz^2\int(z^{e-3} d^{m-3} ndz = + e.\overline{e-1}\, z^{e-2} d^{m-2} ndz^2$$

Ergo vera Series

$$\int(z^e d^m n) = z^e d^{m-1} n - ez^{e-1} d^{m-2} ndz + e.\overline{e-1}.z^{e-1} d^{m-3} ndz - e.\overline{e-1}.\overline{e-2}\, z^{e-3} d^{m-4} ndz^3 \ \&c.$$

Unde

Digitized by Google

Unde liquet, ſi e ſit numerus integer & affirmativus, quantitatem 1695 $z^e d^m n$ (quod memorabile prorſus eſt) eſſe ſummabilem: eo April enim in caſu e exhaurietur, proindeque ſeries abrumpitur, & fit finita; id quod per Tuam non fieret: oportet autem ut m ſit major quam e: ſecus enim unus vel plures ſeriei termini involverent ſummas ipſarum n; quia tunc d^{-1}, d^{-2}, d^{-3}, &c., degenerant in $\int$, $\int\int$, $\int^3$; &c. ceu Tu ipſe annotaſti. Hinc poſito, exempli gr. $e = 1$, $m = 2$, & $dz = 1$, erit $\int z\,ddn = zdn - n$, & poſito $e = 1$, $m = 3$, erit $\int zdddn = zddn - dn$, & poſito $e = 2$, $m = 3$, erit $\int zzdddn = zzddn - 2zdn + 2n$, quod etiam olim *Pariſiis*, ſed alia via inveneram, & Dno. HOSPITALIO, tanquam ſingulare quid communicaveram. Hinc etiam inſignes proprietates, circa quadraturas ſpatiorum eliciuntur. Data, ex. gr. (*Fig.* 8.) curva quacunque AB, ſive Algebraïca, ſive tranſcenden- TAB. II. te, ſive etiam libera manu ductâ, ſi ad illius axem AC conſtruatur alia curva AD, cujus ordinatæ DC ſint in ratione compoſita ex abſciſſis AC ad poteſtatem quamcunque elevatis, & differentiis cujuſcunque gradus (ad minimum unitate excedentes numerum poteſtatis) applicatarum BC: dico ſpatium curvilineum ADC ſemper eſſe quadrabile. Cæterum, quod nomenclationem differentialium ſummæ attinet, lubentiſſime pro Integralibus noſtris Tuas in poſterum adhibebo Summatorias expreſſiones; quod diu ante feciſſem, ſi nomen Integralium non adeo invaluiſſet apud quoſdam Geometras, qui me hujus nominis authorem agnoſcunt; ut ſatis obſcurus viſus fuiſſem, unam eandemque rem, nunc hoc, nunc alio nomine deſignans. Fateor enim nomenclationem iſtam (quæ, conſiderando differentialem tanquam partem infiniteſimam totius vel *integri*, mihi non ulterius cogitanti, venit in mentem) rei ipſi non apte convenire.

Non memini me unquam vidiſſe Dn. OZANNAM, niſi forſan in conferentiis apud P. MALEBRANCHIUM hebdomadatim haberi ſolitis: eo enim tempore quo *Pariſiis* agebam, verſabatur totus in practicis, quibus non admodum delectabar. Quid Tibi rei cum illo fuerit plane ignoro, & noſſe percuperem. Hoc ſcio, quod

1695 April. in compendio ſuo Geometriæ practicæ methodum tradit quadrand circulum per Seriem, quæ methodus, ni fallor, Tua eſt; ejus verò inventionem ſibi arrogavit. Alii, quos noveram, Mathematici, qui noſtris delectabantur, non ſunt celebres per litteras, adeoque neſcio an Tibi ſint noti: inter alios fuerat P. BYSANCE, ordinis qui vocatur *Oratorii*, cujus etiam eſt MALEBRANCHIUS: is in juventute a Mahometano Chriſtianus factus eſt, huncque ordinem adoptavit. Cum apud Dn. *Marchionem* HOSPITALIUM in Arce ſua prope *Bleſium* ſita commorarer, viſum nos venerat. P. REYNEAU, ejuſdem ordinis, Profeſſor Mathematum *Angerienſis* & PRESTETI ſucceſſor, qui mirum quantum delectamenti capiebat ex paucis quæ ipſi oſtenderam de differentialibus: hoc calculandi genus ipſi omnino inſolitum & divini quid in ſe continens videbatur. Dn. *Abbas* CATELANUS talia ſcire etiam valde geſtiit, quem autem frequentare non curabam, quia tum temporis in diſſidio fuerat cum Dn. HOSPITALIO, ob librum quemdam, quem ille compoſuerat, * hic autem refutarat † ob plures quibus ſcatebat paralogiſmos & errores, quorum amplius non memini; nunc, ut audio, reconciliati ſunt.

Inter ſcribendum afferuntur mihi litteræ omnino ignotæ; quibus reſignatis, video nomen Dn. CHIRAC, Profeſſoris Anatomiæ Regii *Monſpelienſis*, nunquam mihi ante-hac noti; is Diſſertationem meam *de Motu muſculorum* legiſſe quidem, ſed, ob inuſitatum calculandi modum, maximam & præcipuam partem non intellexiſſe queritur, meque propterea, humaniſſimis verbis & multis in Calculum differentialem elogiis, rogat ut ex quibus Auctoribus prin-

* *Logiſtique pour la Science generale des lignes Courbes, ou Manière univerſelle & infinie d'exprimer & de comparer les puiſſances des grandeurs* 12°. Paris. 1692.

† *Remarques ſur un Livre nouveau intitulé.* Principe de la Science generale des lignes courbes. Journal des Sçavans. 1692 15. Journ. du 21. Avr. pag. 257. Ed. de Holl.

Reſpondit CATELANUS in eodem Diario.

Memoire touchant une Methode pour les Tangentes des lignes Courbes &c 32. Journal du 18. Aouſt. pag. 557. Ed. de Holl.

Item,

Reponſe à quelques Objections contre un Ecrit intitulé Principe de la Science generale des lignes courbes. 36. Journ. du 25. Sept. pag. 636. Ed. de Holl.

Digitized by Google

1695 April

principia hujus calculi haurire poſſit, viamque qua ego ad illius cognitionem pervenerim ſignificem. En propria verba. *Il faut, s'il eſt poſſible, que j'entre dans cette Analyſe; mais comme je ſuis en pays, où malaiſément on trouve des Algébriſtes, voudriez-vous bien ajouter à la grace que je vous ai demandée celle de m'aprendre les routes que vous avez tenu pour arriver à la connoiſſance de cette excellente Methode. Que faire pour abreger le tems? Quels autheurs ſeront les plus propres?* &c. Quid ipſi hac ſuper re conſuleres noſſe vellem. Nulli, ut credo, Libri reperiuntur, qui de noſtro ſupputandi genere ex profeſſo agant. Integram autem Methodum ex *Actis* ediſcere velle difficile erit, dum pleraque abſque Demonſtrationibus ibi proponantur.

Litteras Tuas *Fratri* meo legendas exhibui...... Certus...... ſum *ipſum* propediem ad Te litteras daturum eſſe....... Veſtra Diſceptatio de Natura Oſculi, (1) me judice, mera eſt Logomachia, præſertim cum in indagatione longitudinis radii circuli oſculantis uterque conveniatis. Quid de verbis diſputandum, quando conſtat de re! Verum eſt ex Tuo Calculo differentiali reciproco (2) hunc radium paucis verbis derivari, non minus tamen expedi-

quibus etiam reſpondit Hospitalius.

*Reponſe de Mr. G*** ſur un memoire inſeré dans le 32. Journ. de cette année*, 41. Journ du 15. Dec. pag. 724. Ed. de Holl.

Et *Nouvelles Réflexions de Mr. G*** ſur la Réponſe a quelques Objections contre un Livre intitulé*, Principe &c inſerée dans le 36. Journal de cette Année, 42. Journ. du 22. Dec. pag. 736. Ed. de Holl.

(1) Videantur. G G. Leibnitii *Meditatio nova de natura anguli contactus & oſculi*, &c. Act. Erud. 1686. Jun. pag. 289.

Item, *Jac.* Bernoulli *additamentum ad Solutionem curvæ cauſticæ, una cum Meditatione de Natura evolutarum & variis oſculorum generibus.* Act. Erud. 1692. Mart. pag. 110. vel Opp. N°. 47. pag. 473.

Leibnitii, *Generalia de Natura linearum, anguloque contactus & oſculi* &c. Ibid. 1692. Sept. p. 440. vel Jac. Bernoulli Opp N°. 55. p. 543.

Jac. Bern. *Curvæ Dia-cauſtica* &c. *Natura oſculorum uberius explicata*, &c. Ibid. 1693. Jun. p. 244. Opp. N°. 56. p. 549.

Leibn. *Conſtructio propria Problematis de Curva Iſochrona Paracentrica*, &c. ſub finem Act. Erud. 1694. Aug. pag 374. vel Jac. Bern. Opp. N°. 64. p. 627.

Jac. Bernoulli *Explicationes Annotationes*, &c. Act Erud. 1695. Dec. p. 542. à medio ad finem. Opp. N°. 66. pag. 647.

Leibn. *Addenda ad ſchediaſma menſi Julio inſertum.* Ibid. 1695. Aug. pag 372. verſus medium.

(2) Act. Erud. 1694. Aug. pag. 365. vel Jac. Bernoulli Opp. N°. 64. p. 627.

Digitized by Google

1695 April te invenitur differentiando ipſas differentiales, hoc enim modo unica proportione eo pervenitur.

Optime notaſti, & ipſo Hugenio teſte, per quodvis punctum datum infinitas duci poſſe Iſochronas, (3) eadem ſcilicet altitudine lapſus primi, quod etiam affirmavi Nupero *Actorum* Februario; (4) ubi haud dubie jam videris meam ſolutionem Problematis *Hoſpitaliani* (5) & fraternam: (6) vellem ut examinares utra ſit ſuccinctior & naturalior, & etiam generalior. Judicium quoque Tuum exoptarem de Craigii tractatu novo, annon legitime objecerim ea quæ ibidem in *Actis* annotavi. (7) Non laudo quod ita graviter invehatur in Dn. Tschirnhausen; minus autem, quod hic illi anſam dedit: injurioſa enim litigatio viros bonæ educationis minime decet. Utique in modo conſtruendi generaliter æquationes differentiales per appropinquationem ſive polygona, (8) adhuc nonnihil deſidero, quod nondum ſatis eſt exploratum, & hoc eſt, quod publicationem ejus adhuc retardavit: diu enim ante in hanc ſpeculationem incideram: interim methodus quam inde deduxi determinandi curvam tranſeuntem per puncta flexuum omnium curvarum eidem æquationi differentiali ſatisfacientium non adeo invenuſta eſt; quam curvam oſtendi perpetuo eſſe algebraïcam.

Quod mihi in commiſſis dediſti ad amuſſim executus ſum: *Ad Veſontionem* ſcribi curavi, ut, per occaſionem Dn. Abbas Boisot promiſſorum Tuo nomine admoneretur. Et per amicum, cui cum Bibliothecario Monaſterii *S. Gallenſis*, nomine P. *Burchardo* Herr. commercium litterarum intercedit, eundem humaniter rogavi, ut eorum

(3) Act. Erud. 1694. Aug. p. 373. vel Jac. Bern. Opp. N°. 64. p. 635.

(4) Act. Erud. 1695. Febr. pag. 65. vel Joh. Bern. Opp. T. I. N°. XXIII. p. 138.

(5) Act. Erud. 1695. Febr. p. 59. vel Joh. Bern. Opp. T. I. N°. XXII. XXIII.

(6) Act. Erud. 1695. Febr. p. 65. vel Jac. Bern. Opp. Tom. I. N°. 63. pag. 624.

(7) Reſpondit Leibnitius in *Notatiuncula ad conſtructiones* &c. Acta Erud. 1695. April. p. 184. Joh. Bern. Opp. Tom. I. N°. XXIV. pag. 140.

(8) *Modus generalis conſtruendi omnes æquationes differentiales primi gradus. Aut.* Joh. Bernoulli. Act. Erud. 1694. Nov. p. 435. Opp. Tom. I. N°. XX. pag. 123.

eorum quæ Tibi deſunt deſcriptionem concedat. Non dubito quin eam facile impetraturus ſis: Eſt enim, ut mihi depingitur, vir officioſiſſimus & comitatis plenus. Interim, ſtatim ac quid reſcivero, Tibi notum faciam. *1695 April*

Dn. *Marchio* Hospitalius nuper de Profeſſione Mathematica, vacante in *Hollandia* ſcripſit, quam mihi procuraturum ſperat: ipſi reſpondi, ut conditiones atque circumſtantias hujus Profeſſionis, & in quo loco ſit, mihi quantocyus reſcriberet: etenim mihi deliberandum eſt, an conditio ſufficiens ſit, ut cum uxore illuc abeam.

Vale & Fave

Tui celeberrimi Nominis Cultori
devotiſſimo

J. Bernoulli.

Digitized by Google

EPISTOLA X.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De conſenſu inter poteſtates & differentias. De Curvis maximi vel minimi proprietate gaudentibus. Tentamen Solutionis per ſeries infinitas. De curvis tranſcendentibus quarum infinita puncta aſſignari poſſunt. De Problemate Curvæ æquilibrationis. De methodo quadraturarum Craigiana. *De mechanica æquationum differentialium conſtructione. De Profeſſione mathematica.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1695 Maii MUltum Tibi debeo, quod in mei gratiam *Veſuntionem* & ad *ſanGallenſis* Monaſterii Bibliothecarium P. HERR. ſcribi curaſti; quanquam de *Veſuntione* verear ne fruſtra mihi aliquid promiſerim, quoniam Dominum *Abbatem* BOISOTIUM obiiſſe ex *Gallia* nuper intellexi. Gratias etiam ago, quod valetudinis meæ curam Tibi eſſe teſtaris, perſcriptis ad me monitis minime vulgaribus, neque ſpernendis; de quibus cogitabo diligentius. Omnino enim tempus eſſe video, ut majus aliquod malum præveniam.

Recte correxiſti calculum meum. Nam dum feſtinabundus in chartam conjicio, quod litteras ſcribenti calculus ſuggerit, errorem admiſi, ſeriemque male expreſſi. Multa adhuc in iſtis ſummarum & differentiarum progreſſionibus latent, quæ paulatim prodibunt. Ita notabilis eſt conſenſus inter numeros poteſtatum a binomio, & differentiarum rectanguli; & puto neſcio quid arcani ſubeſſe. Exempli gratia

$(x+y)^1 = 1x + 1y$, vel $1x^1y^0 + 1x^0y^1$, $d^1xy = 1ydx + 1xdy$, vel $1d^1xd^0y + 1d^0xd^1y$

$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$. , $d^2xy = 1yddx + 2dydx + 1xddy$

$(x+y)^3$

$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, $d^3xy = 1yd^3x + 3\,dy\,a^2x + 3\,d^2y\,dx + 1\,xd^3y$ 1695 Maii.

$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$; $d^4xy = 1\,y\,d^4x + 4\,dy\,d^3x + 6d^2yd^2x + 4\,d^3y\,dx + 1xd^4y$ & ita porro.

Ubi perfectiſſimus eſt-conſenſus. Nempe ubi ab una parte ponitur $x^m\ y^n$, ab altera ponitur $d^m x d^n y$. Ita reſpondent ſibi x^2 & $y\,ddx$. Nam x^2 eſt x^2y^0 & $y\,ddx$ eſt d^0ydx^2. Nam $d^0y = y$. Atque ita realis quidam conſenſus inter potentiarum indices, ſeu Logarithmos, & noſtros differentialium quaſi-Logarithmos reperitur, qui etiam ad polynomia & multi-rectangula ſeu rectangula ſolida & ſuper-ſolida extenditur, ut ſi conferamus $(x+y+z)^m$ & $d^m xyz$. Quod ſi occurrat potentia ipſius x, ut $d^m x^2 y$, conſiderari debet ut rectangulum ſolidum xxy, conſentientibus eo caſu x & z; unde operæ pretium erit proſequi comparationem inter $(2x+y)^m$, exempli gratia, (ſeu $(x+x+y)^m$) & inter $d^m\ xxy$. Nam, ubi ſuccedit extractio, ſuccedet & ſummatio. Quin & $(x-y)^m$ & $d^m \frac{x}{y}$ ſeu $d^m xy^{-1}$ poterunt comparari. Imo videndum, annon in ſummationibus concipere aliquid liceat reſpondens radicibus irrationalibus, imo affectis. Excogitavi autem olim mirabilem regulam, pro numeris coefficientibus poteſtatum, non tantum a binomio $x+y$, ſed & a trinomio $x+y+z$, imo a polynomio quocunque, ut data potentia gradus cujuſcunque, verbi gratia, decimi, & potentia in ejus valore comprehenſa, ut $x^5y^3z^2$, poſſim ſtatim aſſignare numerum coefficientem, quem habere debet, ſine ulla Tabula jam calculata; quam conſiderationem puto huic quoque meditationi profuturam; eſt enim geneſis poteſtatum generalis.

Video & novam meditationem ſupereſſe circa maxima & Minima, materiam, nondum exhauſtam. Neque enim ſemper facile eſt Problema reducere ad Tangentium inverſam, ſeu differentiales. Exempli cauſa, in inquiſitione Catenariæ, ſi non per Theoremata mechanica aliunde noviſſemus, proprietatem tangentium ejus dari, reſpectu

1695 Maii TAB.II. pectu centri gravitatis, difficile fuiſſet obtinere lineæ conſtructionem, nempe (*Fig. 9.*) datis punctis A & C, & longitudine catenæ, vel funiculi AC; quæritur natura curvæ talis, ut AF ſit omnium poſſibilium minima. Hoc profecto Problema deberet analytice ſolvi poſſe, recta via; etiamſi ignoretur Tangentes AT & ET, concurrere in T, ſub G centro arcus AC vel aliquid ſimile. Quam ergo methodum adhibendam putas, ſi ipſum Problema in terminis propoſitis conſideremus.

Inter alias cogitationes hæc mihi in mentem venit, per quam Problema, ſaltem videtur poſſe reduci ad ſeriem infinitam: AB ſit x, & arcus AC ſit z & fiat (1) $z = ax + bxx + cx^3$, &c. & AF erit $\int xdz : z =$ minimo poſſibili. Et quia z longitudo curvæ eſt conſtans in omnibus diverſis curvaturis, ex quibus ea eligitur, per quam maximus centri gravitatis deſcenſus obtinetur; ideo etiam (3) $\int xdz =$ minimo; ſeu erit $\int x\,dz =$ (4) $\frac{1}{2}axx + \frac{2}{3}bx^3 + \frac{3}{4}cx^4$ &c. $=$ (5) m poſito m ſignificare minimum valorem. Sed quæruntur cœfficientes a, b, c; &c. Harum inventionem puto tentari poſſe, per unicam litteram quærendam e, unamque datam r, faciendo (6) $a = 10e + 11a$ (7) $b = 20e^2 + 21ea + 22aa.$ (8) $c = 30e^3 + 31e^2a + 32ea^2 + 33a^3$ & ita porro, ubi numeros 10, 11, 20, &c. adhibeo loco litterarum; præterea explicabo x, faciendo (10) $x = y + r$, cujus rationem poſtea dicam. Explicando jam æquationem (5) per (6), (7), (8), &c., & per æquationem (10), & ordinando ſecundum (y), habebo æquationem cujus forma eſt (11)... $y^0 + ...y^1 + ...y^2$ &c. $= m$. Hanc jam oportet differentiari, ſed ita ut ſola littera e in ipſa conſideretur, ut differentiabilis; ita habetur æquatio nova duodecima, in qua ſublata eſt m. Sed oportet etiam in ea tolli y, quod fit divellendo ipſam in tot æquationes deſtructitias, quot ſunt termini, quæ omnes, cum ſint ſecundum unam incognitam e, debent coincidere inter ſe, id eſt arbitrariæ 11, 12, 20, &c. ita explicandæ ſunt, ut quævis harum æquationum dividi poſſit per eandem æquationem finitam valorem ipſius e exhibentem; quo invento, ad ſeriem infinitam

nitam pro Curva quæſita perventum erit, ſed præſtaret ſi ſemper talia Problemata poſſent reduci ad æquationes differentiales. Cæterum niſi explicuiſſem x per $y + r$, vel ſimile, non potuiſſem inſtituere divulſionem, quia numeri ipſius æquationis (5) non fuiſſent ingreſſi calculum. Et in univerſum Artis foret, mihi nondum ſatis cognitæ, poſſe ſeriem infinitam revocare ad æquationem finitam differentialem cujuſcunque ea demum ſit gradus, quoties nempe res fieri poteſt. Nam dubito an ſemper ſit poſſibilis. 1695 Maii

Talia adhuc plura habeo deſiderata, ex quibus apparet quantum Analyſi adhuc deſit, cujus defectus ſupplere, ingenio Tuo inprimis dignum videtur; quemadmodum illud quoque cujus mentionem in *Actis* * injeci, cum de Iſochrona paracentrica nuper agerem, ut proſequamur illas curvas tranſcendentes, quarum puncta quotvis per communis Geometriæ conſtructiones inveniri poſſunt ad imitationem ſectionum anguli & rationis. *Integralium* appellatio mihi non diſplicet, & a me quoque interdum Tui imitatione adhibita eſt; plerumque tamen *ſummationis* vocabulo uti malo, quia magis luciferum eſt, & originem ipſam meditationis oſtendit.

Gaudeo intelligere, quæ Dominus Chirac Tibi ſcripſerit, & quæ de R. P. Reyneau refers. Domino Chirac nemo, credo, Te melius conſuluerit. Dnus. Catelanus minus ſincere egit, quemadmodum & Dnus. Ozanam. Ille enim Calculum differentialem; hic meam circuli ſeriem, pro parte cum percepiſſent, laureolam in muſtaceo quæſivere; cum nihil de ſuo addidiſſent. Catelanus vero, alioqui mihi contrarius, etiam mea hæc qualiacunque deprimere, ut audio, conatus eſt. Ante paucas ſeptimanas *Lipſiam* ſcribens adjeci ſchediaſma, Te quaſi invitante, ſed breviſſimum; † ibi notavi etiam ſine conſideratione centri gravitatis, uno velut momento, ad prædictam illam conſtructionem Tuam perveniri poſſe, ope ſolarum differentialium. Nam deſcenſus vel aſcenſus verticales ponderis & contra pondii ſunt elementa ordinatarum;

* 1694. Aug. pag. 366.-368. vel Jac. Bern. Opp. N°. 64. p. 635. & ſeq.

† G. G. L. *Notiuncula ad conſtructiones lineæ in qua ſacoma, æquilibrium cum pondere moto faciens incedere debet.* &c. Acta Erud. Lipſ. 1695. *April.* pag. 184. Joh. Bern. Opp. T. I. N°. XXIV. pag. 139.

1695 9 Maii rum; ut ergo maneat æquilibrium in motu, debent aſcenſus hi, vel deſcenſus, elementares, eſſe ponderibus reciproce proportionales. Ergo & ſumma eorum, id eſt, ipſæ ordinatæ; quæ eſt ipſiſſima conſtructio Tua.

Quod Dnum. CRAIGIUM attinet, notavi ea occaſione, veriſſimum mihi videri, quod terminus ſummator termini irrationalis debeat continere eandem irrationalitatem. Cujus rei demonſtratio, quam junxi, pendet ab hâc conſideratione generaliſſima, &, ni fallor, momentoſa; quod terminus integralis & differentia, vel ſumma & terminus, debent habere eundem numerum radicum, ſeu valorum; quoniam quivis valor termini ſuum habebit valorem differentiæ reſpondentem. Hinc etiam duxi conſiderationes, quibus multum contrahitur quadraturarum inquiſitio; ſed proſequi non vacavit, etſi talia dudum conſideraverim. Si Tibi aliquando vacabit eo advertere animum, libenter mittam qualeſcunque meas in eam rem conſiderationes. Notavi ſane ibidem oſculationes revocari ad differentias-differentiarum; Viſus tamen eſt uſus calculi reciproce differentialis hic non contemnendus.

Non miror, ſi diu preſſiſti conſiderationem Tuam æquationum differentialium mechanice conſtruendarum; † poſſum dicere me quoque ibi ſperaviſſe aliquid ad conſtructionem pluſquam mechanicam: Videbam ſcilicet generaliter, data æquatione differentiali primi caſus, dari curvas algebraïcas quæſitæ occurrentes in punctis, ubi curva quæſita inclinationes habet datas, ſeu angulum datum facit ad horizontalem, vel verticalem. Sperabam ergo motum excitare puncti per has curvas ſecundum leges inclinationis trajicientis; ſed nondum ſucceſſit. Res huc redit: Curvis ordinatim poſitione datis punctum ita per eas continuè trajicere, ut ubi illis occurrit, habeat angulos ordinatim datos ad horizontem. Hoc effecto, haberetur conſtructio omnium curvarum datarum per æquationem differentialem primi gradus.

Egregie notaſti, more Tuo, poſſe definiri lineam ordinatarum tranſeuntem per omnia puncta flexus omnium curvarum differentialitate

† *Modus generalis conſtruendi omnes æquationes differentiales primi gradus. Auctore* Joh. BERNOULLI. Acta Erud. 1694. Nov. p. 455. Opp. Tom. I. N°. XX. pag. 123.

litate eadem datarum; quin & poterit linea definiri tranſiens per omnia puncta maximæ earum vel minimæ latitudinis; nam, eo caſu, evaneſcunt differentiæ, angulusque nullus eſt, vel rectus; Eamque in rem complura notare memini; ſed non tamen ideo ipſum curvæ tranſcendentis quæſitæ punctum incognitum definitur; puto tamen aliquando rem ſucceſſuram, ubi conſtabit lineæ, exempli gratia, per omnia puncta maximæ latitudinis tranſeuntis, concurſum cum curva quæſita, cujus eſt ea latitudo, non interſectionem eſſe ſimpliciter, ſed contactum, vel oſculum, vel ſaltem eſſe anguli dati. 1695 Maii

Quod Dominus *Frater* Tuus in meis notavit circa numerum radicum oſculi, * non diſplicuit; nihil enim mihi gratius quam doceri; puto tamen vos non admodum diſſentire, ut Tute indicas, interim gratiſſimum erit judicium ſuper ea quæſtione Tuum. Officioſam ipſi a me ſalutem nuntiari peto.

Gaudeo Tibi aliquam conditionem offerri apud Batavos, quæ non contemnenda videtur. Scito me quoque nuper Illuſtriſſimo viro *Eberhardo* Dankelmano, intimo Potentiſſimi *Electoris Brandeburgici* Miniſtro, per amicum Te nominari curaſſe ad Profeſſionem Mathematicam novæ apud *Halas ſaxonum* Academiæ; reſcriptumque mihi eſt, dediſſe illum in mandatis, ut de Te, & fortaſſe apud Te quæreretur: quæ cauſa quoque eſt, ut hoc ad Te reſponſum maturandum putarim. Saltem ergo electionem puto habebis. Utrovis modo viciniorem Te habere gaudebo, ſi modo Tibi in ea re æque ac nobis conſulatur. Vale, dabam

Hanoveræ $\frac{6}{16}$ May. 1695.

Cultor ſtudioſiſſimus

Godefridus Guillelmus Leibnitius.

* *Vide* Epiſt. *præcedentem.*

Digitized by Google

EPISTOLA XI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De conſenſu inter poteſtates & differentias, atque inde promovendo Calculo integrali. De coefficientibus minorum poteſtatum inveniendis. De Curvis maximi vel minimi poteſtate gaudentibus. De maximis maximorum, vel minimus minimorum. De maximis numeris. De regreſſus puncto. De curvis tranſcendentibus per puncta deſcribendis. De quadraturarum methodo Craigiana. *De oſculis curvarum. De dynamica & viribus corporum. De Profeſſione* Groningenſi.

Vir Celeberrime & Ampliſſime Fautor Honoratiſſime.

1695 Jun. V*Eſontione* reſponſi nihil adhuc accepi, ſed cum ex poſtremis Tuis Dominum *Abbatem* Boisotium mortuum intellexerim, amplius haud ſollicitabo. Quid P. Herr reſcripſerit ipſe videas ex adjunctis hiſce ad Bibliopolam exaratis: Eſt ut opinor ſpecioſus prætextus, quo petitum Tuum honeſte declinet; quoniam forſan ex Bibliotheca ſui Principis deſcriptionem concedere non audet. Doleo ſane vicem meam, quod mea Tuis commodis inſerviendi promptitudo non ex voto ceſſerit; optime facis, ſi valetudini Tuæ conſulis: Deus det ut omnia proſpere cedant.

Nihil elegantius eſt quam conſenſus quem obſervaſti inter numeros poteſtatum a binomio & differentiarum rectangulo: haud dubie aliquid arcani ſubeſt. Nondum ſatis vacavit examinare an quid inde pro ſummationibus elici poſſit. Videtur tamen quantitatem propoſitam differentialem cujuſvis gradus ſummari poſſe, eam primo differentiando, & dein ſumendo tertiam proportionalem hujus novæ quantitatis differentialis ad differentialem propoſitam, conſideratis interim d, d^2, d^3, d^4, &c. tanquam quantitatibus algebraïcis, & non ut litteris tantummodo caracteriſticis. Sic, exempli gratia; tertia

tertia proportionalis d^3 ad dd erit d, & d^4 ad d^3 erit dd, & ita de aliis. In hunc finem eſto propoſita quantitas differentialis tertii gradus hæc $xd^3y + dxddy$, cujus ſumma invenienda ſit; differentietur ea, & habebitur $xd^4y + 2dxd^3y + ddxddy$; poſito pro x, d^0x; ſumatur tertia proportionalis $d^0xd^4y + 2dxd^3y + ddxddy$ ad $d^0xd^3y + dxddy$, quæ erit $d^0xddy = xddy$. Dico $xddy$ eſſe ſummam vel integrale quantitatis propoſitæ $xd^3y + dxddy$; quod quidem ante calculum primo intuitu patebat; non tamen incongruum eſt oſtendiſſe, quomodo per methodum eo perveniri poſſit. Nota, quod in hoc ſcrutinio litteræ ipſæ quæ alias quantitatem denotant x, y; non conſiderandæ ſunt ut tales, ſed dumtaxat quatenus determinant d, d^2, d^3, &c. Hoc modo quadratum ipſius d^3y non eſt d^3y^2, ſed d^6y: cubus ipſius d^3y non d^3y^3, ſed d^9y: Idem puta de multiplicatione, diviſione & extractione radicum $d^2y \times d^3y = d^5y$, $\sqrt[3]{d^6y} = d^2y$; item $\frac{d^2y}{d^2y} = d^0y = y$, & hac ratione $\frac{x}{x}$ non eſt $= 1$, ſed $= \frac{d^0x}{d^0x} = d^0x$; quoniam autem $d^{-m} = \int^{+m}$; erit exempli gratia $\frac{d^4y}{d^5y} = d^{-1}y = \int y$, & $\frac{d^3y}{d^2x} = d^3y\, d^{-2}x = d^3y\int^2x$: idem intelligendum ſi plures ſint indeterminatæ, x, y, z, &c.

1695. Jun.

Accidere poteſt, ceu prævideo, ut ſumma quantitatis differentialis propoſitæ, hoc modo inventa, exprimatur per ſeriem; tunc nempe quando propoſita differentialis non eſt ſummabilis. Exempli gratia ſummanda ſit $xd^3y + 2dxddy$; ſi differentiatur prodibit $xd^4y + 3dxd^3y + 2ddxddy$: Ergo tertia proportionalis hujus ad illam, more noſtro ſumpta erit $\frac{d^0xd^6y + 4dxd^5y + 4ddxd^4y}{d^0xd^4y + 3dxd^3y + 2ddxddy}$; inſtituta itaque diviſione continua, incipiendo a primo denominatoris membro, prodibit hæc ſeries $d^0xddy + dydx - d^0yddx + d^{-1}yd^3x - d^{-2}yd^4x + d^{-3}yd^5x$ &c. $= xddy + dydx - yddx + \int yd^3x - \int\int dy^4x + \int^3 yd^5x$, &c. quæ proinde æqualis eſt $\int(d^3y + 2dxddy)$ Alia invenitur ſeries incipiendo diviſionem ab ultimo membro, nimirum

1695 Jun. mirum hæc $2d^0xddy - d^{\overline{-1}}xd^3y + d^{\overline{-2}}xd^4y - d^{\overline{-3}}xd^5y + d^{\overline{-4}}xd^6y$ &c. vel $2xddy - \int xd^3y + \int\int xd^4y - \int^3 xd^5y + \int^4 xd^6y$, &c. adeoque priori æqualis eſt. Video me hic inter ſcribendum, & quidem ex inſperato, incidiſſe in methodum univerſalem ſummandi vel per, vel citra ſeriem, quantitatem differentialem cujuſcunque gradus; Video etiam infinita alia adhucdum abſcondita hic latere; ea autem eruere, & ſtudioſius excolere nunc non vacat: ita enim diſtractus ſum aliis his minime affinibus cogitationibus, ut mirer ſufficientem pro his attentionem mihi, neſcio qua inquietudine agitato, ſupereſſe.

Cœterum conſenſus quem obſervaſti inter $(x+y)^m$ & $d^m xy$, vel etiam inter $(x+y+z)^m$ & $d^m xyz$, non ſuccedit, uti putabas, ubi occurrit potentia ipſius x: Ratio operanti patebit; ſi enim comparatio fiat inter $(2x+y)^m$ ſeu $(x+x+y)^m$, & inter $d^m xxy$; locum illa non habebit, niſi confundatur ddx cum $dxdx$; id eſt, differentia ſecunda, cum quadrato differentiæ primæ dx. Sumatur, exempli gratia, poteſtas ſecunda ipſius $2x+y$, & differentia ſecunda ipſius xxy, habebitur $4xx+4xy+yy$, comparanda cum $2yxddx + 2ydxdx + 4xdxdy + xxddy$; quod fieri nequit; quia ibi tria tantum, hic autem quatuor diverſa membra reperiantur: ſin autem $4xx$ diſpeſcatur in duas partes $2xx$ & $2xx$, poterit prior conferri cum $2yxddx$, & poſterior cum $2ydxdx$; quia utrobique littera d cum x affecta bis reperitur: ſed, uti jam dixi, ddx & $dxdx$ ſumendæ ſunt pro quantitatibus homogeneis, ceu ſupra feci. Idem etiam ſentiendum de comparatione inter $(x-y)^m$ & $d^m \frac{x}{y}$ ſeu $d^m xy^{\overline{-1}}$; aliter enim quam conditione dicta non ſuccedit.

Regula mirabilis, quam Tibi eſſe ais pro inveniendis numeris coefficientibus poteſtatum, non tantum a binomio, ſed a trinomio, imo polynomio quocunque, fecit ut & ego aliquam tentarem; video enim ſummum ſuum uſum habere poſſe expedite elevandi quantitatem aliquam ad certam potentiam. Et reapſe, perluſtratis quibuſdam proprietatibus numerorum, aliqua illico mihi venit in mentem.

tem. Eſto enim polynomium quodcunque $s + x + y + z$, &c. *1695*
elevandum ad potentiam quamcunque r; quæritur cœfficiens ter- Jun.
mini $s^a x^b y^c z^e$, &c. Dico cœfficientem illum fore
$\frac{r.r-1.r-2.r-3.r-4 \ldots . a+1}{1.\ 2.\ \ 3 \ldots b \times 1.\ 2.\ 3 \ldots . c \times 1.2.3 \ldots e,\ \&c.}$ id eſt, productum omnium terminorum progreſſionis arithmeticæ, a numero poteſtatis multinomii incipientis & unitate deſcreſcentis, uſque ad numerum unitate auctum poteſtatis primi nominis, productum, inquam, hoc diviſum per productum omnium terminorum tot progreſſionum arithmeticarum unitate aſcendentium uſque ad numerum ſui reſpective nominis poteſtatis, quot ſunt reliqua, præter primum, nomina, dabit coefficientem quæſitum. Ubi notandum quod tædioſa diviſio & maxima pars multiplicationis evitari poteſt, deſtruendo ante operationem partes multiplicantes, numeratoris, quæ ſunt communicantes cum partibus multiplicantibus denominatoris. Exemplum ſumamus, quod Tu ipſe proponis: Quærendus nimirum coefficiens termini $s^5 x^3 y^2$ comprehenſi in valore trinomii $s + x + y$ ad decimam poteſtatem elevati: ſubſtituantur in formula generali valores, nempe pro r, 10; pro a, 5; pro b, 3; pro c, 2; habebitur pro coefficiente quæſito $\frac{10.\ 9.\ \overset{4}{\cancel{8}}.\ 7.\ \cancel{6}}{1.\ \cancel{2}.\ \cancel{3}. \times 1.\ \cancel{2}} = 10.\ 9.\ 4.\ 7 = 2520$. Si quadrinomii $s+x+y+z$, ad 20 potentiam elevati, quæratur numerus cœfficiens termini $s^8 x^6 y^4 z^2$, erit $= \frac{\cancel{20}.\ 19.\ \cancel{18}.\ 17.\ \cancel{16}.\ \overset{5}{\cancel{15}}.\ \overset{7}{\cancel{14}}\ 13.\ 12.\ 11.\ 10.\ 9}{1.\ \cancel{2}.\ \cancel{3}.\ \cancel{4}.\ \cancel{5}.\ \cancel{6} \times 1.\ \cancel{2}.\ \cancel{3}.\ \cancel{4} \times 1.\ \cancel{2}}$ $= 19.\ 17.\ 5.\ 7.\ 13.\ 12.\ 11.\ 10.\ 9 = 1745944200$. Gratiſſimum eſſet Tuam nunc videre regulam; ut experiri liceret, an inter ſe conſentiant. Tua fortaſſe ſimplicior erit; interim ſaltem, nec mea opus habet tabula jam calculata.

Nova Meditatio, quam affers, circa maxima & minima, mihi certe non eſt nova; quinimo prima fuerat ſpeculatio, per quam ſolutionem Problematis curvæ catenariæ tentaveram; ſed optatum ſucceſſum tum non aſſequutus, diu poſt, plenariam ſolutionem inveni; & quidem non ex proprietate tangentium ejus, reſpectu centri

1695 Jun. TAB. II. tri gravitatis, ſed ex eo quod infimum, vel aliud quodvis punctum B (*fig.* 10.) catenulæ, in E & F ſuſpenſæ, ſemper eandem vim firmitatis requirit, in quocunque demum alio puncto S ſuſpendatur. Conſule, ſi placet, ſchediaſma meum Actis anni 1691, * juxta Tuum & Hugenianum inſertum, & videbis inter proprietates, quas ibi recenſui, hanc ultimam: *Si ſuper* EF *infinitæ intelligantur deſcriptæ curvæ ipſi funiculariæ* EBF *æquales, illæque in rectas extendantur, & in ſingulis ſingulæ extenſæ punctis applicentur rectæ ipſis reſpective diſtantiis a linea* EF *æquales, erit omnium ſpatiorum, quæ ſic efficiuntur, illud, quod a funicularia gignitur, maximum.* Ex quibus luculenter apparet, me innuere voluiſſe, inter omnes curvas æquales ſuper linea data EF deſcriptas, funiculariam habere centrum gravitatis remotiſſimum ab EF, & conſequenter horizonti proximum. Hactenus, ut fatear, hujuſmodi Problemata inſolubilia mihi viſa fuere, & etiamnum videntur; nec mihi ratio Tua, ea ad ſeries reducendi, plene ſatisfacit. Videris enim unam eandemque litteram, nunc conſtantem, nunc differentialem ſupponere, quando dicis z longitudinem curvæ eſſe conſtantem, [quod volo, ſed certo modo conſideratam] & paulo ante ponis $z = ax + bxx + cx^3$, &c. quam ſeriem, [ideoque ipſam z] differentiaſti & multiplicaſti per x, eamque iterum ſummaſti ponendo $\int xdz = \frac{1}{2}axx + \frac{2}{3}bx^3 + \frac{3}{4}x^4$, &c. ex qua operatione ſimul apparet coefficientes a, b, c, &c. Tibi hucuſque fuiſſe conſtantes; poſtea vero eaſdem differentiabiles ponis, faciendo $a = 10e + 11a$, $b = 20e^2 + 21ea + 22aa$, $c = 30e^3 + 31e^2a + 32ea^2 + 33a^3$; ubi litteram e proindeque ipſas coefficientes a, b, c, &c. ut differentiabiles conſideras. Plura alia ſunt, quæ non ſatis capio; videtur etiam ſeries, quæ inde naſceretur, prolixiſſima: Ita ut optem Methodum Tuam applicatam videre in leviori quodam exem-
TAB. III. plo, quale eſt hoc. Invenire (*Fig.* 11.) naturam curvæ ABC, datæ longitudinis, ſuper recta data AC deſcriptæ, quæ cum recta data AC includit maximum ſpatium poſſibile ABCA. Demonſtrare poſſum

* *Solutio Problematis funicularii* &c. Acta Erud. 1691. Jun. pag. 274. Joh. BERN. Opp. Tom. I. N°. IV. pag. 50.

Digitized by Google

poſſum curvam A B C eſſe circularem; ſed per quam methodum analytice eo perveniendum ſit, ne minimum quidem lumen affulget. 1695 Jun.
Cæterum, multa olim circa maxima & minima obſervabam, quæ nondum animadverſa reperio, quæ tamen in poteſtate ſunt; quandoque nempe infinita maxima, vel minima, in eodem Problemate occurrunt, quorum illud quod maximum vel minimum eſt, [hoc eſt maximum maximorum, vel minimum minimorum] determinandum ſit: Ut ſi quæratur (*Fig.* 12.) triangulum, vel aliud polygonum A B C, omnium curvæ cuidam ellipticæ datæ inſcriptibilium, maximum. Tab.III. Ad hoc ſolvendum, video ſupponi debere duo puncta A & C data, ex quibus quærendum tertium B, ita ut duæ ductæ B A, B C faciant, cum data aſſumpta A C maximum triangulum, ſaltem eorum quæ ſuper data A C deſcribi poſſunt, verticem habentia in curva Elliptica: Et ſic triangulum A B C eſſet maximum ſimpliciter dictum, vel primi gradus. Poſtea pono unicum punctum A datum, & quæro alterum C, & ex hoc B; ita ut triangulum A B C ſit omnium maximorum maximum, vel maximum ſecundi gradus. Denique & ipſum A quæro, & ex hoc C, & ex hoc B, & habebo triangulum A B C omnium maximorum ſecundi gradus maximum vel maximum tertii gradus. Sic ſi loco trianguli, aliud quodvis polygonum, omnium in hoc ordine maximum, inſcribendum eſſet; haberetur maximum tanti gradus, quantus foret numerus laterum polygoni: Et hac ratione ſpatium ipſum Ellipticum eſt maximum gradus infiniteſimi. Eodem modo ſe res habet cum determinatione minimi polygoni curvæ ellipticæ inſcribendi.

Habeo & aliam ſpeciem maximorum & minimorum; nimirum quando quantitates non elementaliter, ſed ſaltatim creſcunt & decreſcunt; quod contingit in ſeriebus in quibus termini aliquouſque creſcunt, poſtea vero decreſcunt, vel contra; oporteat analytice maximum vel minimum terminum invenire, ut in hac $\frac{a}{b} + \frac{a.a+1}{b^2} + \frac{a.a+1.a+2}{b^3} + \frac{a.a+1.a+2.a+3}{b^4}$, &c. quæritur quotus ſit terminus minimus: Dico, ſi ſeries continuetur ut numerus ter-

Digitized by Google

1695 Jun. minorum ſit $b - a + 1$; fore duos ultimos terminos omnium totius ſeriei minimos: ſunt enim æquales.

Data progreſſione arithmetica, ab unitate incipiente, & eo modo diſpoſita quo hic vides; determinanda eſt generaliter ſeries tranſverſalis C, cujus ſumma ſit omnium maxima.* Sit numerus terminorum primæ ſeriei tranſverſalis $A = a$, numerus quotus ſeriei quæſitæ $= x$: dico x fore $= a + \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4})}$.

A	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
B	7 + 8 + 9 + 10 + 11
C	12 + 13 + 14 + 15
D	16 + 17 + 18
E	19 + 20
F	21

Si hæc quantitas eſt numerus rationalis & integer; erunt duæ ſeries tranſverſales maximæ æquales; nempe illa quæ inventa eſt, & quæ immediatè ſequitur: ſin vero quantitas inventa ſit numerus irrationalis, vel fractus; erit ille ſumendus integer qui proxime major eſt, & erit unica ſeries maxima. Eſto exempli gratia $a = 6$ erit $a + \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4})} = 6\frac{1}{2} - \sqrt{(14\frac{1}{4})}$; cujus numerus integer proxime major $= 3$: dico itaque ſeriem tranſverſalem tertiam C eſſe omnium maximam: Si $a = 30$, invenietur ſeries maxima eſſe decima tertia; & ſic quantuſcunque ſit numerus a, e veſtigio quaſi aſſignari poteſt, quota ſit maxima tranſverſalium ſeries; quod certe plures alii non reperirent niſi forſan mechanice, id eſt, operatione tædioſa, & ipſa formatione omnium numerorum.

Multa adhuc adducere poſſem, quæ olim circa maxima & minima meditatus fueram, quæque non contemnenda videntur. Et ſane, non ita pridem, hujuſmodi materia commercium litterarium, quod mihi cum Domino HOSPITALIO intercedit, diu ſatis alebat;

* *Vid.* Joh. BERNOULLI Opp. Tom. IV. N°. CLIII. pag. 27.

bat; ubi inter alia videmus, quod in vulgari differentialium metho- 1695
do, differentiale maximi vel minimi non ſemper ſit nihilo æquale Jun.
faciendum; cum quandoque poſſit eſſe infinitum, imo in quavis ratione cum cæteris differentialibus. Oſtendi enim poteſt curvas illas (*Fig.* 13.) ABC [quas ego Gallice *courbes rebrouſſantes*, & Tab.III.
punctum B *point de rebrouſſement* nuncupo, in quarum cenſu habetur parabola cubicalis ſecunda] habere maximam applicatam BD, cujus elementum, vel differentiale, non ſolum eſt infinitum, ſed ſimul in quavis alia ratione, cum differentiali abſciſſæ AD; quod cuipiam paradoxum videretur. Notavimus etiam, ut id obiter innuam, in puncto flexus curvarum, radios circulorum oſculantium non ſemper eſſe infinitos, ut hactenus creditum eſt, & ut Tute alicubi in *Actis* ſupponere videris; dantur enim curvæ, ubi evidentiſſime demonſtrari poteſt, quod radius circuli oſculatoris, in puncto flexus, omnino evaneſcat. Interim & hoc verum eſt, quod radius ille ſemper ſit aut infinitus, aut nullus; nunquam autem finitæ magnitudinis; ſed properandum ad alia.

Summo jure objeciſti *Fratri* meo, quod putaverit unicam tantum dari tranſcendentem, videl. Logarithmicam, cujus puncta quotvis per communem Geometriam inveniri poſſint; egregie enim notaſti alteram tranſcendentem pro ſectionibus Anguli, cujus puncta etiam per communem Geometriam facillime habentur. Ego nullus dubito plures alias hujuſmodi dari, pro quibus autem methodum excogitare nondum vacavit: ſaltem jam video illam in eo conſiſtere, ut inveniatur æquatio differentialis conſtans duobus membris omnino inter ſe ſimilibus & non integrabilibus, quæ tamen æquatio ſit pro curva algebraïca, qualis eſt hæc, $\frac{dx}{\surd(aa+xx)} = \frac{dy}{\surd(aa+yy)}$ ubi duo membra $\frac{dx}{\surd(aa+xx)}$ & $\frac{dy}{\surd(aa+yy)}$ ſunt ſimilia; id eſt, dx cum a, & x, eodem modo componitur, ac dy cum a & y; non autem ſunt integrabilia, quia eorum integralia, vel ſummæ, dependent a quadratura hyperbolæ. Interim æquatio differentialis comprehendit [præter rectam, quam omnes hujuſmodi æquationes neceſſario comprehendunt, quam autem hic non puto] aliam cur-

1695 Jun. vam algebraïcam, quam ſic invenio, $\frac{dx}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(aa+yy)}}$ dat $\frac{y.xdx}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{x.ydy}{\sqrt{(aa+yy)}}$, corumque ſummæ $y\sqrt{(aa+xx)} - \int dy\sqrt{(aa+xx)} = x\sqrt{(aa+yy)} - \int dx\sqrt{(aa+yy)} \pm bb$. Eſt autem $dy\sqrt{(aa+xx)} = dx\sqrt{(aa+yy)}$, per æquationem datam: ergo etiam $\int dy\sqrt{(aa+xx)} = \int dx\sqrt{(aa+yy)}$: illis itaque deſtitutis, manebit æquatio algebraïca $y\sqrt{(aa+xx)} = x\sqrt{(aa+yy)} \pm bb$: quæ determinat modum ſpatium hyperbolicum dividendi in quotvis partes æquales; ex qua diviſione ipſa Logarithmica producitur. Sic ex æquatione differentiali membrorum ſimilium, & non ſummabilium $\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$ invenio curvam algebraïcam $y\sqrt{(aa+xx)} = x\sqrt{(aa+yy)} \pm bb$, qua oſtenditur etiam circuli diviſiones producere curvam tranſcendentem, cujus puncta quotvis algebraïce poſſunt inveniri, quæ ipſa Tua eſt curva ſectionum anguli. Idem præſtari poteſt, ſi inveniatur curva algebraïca, quando alterum membrum æquationis differentialis ſimilis, per quemvis numerum multiplicatur, ut ſi fiat $\frac{ndx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$.

Optime notaſti in *Actorum Aprili*, * conſtructionem meam curvæ æquilibrii immediate inveniri poſſe, ope ſolarum differentialium; ſed hoc ipſum eſt, quod mihi anſam dederat cogitandi, annon hujuſmodi perbrevis conſtructio, per vulgarem Geometriam elici poſſet; quod commodiſſime fieri poſſe videbam per notiſſimum illud Axioma mechanicum, quod jam ab ipſo ARCHIMEDE, ni fallor, fuit receptum; & hac ratione oſtendere volui, quod mediocris etiam Geometra, differentialium calculi omnino ignarus, genuinam Problematis ſolutionem invenire potuiſſet; itaque non ſatis poſſum mirari, qui acciderit, ut *Frater* meus ad tam prolixam, etiam pro ſpecialiſſimo caſu, pervenerit conſtructionem. † Eandem difficultatem moves, contra objectionem meam CRAIGIO factam, quam

* *Vel* Joh. BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. XXIV. pag. 139.
† *Act. Erud.* 1691. Febr. pag. 65, vel Jac. BERN. Opp. N°. 63. pag. 624.

Digitized by Google

quam jam & Dominus Hospitalius mihi movit; verum video, 1695 Jun.
quod ambo meam mentem non recte percepiſtis; veriſſimum enim, & mihi videtur, quod terminus ſummator termini irrationalis debeat continere eandem irrationalitatem; contra quod non fuit objectio mea; ſed illud non verum mihi videtur, quod Craigius tacite ſupponit, terminum ſummatorem non ſolum idem ſignum radicale, quod verum eſſet, ſed etiam ſemper eandem quantitatem ſub ſigno radicali contentam habere, quam habet terminus ſummandus; Poſterior enim hujus propoſitionis pars falſa eſt; in quam rem Domino Hospitalio dedi exemplum, & complura alia dare poſſem in quibus methodus Craigii manifeſtiſſime non ſuccedit, ob ſolam ſuam falſam hypotheſim; Forte occaſio dabitur de his in *Actis* aliquid publicandi.

Cæterum, quod dicis obſervationem meam, quod nempe ſummatio ordinatarum $\sqrt{(a^4 + x^4)}$ pendeat ex dimenſione curvæ parabolicæ cubicalis primæ, etiam Tibi fuiſſe factam a Domino *Marchione* Hospitalio; ſcias quod illam a me primo habuerit, cujus forte alias Te non admonuiſſet. Interim, vix credo ſummationem dictam connectionem habere cum dimenſione curvæ hyperbolicæ. Conſiderationes Tuas, quas pro contrahenda quadraturarum inquiſitione detexiſti, mihique communicandas promiſiſti, grato animo recipiam, quandocunque venerint.

Totus perſuaſus ſum oſculum circuli cum curva eſſe concurſum trium interſectionum in eodem puncto, niſi in vertice curvæ; ubi aliquando quatuor concurrunt. Concipe enim punctum aliquod, tanquam centrum, fluere in recta indefinita perpendiculari ad curvam; nunquid circulus, centro ubivis exiſtente deſcriptus, tangit curvam, alibique adhuc bis ſecare poterit: punctum vero contactus eſt concurſus duarum interſectionum, ſed unicum eſt punctum, in quo centro circuli exiſtente, tertia interſectio coincidat cum duabus permanentibus; eſt enim accidens, ſi quarta ſimul concurrit: Exempli gratia, ſectionem conicam circuli in pluribus quam quatuor punctis ſecare non poteſt, ut demonſtratur in doctrinâ Conicorum; evidentiſſimum autem eſt circulum radii evolutæ, ideſt, ipſum oſculatorem, præter quam in puncto oſculi, adhuc alibi ſecare ſectionem Conicam: ſic itaque, ſi oſculum eſſet concurſus qua-

1695 Jun. tuor interſectionum, revera ſectio conica quinquies a circulo ſecaretur. Hoc interim verum eſt, quod quævis curva in ſe rediens, ideoque & ipſe circulus, aliam curvam quamcunque in punctis imparibus ſecare nequit; & ob hanc rationem, oſculum non datur abſque quarta interſectione alibi facta. Plura de hac materia addere non poſſum; eorum enim quæ veſtram diſputationem concernunt nunc non recordor, nec *Acta Lipſienſia* mihi ſunt ad manus, ut ea relegere poſſem.

Jucundiſſimum fuit legere meditationes Tuas metaphyſicas, quas ſub *Specimine Dynamico*, * in eodem *Actorum Aprili*, publicaſti. Ejuſdem tecum ſum opinionis, quod Corporum natura primario non conſiſtat in extenſione; hæc enim & ipſi vacuo competit, ſine quo ſane motum concipere nequeo. In quo autem corporea natura præciſe conſiſtat, hoc utique facile dictu non eſt. Tu quidem illam ponis in vi naturæ utique ab Authore indita, quam primitivam appellas; ipſam autem extenſionem in continuatione ſive diffuſione hujus ſubſtantiæ nitentis, vel vi primitivà inſtructæ; ſed videris mihi ſupponere id quod eſt in quæſtione. Subjectum enim vis, in quo nempe ea inhæret, eſt ipſum corpus; & ſic corpus tanquam præexiſtens concipi debet: niſi forte diſtinctionem feceris inter vim potentialem & actualem; illam, quæ animabus competit corpora ad nutum voluntatis movendi; hanc, quam corpora a priori vi commota, ſibi invicem communicant; & ſic eo redires quod, niſi vehementer fallor, a Te olim ſtatutum alicubi me legiſſe memini, corpus eſſe *mentem momentaneam*. Unde conjicio Te nunc eo collimare, quando dicis *Vim primitivam reſpondere Veterum formæ ſubſtantiali.*

Optime notaſti contra *Carteſianos*, quod factum ex mole corporis in velocitatem non ſit quantitas motus; ſed quantitas *impetus*, ſeu, ut poſtea appellas, *motionis*; ex quarum aggregato naſcatur quantitas motus. Quæ dein dicis de tubo circa centrum rotato, de globo in cavitate ejus exiſtente, de niſu, ſeu ſollicitatione, de vi viva & mortua &c. veriſſima debent videri iis, qui ex noſtra interiori

* G. G. L. *Specimen Dynamicum, pro admirandis Naturæ Legibus, circa Corporum vires & mutuas actiones detegendis, & ad Cauſas ſuas revocandis.* Acta Erud. 1695. April. pag. 145.

teriori Geometria norunt, qua ratione quodlibet quantum ex infinitis differentialibus, & quodlibet differentiale ex infinitis aliis, & quodlibet horum aliorum adhuc ex aliis infinitis, & ita in infinitum, componi intelligendum ſit; quibus conſideratis, certe deſtruitur unico ictu, Atomiſtarum opinio. 1695 Jun.

Hæc & alia ſimilia, quæ, in Matheſi abſtracta, attentius conſideranti obvenerunt, olim etiam mihi anſam dederunt ad plurimas ſpeculationes Tuis non multum abſimiles, circa rerum exordia & proprietates; quarum aliquæ ſi publicarentur, procul-dubio quam plurimis pro mero luſu ingenii, ne dicam pro ridiculis, haberentur, quæ tamen rationi quam-optime conſentanea mihi videntur. Quod vero ſub finem de virium æſtimatione dicis, fateor Tuas rationes me nondum convincere; non ideo, quod opinio Tua ſit prorſus nova, & contra eam, quæ hucuſque fuit ubique recepta, & nunquam in dubio poſita; ſed ideo quod eam ab effectu deducas, qui tamen non eſt perpetuus & conſtans. Quod enim Corpora aſcenſus faciant quadratis celeritatum proportionales, non ideo etiam vires erunt in hac ratione, exiſtentibus Corporibus æqualibus: aſcenſus quippe iſti, licet ſint homogeneum quid, non ſunt effectus, niſi ut ita dicam, accidentales; qui ſolummodo dependent a Legibus gravitatis & motus materiæ ætheteæ; quas ubique ſummus rerum Arbiter, ſi aliter conſtituere voluiſſet, etiam Corpora celeritatibus ſuis iiſdem, & proinde viribus iiſdem, facerent aſcenſus omnino in alia ratione; unde conſtat hujuſmodi effectus non immediate, & unice, provenire a viribus Corporum motorum; quæ procul dubio pergerent moveri in infinitum, ſi ab alio peregrino non impedirentur: quod itaque ad certam tantum altitudinem aſcendant, potius eſt effectus retardationi materiæ ambientis adſcribendus.

Sed quid multis opus; idem Tuum argumentum in Te retorqueri poteſt; quo oſtendam vires Corporum æqualium eſſe in ratione celeritatum ipſarum. Concipiamus enim duo corpora æqualia, A celeritate ut 2, & B celeritate ut 1, moveri, ſi vis horizontaliter in vacuo; & nunc in via ſimul offendere medium aliquod uniformiter denſum, & retardans quod ingrediuntur; Nunquid celeritates utriuſque corporis ſucceſſive imminuuntur, & imminutiones,

in

1695 Jun. in medio uniformi, ſunt in ratione ſpatiorum percurſorum. Sic itaque ambobus corporibus tandem ad quietem redactis, corpus A nonniſi duplo altius in medium penetraverit, quam corpus B. Ergo, Tuo more loquendo, vis corporis A eſt ad vim Corporis B, ut effectus illius ad effectum hujus, id eſt ut 2 ad 1. Eodem omnino modo oſtendere poſſem vires corporum motorum eſſe in alia quavis ratione, ſi modo medium non uniformiter penetrabile ſupponatur: in quavis enim ſuppoſitione corpora vires ſuas convertunt in penetrationem, vel potius in ſuperationem reſiſtentiæ continuatæ medii. Multa alia ſuper hac materia dicenda haberem, ſed Epiſtolæ forma jam præter ſpem nimis excreſcit.

Ex quo ultimas meas ad Te dedi, jam ter litteras [quarum poſtremas nudius-tertius] accepi a Domino Braunio Theol. Doctore & Profeſſore *Groningenſi*; qui mihi dicit, me forte brevi a Proceribus Academiæ ſuæ invitatum iri, ad Matheſin publice ibi docendam; ſed eos velle certiores eſſe de adventu meo, ideoque à me quærit, num hanc ſpartam acciperem, cum ſtipendio annuo mille & ducentorum florenorum hollandicorum præter emolumenta Academica. Et ſane reſpondi, ante acceptas Tuas ultimas, verbumque dedi, ut vix retrahere poſſim, niſi forte novum aliquod incidens interveniat. Interim, plurimum Tibi debeo, pro cura quæ Tibi mei eſt, dum laboraſti ad obtinendum pro me Profeſſionem Mathematicam novæ apud *Halas ſaxonum* Academiæ. A longo jam tempore, non diffiteor, nova hæc Academia mihi appetitum movit. Quid autem nunc, rebus ſic ſtantibus, faciendum, Te ipſum conſulo, qui meus es patronus, & in quem omnem fidem pono, quidnam mihi utilius, & utrum alteri præferendam cenſes, indica. Vale & ama, ut ſoles

Baſileæ d. $\frac{8}{18}$ Junii 1695.

Celeberrimi tui nominis
Cultorem aſſiduum.
J. Bernoulli.

EPIS-

EPISTOLA XII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM

Reſponſio ad præcedentem.

De Calculo differentialium promoto. De coefficientibus terminorum poteſtatum. De curvis maximi proprietate gaudentibus. De curvarum oſculis. De viribus corporum. De Hugenio. *De* Nieuwentiitio, *&* Tschirnhausio, *& Jac.* Bernoullio. *Quomodo literatos agere deceat.*

Vir Celeberrime, Amice Honoratiſſime!

Gratias ago, quod apud *Sangallenſes* inquiſiſti. Non dubito quin R. P. Heer candide ſcripſerit quod res eſt, *Vitodurani* poſtrema tantum mihi deſunt, quæ fortaſſe non difficulter ab *Einſidelenſibus* impetrari poſſent. Sed nolim Tibi negotium faceſſere, quem diſtractum video, præſertim cum de familia transferenda ſit cogitandum. Idem dicam de *Abbate* Boisotio. Obiit ille, non ideo minus tamen Dnus. *Præſes* Boisotius Frater ejus talia ad me libenter mittet; præſertim cum in Elogio *Abbatis*, typis edito, facta ſit perhonorifica mentio conſilii mei, & voluntas defuncti in me juvando inter laudes ejus referatur. Ipſum elogium mihi miſſum eſt. Quanquam & translata inde in *Diarium Eruditorum* † viderim, quæ me tangebant. Sed quid commodè facere poſſis judicare Tuum eſt, meum vero de Te [ſi poſſem] ornando, potius-quam onerando cogitare; quem quanti faciam, mallem rebus quam verbis oſtendere. 1695 Jun.

Non ſine admiratione vidi, quam facile, & quam alte penetraveris in ea quæ propoſueram de ſingulari calculi genere, quo rectangulorum differentiales cum polynomiorum potentiis conferuntur; tantum pro litteræ x exponentibus ſubſtituendo exponentes ipſius

† *Journal des Savans*, 1695. 22. Journal.

Digitized by Google

1695 Jun. d ipſam x afficientis. Et pulchre notaſti, hoc modo ipſas d tractari quaſi litteras, non conſiderando ipſas x, vel y, niſi tanquam afficientes litteram d, verſa rerum vice, cum alias d ſit tantum nota quædam ſyncategorematica, x autem, & y ſint quantitates. Quod ſeriem infinitam attinet, poterit ea interdum commodè finiri, aliquam ex ipſius d quaſi-potentiis ponendo nihilo æqualem; quemadmodum & per alias hypotheſes variari calculus poteſt, quoniam alicui quaſi-potentiæ ipſius d valorem pro arbitrio tribuere licet. Ex his jam magis intelligi arbitror, quanto jure dudum differentias potentiis, ſummas radicibus comparaverim; quod nunc reali harmonia comprobatur; præſertim reſpectu termini ipſius, ſeu ſummæ primæ, quæ etiam quaſi extractione quadam invenitur. Et omnino, quæ in geometrica progreſſione & logarithmis operationes locum habent, eas hic imitari licet, quod ſane ingenioſiſſimè in rem contuliſti. Nec dubito, quin egregium aliquid in animo habueris, cum ſcribis Te, inter ſcribendum, ex inſperato incidiſſe in methodum univerſalem, vel per ſeriem, vel citra ſeriem ſummandi quantitatem differentialem cujuſque gradus, infinitaque alia adhucdum abſcondita hic latere, quæ nunc excolere non vacet. Quod ſi mihi eam methodum, & quæ alia in his occurrent, communicaveris, habebis me præclarorum inventorum Tuorum præconem candidiſſimum. Succeſſit conſenſus etiam inter $(x + x + y)^m$ & inter $d^m xxy$; modo ſcribas $(x+\xi+y)^m$ & $d^m x\xi y$; ita enim ſi m ſit, 2, fiet $x^2 + \xi^2 + y^2 + 2x\xi + 2xy + 2\xi y$, & $d^2x + d^2\xi + d^2y + 2dxd\xi + 2dxdy + 2d\xi dy$. Sic enim manet comparatio, modo x & ξ non confundamus, etſi coincidant. Hinc libertas variandi, quæ poterit prodeſſe ad ſummandum.

Regula pro coëfficientibus poteſtatum a polynomiis, ſeu generali poteſtatum generatione, quæ mihi aliquando naviganti in mentem venit, non abludit a Tua. Soleo tamen enuntiare, ad evitandam diviſionum mentionem, per numeros combinatorios, veluti in decima-ſeptima potentia exiſtens forma $a^5 b^4 c^3 d^3 e^2$ habet coëfficientem, qui fit, cum in ſe invicem ducuntur numeri exprimentes 17 rerum quaterniones, 17–4 rerum terniones, 17–4–3

rerum

rerum terniones, 17–4–3–3 rerum biniones. Sed numeri combinatorii rurſus ex productis arithmetice progredientium fiunt, ut conſtat, unde res in effectu cum Tua forma coincidit. 1695 Jun.

Problemata, in quibus quæritur ex lineis omnibus una præſtans aliquid in deſideratis maximum, non poſſunt Tibi eſſe nova. Sed novum fortaſſe eſt, rem methodo quadam aggredi, qualis illa eſt, quam ad Te nuper perſcripſi, in qua quæ contra moves, non obſunt. Cum curvam quæſitam aſſumo ut datam, eique aſſigno certam ſeriem; utique quamdiu hanc unam reſpicio, ſumo x & z pro variabilibus, & a, b, c &c. pro conſtantibus. Sed hoc modo ſemel aſſecutus æquationem a differentialibus liberam, eamque jam ad maximam accommodans; conſidero plures tales ſeries potuiſſe intelligi, eas autem habere x & z communes, ſed a, b, c, &c. ſunt variantes; has ergo tunc differentiari oportet, non illas. Et omnino ſe res habet, ut in meo calculo differentiali reciproco; ubi aliquando, non ordinatæ, ſed parametri differentiantur. Itaque non eſt quod mireris, eandem quantitatem a me, nunc ut conſtantem, nunc ut variabilem ſumi. Etſi autem via ad ſeriem perveniendi prolixiuſcula videatur, fortaſſe tamen ſeries ipſa ſatis ſimplex fiet, cum ipſa curva quæſita eſt ſimplex. Quanquam hic id tantum quæratur, ut certam ad hæc perveniendi methodum obtineamus.

Arcum, qui maximum ſegmentum data longitudine includat, eſſe circulum, non alia methodo quærere inſtituebam, cum hæc meditarer. Oportet veniri ad aliquid omnibus curvis commune, ut inde fiat electio; nec aliud hactenus occurrit aptum, quam ſeries infinita, quæ verum eſt ad talia Analyſeos ſupplementum. Inquiſitione maximæ inter maximas, [repetita etiam replicatione,] interdum & in mechanicis Problematibus opus habui. Inquiſitio Tua maximæ inter terminos ſerierum, ad imitationem maximæ inter ordinatas figurarum, non videtur contemnenda. Veriſſimum eſt eſſe in curvarum punctis quibuſdam quaſi irregularitates circa maxima vel minima, flexus, & tangentes; & ſæpe fit, ut curva in uno puncto infinitas habeat tangentes, ut ſi in curvis qualis adjecta eſt (*Fig.* 14.) caput continue minuatur tandemque evaneſcat in punctum; Tunc enim infinitæ illæ tangentes, quarum totum TAB.III.

I 2 caput

1695 Jun. caput erat capax, in unum illud punctum quadrant. Subtiliſſima mihi viſa ſunt, quæ commentus es, circa uſum æquationum differentialium, inter terminos ſimiles, ad inveniendas curvas tranſcendentes, quarum puncta haberi poſſint algebraïce, quæ velim proſequaris. Optime feceris, ſi ad *Acta* miſeris, in quibus CRAIGIUM putas erraſſe. Non obſervavi Circulum Conicam, præter oſculum, adhuc alio in puncto ſecare ſolere, & regulariter, ni fallor, in oſculo concurrunt duo contactus, id eſt, quatuor radices.

TAB. III. Duæ normales ad curvam regulariter ſe ſecant ut (*Fig.* 15.) BA, & CP, in P; accedente autem C ad B, variatur ipſum P, donec ad ultimum P, nempe A deveniatur, quod eſt centrum oſculi in B. Hæc ut conciliemus cum Tuis, ad exemplum quod innuis, ſed non exponis, in Conica venire utile erit. Id gratum erit, ſi mihi Tuam ſententiam uberius perſcripſeris; cui eo libentius deferam, quo minus mihi tribuo, quoties rem ſatis examinare non poſſum.

Quod vero meum ***Specimen Dynamicum*** attinet; puto Te viciſſim non ſatis meditatum, quæ ſcripſeram; judicaſſe paulo feſtinantius. Eandem concluſionem conſecutus ſum, non tantum ab affectu, ſed & a priori, ut innuiſſe me obſervabis, etſi non poſuerim modum, qui habet aliquid elegans & inexpectatum. Minime autem putare debes effectum, quo uſus ſum, relatum ad gravitatem, habendum pro accidentali. Sume quemcunque effectum vim habentem, cujus adeo productione vis conſumitur, idem prodibit; gravitatem autem elegi, quia aptiſſima eſt ad æſtimationem, ut explicui. Et nihil refert, quomodo fiat gravitas, cujus cauſam eſſe ab ambiente non nego. Quod de medio affers, vim in ſe penetrantis abſorbente, non facit ad rem noſtram; quia vim, quam abſorpſit, non reddit, ſeu non eſt effectus vim habens. Aſt ambiens, quod eſt cauſa gravitatis, vim quam abſorpſerat, reſtituere poteſt, & tali effectu ego utor ad æſtimandum. Pro medio igitur ut in eo quoque Tibi ſa-
TAB. III. tisfaciam, fingamus (*Fig.* 16.) ſeriem elaſtrorum æqualium, & ſimilium, & æqualiter diſpoſitorum, quæ tranſitu corporis ſint flectenda, ſeu deprimenda, & acceptam flexionem retineant, objecto velut peſſulo, adeoque ſint tenſa; reperies Corpus A libræ unius, cele-

celeritate ut 2, & Corpus B, librarum quatuor, celeritate ut 1, æqualiter in tale medium penetrare, ſeu vim ſuam conſumere, æquali elaſtrorum numero depreſſo; adeoque cum vim ſuam conſumſerint, æquali vi producta, æquali ſcilicet tenſione, etiam æqualem vim habuiſſe. Nam effectum integrum, producere aptum, cauſæ æquipollere ſuppono. Ex his intelliges, me non tam perfunctoriè in ſtatuendis hujuſmodi verſari, quam Tibi, quod miror, perſuaſiſti. Hugenius quoque a mea ſententia non eſt alienus. Nec minus miror, quod putas me ſupponere quod eſt in quæſtione, dum corporis naturam in vi primitiva nitendi, retinendique colloco. Eſto ſubjectum illud, cui vis inhæret, vel cui attribuitur eſſe ipſum corpus, non ideo tamen ſequitur corpus concipi debere ut præexiſtens; pari enim jure etiam Ens eſſet prius eſſentia, quia hæc ei inhæret. Et quicquid demum pro primario prædicato afferri poſſet, talem objectionem pateretur. Quin potius hoc prædicatum, ſumtum cum prædicato communi Entis, ſubſtantiæ, vel ſubjecti, conſtituit corporis notionem. Sed etſi attuliſſem aliquid poſterius corporis eſſentia, non ideo principium petiiſſem; ſi modo attuliſſem attributum aliquod reciprocum intelligibile, quod a me factum puto, ab aliis non item. De Commercio Animæ & Corporis mirabilem habeo ſententiam, per quam puto omnia intelligibiliter explicari; eam nunc Tibi perſcriberem, ſi tempus pateretur; faciam tamen prima quaque occaſione, Tibi gratulatus, quod etiam his meditationibus non indelectaris. Ita enim judico, præclara agitantem non ſolis mathematicis circumſcribi debere: Imo hunc uſum debere eſſe Matheſeos, ut etiam ad cætera acuat mentem. Vacuo non puto eſſe opus, non magis quam atomis, nec arbitror Te diſſenſurum, ubi rationes meas intellexeris. 1695 Jun.

Perturbaſti me mirifice, dum nuntiatam Tibi incomparabilis Hugenii mortem ſcribis. Cum nihil tale ad me pervenerit, erratum ſpero. In eo eram ut darem ad eum litteras. Aliquoties mihi infauſta obtigit litterarum mearum remiſſio, ob extinctos, quibus deſtinabam. Velut Ernestum *Heſſiæ Landgravium*, Seckendorffium, & alios. Pelissonius & Abbas De la Roque, *Diarii Gallici* priſtinus author, meas accepere pene mo-

 ribundi

1695 Jun. ribundi. Si obiiſſet HUGENIUS maximam jacturam paſſi fuiſſemus. Fruſtra precaremur, ne obierit; ſed ſi vivit, ut ſpero, precabimur Deum, ut diu vivat, ipſumque rogabimus ut præclaras cogitationes edere maturet.

Groningenſem Profeſſionem non poſſum Tibi diſſuadere; re præſertim eo uſque provecta; eoque magis, quod non plane exploratum habeo quantum *Halis Saxonum* detur. Quidquid ſtatues; opto ut ex ſententia procedat; quo ingenium Tuum ad ea convertere totum poſſis, quibus Scientias augeas, ut præclare cœpiſti.

Pene oblitus eram dicere *Bernardum* NIEUWENTIIT, Mathematicum Batavum, duos libros contra noſtrum Calculum ſcripſiſſe, † quos & mihi miſit; ſed cum honorificam noſtri mentionem faciat, reſpondebo in *Actis*, * & par pari reddam. Putat dx eſſe aliquid, ſed $dxdx$, item ddx eſſe nihil, nec iteratas differentiationes capere poteſt, pro dx, dy, utitur litteris a, e, &c. & ita noſtra primi gradus, aliis tantum notis in ſuam rem transferre ſtudet. Sed quantos uſus habeant noſtræ notæ, pulchrè admodum oſtendunt, quæ inter nos inde ab aliquot menſibus per litteras ſunt agitata. Putat etiam noſtrum calculum non porrigi ad $z = y^x$, ſi x, y, z ſint indeterminatæ. Hunc, quem credit, defectum ut ſuppleat, comminiſcitur æquationem mirabilem, quæ meo more erit $y^{x+dx} + xy^{x+dx-1}\,dy - y^x = dz$. Sed ex tali æquatione nulla poteſt duci conſtructio, cum non ſervet leges homogeneorum tranſcendentium. In reſponſione mea oſtendam, quod nos huic, quem ſibi perſuaſit, defectui dudum & melius providerimus, & quod Tu etiam per Te ad idem, quod ego in eo negotio repereram, perveneris. Eo enim ingenio ſum, ut libenter ſuum cuique tribuam. Abutitur interdum noſtris ratiocinationibus, ut tales calculos non eſſe tutos probet; velut, cum ex eo quod ipſæ dx conſtantes aſſumuntur, ſecundum nos ſequi putat etiam ipſas

dy

† *Conſiderationes circa Analyſeos ad quantitates infinite parvas applicatæ Principia & Calculi differentialis uſum.* Amſtel. 8°. 1694.

Analyſis infinitorum ſeu Curvilineorum proprietates, ex polygonorum natura deducta Amſtel. 8°. 1695.

* G. G. L. *Reſponſio ad nonnullas difficultates* a Dno. B. NIEUWENTIIT *circa methodum differentialem ſeu infiniteſimalem motas.* Acta Erudit. 1695. Jul. p. 310.

dy fore conſtantes; quare breviter indicabo in quo peccaverit, etſi omnia non ſim perſecuturus. 1695 Jun.

Puto ad Te perveniſſe ſecundam editionem *Medicinæ mentis* Domini de Tschirnhaus; miror quod ne nunc quidem recte dederit modum enumerandi lineas algebraïcas cujuſque gradus, & quod noſtra evitare affectet, ſpe [quam fruſtraneam puto] ex vulgaribus notis omnia non minus commode ducendi: quanquam fortaſſe facile ad hæc perventurus, nonniſi quia noſtra admonuere.

Conſtitui numerum curvarum cujuſque gradus foret operæ pretium. Ubi illud diſpiciendum eſſet, an umbilici, ſeu foci, & rectarum ab iis ad curvam ductarum ſumma vel differentia ſufficerent ad omnes curvas enumerandas. Domino *Fratri*, egregio Viro, rogo ut me commendes. Ego, tametſi viſus ſit paulo frigidius agere, non ideo minus ingenium ejus & doctrinam maximi facio, ſperoque vobis conveniſſe. Ita autem animatus ſum, ut optem omnes, quibus ſerio cordi eſt profectus ſolidarum Scientiarum, animis non minus quam ingeniis conſentire, nihilque omittere quod alere amicitiam queat; cui conſequens eſt, & omnibus modis, & captare quod conciliare, & evitare quod offendere poſſit; ita tamen ut veritatis jura non lædantur. Poſſunt vero hæc inprimis facere, mutuis conatibus, uti mutuo inventis, tum ſumma in diſſentiendo moderatio, candor in conſentiendo, ut agnoſcamus ingenue, quid cuique debeamus; poſtremo communicare libenter, & facere viciſſim, ne alium pœniteat communicaſſe. Hæc ſunt, quibus mire augeri poſſe putem & perfectionem inventionum, & voluptatem invenientium.

Paſſim autem peccatur ab egregiis hominibus, dum vel gloriolam in reprehendendo captant, vel alienæ laudi, etiam tacitis actibus, detrahunt. Utrumque rectis ingeniis indignum; præclaris etiam ſupervacuum cenſeo; imo gloriæ quam expetunt noxium. Nam qui aliquid egregie poſſunt, vereri non debent ne materia præripiatur. Cum potius juvari eos certum ſit aliorum inventis, ut tanto meliora per ſe poſſint. Tuum ego pluris feci acumen maximum, quod conjunctum eſſe viſum eſt cum candore, & moderatione, quæ ſæpe deeſſe ſolent juvenibus etiam præſtantiſſimis, at

Digitized by Google

1695 Jun. at nondum expertis, quantum ſit momentum in recto videndi inſtituto. Cui ſi inſiſtis, de quo dubitare non poſſum, nihil eſt quod à Te non expectem ad incrementum Scientiarum. Optarim autem ut nonnihil temporis etiam Medicinæ meditandæ conſerves, quæ vel maxime indiget ingenio Tuo, & vides quo applauſu Tua de muſculis † fuerint accepta. . . . .
Vale. Dabam

Hanoveræ 24. Junii. 1695.

Cultor ſtudioſiſſimus
Gothefridus Guilielmus
LEIBNITIUS

† *Diſſertatio de Motu muſculorum* ſæpius edita, Opp. Tom. I. N°. XVIII. p. 93. & ſeq.

EPISTOLA XIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Diſceſſum paranti quædam negotia commendat.

Vir Celeberrime Amice Honoratiſſime!

1695 Jul. CUm amicus nuper ex *Batavis* veniens mihi inter alia narraverit, ſe *Groninga* tranſeuntem intellexiſſe una die tres Profeſſores vocatos, atque inter illos Te, cujus nomen enuntiabat; ego Tibi ex animo gratulor, nec dubito quin, ita ferente ipſa itineris Tui ratione, videndi Tui copiam nobis ſis facturus, cujus tamen rei tempus prænoſſe velim, quia ſæpe aliorſum mihi eſt excurrendum, ne caſu aliquo ſpe gratiſſima excidam.

Nunc

Nunc illud rogo, ut ante diſceſſum a Domino *Fratre* Tuo, Celeberrimo Viro, multa ſalute a me nuntiata ſuccedaneam Tuæ curam mihi impetres, circa ea quæ rogavi, ſive a Domino *Præſide* BOISOTIO aliqua adveniant, ſive ex *Einſidelenſi* Cænobio obtinere liceat VITODURANI quæ mihi deſunt, ſive quid aliud occurrat, in quo favore ejus ſit opus, quem viciſſim officiis demereri velim, ſi qua occaſio offeratur. 1695 Jul.

Johannis VITODURANI Chronicon habeo ab initio uſque ad hæc verba: „INNOCENTIO V. ſucceſſit JOHANNES XXI, „ natione Hiſpanus, qui ſedit pauco tempore, num cum Camera, „ quam ipſe pro ſe in Viterbii *circus* Palatium conſtruxerat ſolum „ corruit, & intra ligna & lapides colliſus, die VI poſt caſum, „ Sacramentis omnibus perceptis, expiravit. Sedit autem anno „ 1277. "

Hic finit Chronicon meum. Secundum VOSSIUM autem [in libro *de Hiſtoricis Latinis*] continuari debet uſque in Seculum ſequens. Quod ſi extat illa continuatio, eam mihi communicari rogo; paucarum ſane plagularum erit; cum integrum Chronicon non ſit admodum prolixum.

Quod cætera attinet, me ad priores refero, Tibique iter felix & cætera quoque omnia proſpera precor.

Hanoveræ 5°. Jul. 1695.

Cultor ſtudioſiſſimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

Digitized by Google

EPISTOLA XIV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Ad Profeſſionem Groningenſem *vocatus, Patriam relinquere parat. Seriei univerſalis pro quadraturis nova demonſtratio. De puncti regreſſus difficultate. De Curvis percurrentibus. De curvarum oſculis. De* NIEUWENTIITIO, *&* medicina mentis TSCHIRNHAUSII. *De ſua indole & valetudine. De dimenſione curvarum per arcus circuli. De* HUGENIO.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

1695 Jul. DEnuo *Veſuntionem* ſcribi curavi, ad ſollicitandum Dominum *Præſidem* BOISOTIUM, Fratrem *Abbatis* defuncti, ut monumentorum, quæ hic Tibi promiſerat, Te compotem reddat. Hactenus occaſionem nullam nactus fui ſcribendi ad *Einſidelenſes,* quam tamen jam ante acceptas poſtremas Tuas diligenter quærebam. Interim ſpero me tandem quamdam impetraturum, & quidem per amicum, qui eo litteras ferri curabit. Nihil enim non tentabo, quando agitur de Tuis deſideriis explendis, & libenter omnia ſeponam negotia, mei licet ipſius incommodo, ſi Tuis commodis obſtetricandum ſit.

. . . .

Nudius tertius iterum litteras accepi a Domino *Doctore* BRAUNIO, in quibus ſignificat rem feliciter confectam, meque ab Ampliſſimis Curatoribus ad Profeſſionem Mathematicam deſtinatum, a Celſiſſimis Ordinibus vero approbatum & confirmatum fuiſſe; ita ut forte, ante octiduum, Publicas Vocationis Litteras ſim accepturus; ſimulque de rebus meis, tanquam cito *Baſileam* deſerturum, diſponere me jubet, quod jam menſe Octobri *Groningæ* deſiderer. Expeditam adeo itineris aggreſſionem a me exigi certe non expecta-

bam.,,

bam, quia ad minimum hyemem adhuc *Baſileæ* ſperabam tranſigere. Citiſſimus iſte diſceſſus me non mediocriter turbat, præſertim cum hactenus de transferendo domicilio nondum cogitaverim, nec uxorem meam, cui patriam, parentes, conſanguineos, & filiolum nondum ſemeſtrem, qui pro itinere perferendo nimis delicatus eſt, deſerere moles inſuperabilis videtur, ad iter mecum ſuſcipiendum proclivem reddere potuerim. Verbo, mille me curæ & ſollicitudines, ceu hiſce caſibus fieri ſolet, obruunt: Ignoſce igitur, ſi ad tempus meditationibus Mathematicis valedixero, dum fata quietiorem reconceſſerint ſtatum. Non poſſum tamen quin ad ſingula ultimarum Tuarum puncta breviter reſpondeam. 1695 Jul.

Quanquam egregium aliquid in animo habuerim, & peculiare compendium ſperarim pro ſummationibus, & inprimis pro methodo tangentium inverſa, ex iis quæ in prioribus meis animadverti, circa comparationem rectangulorum differentialium cum polynomiorum potentiis; non tamen per otium hucuſque licuit ea ulterius proſequi. Et ſane multarum imagine rerum ita ſum confuſus, ut, nonniſi in ipſo ſcribendi articulo, hiſce animum adhibeam, & quidem ſatis oſcitanter. Memineris me ſeriem univerſalem inveniſſe pro quadraturis & rectificationibus, per continuam additionem & ſubtractionem quantitatum æqualium, quæ Tibi non diſplicuit: En nunc aliam non minus curioſam. Quærenda eſto $\int n\,dz$; differentietur $n\,dz$, habebitur $n\,ddz + dn\,dz$; ergo, modo meo, ſumenda eſt tertia proportionalis ipſius $d^0 nddz + dndz$ ad $d^0 ndz$; quæ itaque erit $\frac{d^0 n ddz}{d^0 nddz + dndz}$ = [dividendo numeratorem & denominatorem per dz] $\frac{d^0 n dz}{d^0 n dz + dn d^0 n}$: facta diviſione continua, inchoando a priori denominatoris membro, proveniet $\int n\,dz = d^0 n d^0 z - dn d^{-1} z + d^2 n d^{-2} z - d^3 n d^{-3} z$ &c. $= nz - dn\int z + d^2 n \int^2 z - d^3 n \int^3 z$ &c. inchoata vero diviſione à poſteriori membro, erit $\int n\,dz = d^{-1} n\,dz - d^{-2} n\,ddz + d^{-3} n\,d^3 z - d^{-4} n\,d^4 z$ &c. $= dz\int n - d^2 z \int^2 n + d^3 z \int^3 n - d^4 z \int^4 n$, &c. quoniam nunc [poſita dz conſtan-

1695 Jul. te] $\int z$, $\int^2 z$, $\int^3 z$, $\int^4 z$, &c. æquantur ipſis $\frac{zz}{1.2.dz}$, $\frac{z^3}{1.2.3.dz^2}$, $\frac{z^4}{1.2.3.4.dz^3}$, $\frac{z^5}{1.2.3.4.5.dz^4}$, &c. prior ſeries $\int ndz = nz - dn\int z + d^2n\int^2 z - d^3n\int^3 z$ &c. convertetur in hanc $\int ndz = nz - dn\frac{z^2}{1.2.dz} + d^2n\frac{z^3}{1.2.3.dz^2} - d^3n\frac{z^4}{1.2.3.4.dz^3}$, &c. quæ omnino eadem eſt, quam in *Actis* publicavi, quod valdopere miror: hunc enim eventum, cum hæc inciperem ſcribere, non ſperabam; putans longe aliam ſeriem hac methodo proventuram: Elegans iſte conſenſus mirifice methodorum probitatem, præſertim hujus poſterioris, ubi tam mirabiliter & contra omnem conſuetudinem cum litteris d proceditur, confirmat. Sic etiamnum ſum in opinione, infinita alia & inaudita inde erui poſſe, dummodo aliquis, attentiori ſcrutatione, illa proſequi vellet; quod certe a me nunc exigi non poteſt. Cæterum ſi ponamus dn conſtantem, erunt $\int n$, $\int^2 n$, $\int^3 n$, $\int^4 n$ &c. $= \frac{nn}{1.2.dn}$, $\frac{n^3}{1.2.3.dn^2}$, $\frac{n^4}{1.2.3.4.dn^3}$, $\frac{n^5}{1.2.3.4.5.dn^4}$ &c. hoc modo altera ſeries $\int ndz = dz\int n - d^2z\int^2 n + d^3z\int^3 n$, &c. mutabitur in hanc, $\int ndz = dz\frac{nn}{1.2.dn} - d^2z\frac{n^3}{1.2.3.dn^2} + d^3z\frac{n^4}{1.2.3.4.dn^3}$; &c. ubi pariter in applicatione dz, d^2z, d^3z &c. deſtruuntur per dn, dn^2, dn^3, &c. ita ut proveniant quantitates pure algebraïcæ, quæ ſeries itidem per additionem & ſubtractionem reperitur.

TAB.III. Eodem modo, quo ego, concipis curvam retrogradam (*Fig.* 13.) quæ punctum habet in quo infinitæ lineæ tangunt, & proinde dx ad dy omnes habet poſſibiles rationes; illud enim punctum nihil eſt quam evaneſcentia capituli quod conſiderari poteſt, vel ſic (ut in
TAB.III. *Fig.* 14.) vel ſic (ut in *Fig.* 17.); id quod manifeſte patet in cycloïdibus, & conchoïdibus interioribus; cycloïs enim protenſa refert ſpeciem primi, & contracta ſecundi, coalitus vero protenſæ & contractæ facit curvam retrogradam. Interim difficultas hic ſe prodit,

prodit, quam nondum mihi eximere potui: Concipiatur enim (*Fig.* 18.) curva ABC evolvi, & evolutione deſcribi curva AFGH; Filum utique BF evolvens evolutione ſemper creſcit; ita ut curva AFGH ſit una continua curva: Intelligatur nunc caput BC evaneſcere, proindeque BF, CG evadere æquales; quo ſit ut portio curvæ FG degeneret in ſemiperiphæriam circuli, adeoque continua curva AFGH conſtet tribus diverſis portionibus, AF, FG, GH: Et hac conſideratione ſequitur, [ſi quidem ab univerſali ad particulare ſit argumentandum] ſi (*Fig.* 19.) $\alpha\zeta\epsilon$ ſint, exempli gratia, duæ ſemicycloides communes, curvam ex evolutione genitam non eſſe cycloïdem integram, $\alpha\phi\epsilon$ ut hactenus creditum eſt, ſed eſſe $\alpha\phi\gamma\zeta$ compoſitam ex ſemicycloïde $\alpha\phi$, ex ſemicircumferentia $\phi\gamma$, & ex portione $\gamma\zeta$; Hæ cum ſint diverſæ curvæ, quomodo unicam & continuam curvam producere cenſendæ ſint, non video. 1695 Jul. TAB. III. TAB. IV.

Jam ſatis oſtendi Domino *Marchioni* HOSPITALIO, ubi erraverit CRAIGIUS; verum illud publice faciendum non puto, antequam ipſe CRAIGIUS ad priores meas objectiones reſponſionem fecerit. Præter illas curvas tranſcendentes, quarum in ultimis meis mentionem feci, nimirum quarum puncta poſſunt algebraïce haberi; video omnes eſſe in earum cenſu, quarum natura exprimitur per æquationem ad dimenſionem indeterminatam aſcendentem, qualis eſt $x^x = y^x$ (quibus etiam accenſeri poſſunt Quadratrix, Spiralis *Archimedea*, Loxodromica plana aliæque.) Poſſunt enim in his curvis puncta quotvis geometrice determinari. Hinc Tibi deliberandum relinquo, annon jure hujuſmodi curvas peculiari nomine Percurrentium nuncupaverim, ad diſtinctionem earum quæ omnino ſunt tranſcendentales; id eſt, quarum ne unicum quidem punctum algebraïce invenitur; & annon medium tenere cenſendæ ſint inter algebraïcas & tranſcendentes: cui & Dominus DE TSCHIRNHAUS ſuffragari videtur, in nova editione *Medicinæ Mentis & Corporis*, pag. 109 & ſeqq. ubi etiam aliquas harum curvarum ſpecies profert; quas vero abſolute inter geometricas *Carteſianas* referri debere contendit.

1695 Jul. Libenter concedo in oſculo occurrere duos contactus, ea ratione qua Tu intelligis; adeoque certamen Te inter & *Fratrem* meum, eſt pura puta logomachia, ut jam in præcedentibus meis innui; ſed nego eapropter oſculum eſſe concurſum quatuor radicum: duo enim iſti contactus non ſunt unius ejuſdem circuli, ſed duorum diverſorum qui in unum coaleſcunt; ſic in problemate quodam poſſent, exempli gratiâ, ſex circuli curvam quamdam certa ratione tangere, qui tamen in certo caſu omnes ſex coaleſcerent; anne ideo contactus iſte cenſendus eſſet concurſus duodecim interſectionum unius circuli, vel concurſus duodecim radicum? Abſonum utique hoc foret; poſſet enim circulus hac ratione quamlibet curvam ſecare in tot punctis quot liberet.

TAB.IV. Ego oſculum ſic concipio: Eſto (*Fig.* 20.) curva quædam ABCDE, ex ejus puncto quopiam C indefinita ducta intelligatur perpendicularis CG: Centro alicubi G ſumpto, ſatis à C diſtante, deſcribatur circulus BCD, qui utique ſimpliciter tangit curvam in C, & alibi adhuc bis ſecat curvam in B & D: intelligatur nunc centrum G paulatim moveri verſus punctum C mobile; quo fiet, ut etiam duæ interſectiones B, D, magis accedant ad idem punctum C, donec tandem alterutra earum, B vel D, [utramque enim ſimul impoſſibile eſt, niſi forſan partes curvæ CB, CD, ſint ſimiles, id eſt ſi punctum C ſit vertex ſummus] coincidat cum puncto contactus C; hoc caſu, dico GC eſſe radium circuli oſculatoris BCD; manifeſtum autem eſt, hocce modo oſculum eſſe concurſum trium tantum interſectionum; nimirum contactus ſimplex C, qui æquivalet duabus interſectionibus, coincidit cum tertia interſectione B vel D; & quia hæ interſectiones omnes ſemper in eodem circulo conſiderantur, ubicunque exiſtat centrum G, erit oſculum revera concurſus trium & non plurium radicum.

Niſi candorem meum & ingenuitatem, ut ipſe fateris, jam ſatis compertam haberes, ſubdubitarem ſane annon ægre tuleris, quod fecerim quaſdam objectiunculas, vel potius difficultates contra *Specimen* Tuum *Dynamicum.* Stylus enim, quo uteris, ad ſententiam Tuam defendendam ſolito nervoſior videtur. Mihi ſane nunquam perſuaſi *Te tam perfunctorie in ſtatuendis hujuſmodi verſari*; ſed

ſed ſi non ſatis meditatus ſum quæ ſcripſeras, ſique judicavi paulo festinantius, condonabis: quæ enim dixi non minus mature mihi perpenſa exiſtimaveram. Interim perſuaſum Te velim, nullam contradicendi libidinem, ſed merum veritatis amorem me eo impuliſſe; & credas ejuſmodi pruritum, qui omnibus Philoſophaſtris communis eſt, quia quod aliud agant non habent, ab indole mea longe eſſe alienum. Patere ergo ut ſcrupulum, diſcendi gratia, proponam, quem in Tua reſponſione reperio. 1695 Jul.

Dicis duo Corpora A & B, quæ ſint mole ut 1 & 4, celeritate vero ut 2 & 1, æqualiter in medium uniformiter elaſticum penetrare, ſeu vim ſuam conſumere æquali elaſtrorum numero depreſſo. Supponamus autem corpora A & B æqualia, ſed celeritatibus moveri ut 2 & 1: ſecundum opinionem tuam, corpus A quadruplo altius penetrabit in medium quam corpus B: Videor autem mihi poſſe demonſtrare, profunditates corporum æqualium in medio uniformiter elaſtico peractas eſſe in ratione ſubduplicata, non vero duplicata celeritatum. Sit enim (*Fig.* 21.) corpus A, quod penetret in medium AB uniformiter elaſticum, ideſt, cujus quodlibet punctum C æquali elaſtro ſit præditum, adeoque ut omnes elaſticitates ſimul ſumptæ in abſciſſa AC deſignentur per applicatam CF trianguli ABG....: Et ſit Corporis A celeritas prima AD. Si itaque invenienda ſit ejus celeritas CE, quam in puncto C habebit, conſtruenda eſt curva DEB, cujus differentiales applicatarum CE ſint ut applicatæ trianguli CF, id eſt, ut retardationes ſint elaſticitatibus proportionales: Demonſtratur autem facile, quod curva DEB ſit parabola, cujus vertex D, & axis DA. Habeat nunc corpus A celeritatem aliam primam A*d*; ad inveniendas celeritates cæteras C*e*; haud dubie conſtruenda eſt altera parabola de *b*, verticem *d* & axem *d*A habens, quæ ſit eadem cum priori DEB, quia utrobique elaſticitates ſunt eædem. Eſt autem, ob identitatem parabolarum, AB : A*b* = √AD. √A*d*. Ergo numerus elaſtrorum depreſſorum celeritate AD, eſt ad numerum elaſtrorum depreſſorum celeritate A*d*, in ſubduplicata ratione celeritatum ipſarum: Ideoque, juxta hanc demonſtrationem, corpus A requireret cele- TAB.IV.

ritatem

1695 Jul. ritatem quadruplam ad producendum effectum duplum, loco quod ſecundum Te requiritur celeritas tantum dupla pro effectu quadruplo.

Quæ mihi narras de *Bernhardo* NIEUWENTIIT omnino lepida ſunt: Ecquis a riſu abſtinere poſſet, cum ille, ... de noſtro Calculo, velut cæcus de coloribus, ratiocinatur? Quid, quæſo, ſibi vult mirabilis iſta æquatio quam comminiſcitur? Erunt ſane irriti conatus, quos intendit contra aliquid cujus nequidem ideam habet; nec felicius ipſi cedet quam CATELANO, aliiſque, qui deprimere voluerunt Calculum differentialem, eam ob cauſam tantum quia illum aſſequi non poterant: Ars enim non habet oſorem, niſi ſui ignorantem; Aggreſſores autem diverſi ſunt, alii modeſti, alii vehementes; ad quos priores refero NIEUWENTIIT, eumque laudo, quod ita moderate procedit. Optarim interim ut mihi contingat videre ejus duos Libros.

Forte fortuna in manus meas incidit ſecunda Editio *Medicinæ Mentis* Domini DE TSCHIRNHAUS: miror & ego, qui fieri potuerit ut inſufficientem dederit enumerationem curvarum algebraïcarum, ſiquidem ſtatim ad oculos cuilibet patet, omnes illas omiſiſſe, quarum æquationem ingrediuntur diverſæ potentiæ ipſius *y*. Cæterum ejus librum obiter quidem perluſtravi; modus tamen ſcribendi non ubique placet, dum ſuos errores olim commiſſos palliare, propria inventa, ut ut ſatis communia, exaggerare, aliorum vero imminuere tam ſcite novit. Non puto ope focorum, ut quidem jactat, omnes curvas & vel ſolas algebraïcas conſtrui poſſe. . . . .

. . . .

Cæterum optime me mones, ut nonnihil temporis etiam Medicinæ meditandæ conſervem; ſed excuſabis me, cum noveris meditationibus aſſiduis a tenera ætate adeo me tradidiſſe, ut inde mea conſtitutio corporis delicata admodum facta ſit, quæ non permittit ut actionibus, quæ non quidem mentis, ſed corporis applicationem poſtulant diu immorer. Hinc [quod doleo] ægre feror ad diuturnam lectionem librorum, ad ſcribendum, ad calculandum, verbo, ad omnia quæ corpus & inprimis oculos fatigant. Ob hanc rationem

nem paucos omnino evolvi authores, imò nequidem Carteſii *Geometriam* attente me perlegiſſe aſſerere poſſum; præcipua namque quæ in Matheſi facio inventa, inter nocturnas horas [quas jam lecto decumbens ſomno ſuffurari ſoleo, quod meditationibus commodiſſimum videatur] mihi ſola attentio ſuggerit; nullo plerumque arrepto calamo ad faciendum calculum; quem licet prolixiſſimum, ſola mente, longe expeditius inſtituo, quam ſi notas in chartam conjicerem. 1695 Jul.

Cum nuper meditarer ſuper rectificatione Curvarum, inveni modum generalem & promptum, data curva qualibet, conſtruendi curvam aliam, quæ cum propoſita ſit æqualis arcui circulari. Unde determinare me poſſe puto, utrum curva aliqua ſit rectificabilis, vel ſaltem cum circulo comparabilis, nec-ne. Si mihi tempus ſuppetierit, aliquid de hoc ad *Acta* * referri curabo. Ex *Hollandia* intelligo Nob. Hugenium, non quidem mortuum, ſed per integrum quadrimeſtre jam graviter decumbere; ex *Gallia* vero mihi ſcribitur illum in mentis impotentiam incidiſſe, quod ipſi jam olim etiam ſolemne fuiſſe *Pariſiis* audivi. Precor Deum ut incomparabili Viro, & mentis, & corporis ſanitatem quamprimum reſtituat. Vale & ama, Vir celeberrime.

Tuum ad officia paratiſſimum

J. Bernoulli.

P. S. Haſce jamjam itineri traditurus, Tuas 5°. Julii datas accipio. Gratias debitas refero, pro congratulatione, qua vocationem meam comitaris, Tibi viciſſim proſpera quæque precor. Domino *Marchioni* Hospitalio dudum promiſi, me, ſi abſque uxore proficiſcar, iter ſuſcepturum *Pariſios*, Dicas mihi, quæſo, qua ratione nunc fieri poſſit, ut & tua præſentia mihi ſane ſuper omne gratiſſima frui detur; ita tamen ut immenſas itineris ambages evitem; quæ quidem

* *Meditatio de Dimenſione linearum curvarum per Circulares* Acta Erudit. 1695. Aug. p. 374, vel Opp. Tom. I. N°. XXVI. pag. 142.

me non impedirent, ſi modo id commode, & ſine periculo, fieri poſſet. Cætera quæ me jubes omnia fideliter exequar, ut jam ſupra innui. . . . .

. . . .

EPISTOLA XV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De HOSPITALIO. *Difficultatis circa punctum regreſſus Solutio. De Curvis tranſcendentibus, annon percurrentes omnes. De oſculis curvarum. De* TSCHIRNHAUSIO. *De viribus corporum vivis. De* HUGENIO.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

1695 Jul. CUm Te diſceſſum e Patria meditantem oporteat occupatiſſimum eſſe rebus neceſſariis & propriis; intempeſtivum, imo iniquum foret ingerere Tibi aliena, & pertinentia ad internum illud mentis theatrum, quod externa quiete indiget. Itaque pleraque hujus Epiſtolæ differas licet, dum vacabit examinare. . . . .

De me in itinere adeundo non erit cur ſis ſollicitus, quoniam ubi *Groningæ* eris, ſatis ad ea ſe ſe per otium occaſio dabit; cum non adeo magno hinc intervallo tunc ſis abfuturus. Itaque quanquam non facile venire huc poſſit hoſpes gratior, ferenda tamen eſt mora neceſſaria. Ubi ad Illuſtriſſimum HOSPITALIUM perveneris, cultum a me Tuo, quæſo, teſtimonio confirma. Mirum eſt ſolum ipſum in *Gallia* in Geometriæ profundiora penetraſſe; dum tot alii, qui ab his ſtudiis etiam præſidia vitæ petunt, inter vulgares notitias torpent. Itaque magna nobis ab ejus ingenio adhuc promitto.

De Medicina optarim ut ſis ſollicitus, vel Tui ipſius cauſa, non quaſi ego Te velim ad praxim illam faſtidioſiſſimam damnari, ſed quod

quod putem meditando a Te magna quædam erui poſſe ad interiora naturæ cognoſcenda, quibus praxis ipſa juvetur. Nam quæ hactenus Cartesius, vel alii, in Phyſicis dedere, parum admodum ad uſum faciunt. 1695 Jul.

Mathematicis nolim ut nunc mentem occupes; volo tamen paucis tangere loca Litterarum Tuarum, quæ id poſtulare videntur; de quibus aliquando cogitabis cum plus otii nactus eris. Ubi comparationem illam inter polynomii potentias & rectanguli differentias porro proſecutus fueris; ſpero Te nos reperta Tua ignorare non paſſurum. Ego quoque per otium de re tanti momenti cogitabo. Elegantiſſima interim methodi hujus noſtræ mirabilis confirmatio, novo hoc ſeriem tuam prodeundi modo, ſeſe prodit. Quod difficultatem attinet lineæ unius continuæ ex Circulari & Cycloïdali compoſitæ, non puto nos ea re turbari debere; cum revera unius lineæ perfecta generaliſque notio non detur, quæ vetet partem ipſius A uniri cum parte ipſius B; & quæ naturæ ſunt diverſiſſimæ, certis deſcribendi modis, ſæpe unam componant. Ubi ſuo tempore tibi vacaverit, gratum erit noſſe paulo diſtinctius, quæ contra Dnum. Craigium ad Dnum. *Marchionem* Hospitalium ſcripſeris.

Cogitandum puto, annon omnes lineæ tranſcendentes ſint ſimul percurrentes; licet nondum id nobis ſemper ſit exploratum; quemadmodum certe omnium illarum, quæ a Circuli & Hyperbolæ quadratura pendent, nota nobis ratio percurſus. Artis jam foret, ſimile quiddam & in aliis invenire. Eſtque id ipſum ex meis deſideratis unum, quæ vobis valentioribus, perſpicacioribuſque commendo.

Quod controverſiam de radicibus oſculi attinet, ſcito me jam dediſſe manus, &, ante dies complures, iis quæ *Frater* tuus vir egregius reſponderat, olim perfunctorie, ſed nunc occaſione præcedentis Epiſtolæ Tuæ curatius inſpectis, omnino deprehendiſſe veriſſima ejus monita fuiſſe: jamque Dno. Menckenio ſcripſiſſe, ut retractationem meam inſerat *Actis*, * quo *Frater* tuus candorem meum intelligat. Vereor enim ne ſequius de me exiſtimaverit,

L 2 quem

* 1695. Aug. pag. 371, verſus medium.

1695 Jul. quem forte credidit palliare errorem voluiſſe. Cum tamen dilatæ agnitionis non alia fuerit cauſa, quam diſtractio animi, longe diverſa ſtudia plerumque volventis. Hoc rogo, ut ei cum ſalute plurima ſignifices. Nullas equidem hactenus ab eo accepi litteras; ſed tamen nec velim ei laborem ſcribendi fortaſſe ingratum imponi.

Si rationem invenires determinandi, quæ curva ſit rectificabilis, vel per ſe, vel ſaltem cum circuli arcu; rem maximi momenti in hoc negotio præſtares. Itaque hortandus es, ne hujus meditationis obliviſcaris.

Aliquid egregium dediſſet Dnus. Tschirnhausiùs, ſi oſtendiſſet modum, data linea algebraïca, inveniendi ejus focos, ſeu modum deſcribendi lineam per fila circa quædam puncta fixa, per convergentes, aut divergentes, aut vicarias iis parallelas, aut oſtendendi impoſſibilitatem. Equidem poteſt eo perveniri, ſi calculo deducamus curvas ex focis, & æquationes ad curvam inventas comparemus datæ; ſed ego optarem Methodum directiorem & breviorem. Modus, quo ipſe percurrentes cum algebraïcis comparat, coactus eſt, & in ſpeciem detortus. Ego majores ex nova Libri ejus Editione progreſſus expectabam. Præclara tamen in Phyſica experimentali obſervaſſe puto; quæ vellem ut ederet, potius-quam Geometricis ſolis immoraretur, in quibus mihi optimas vias ingredi non videtur, dum commodas meditandi rationes ab aliis monſtratas evitare affectat.

Nunc venio ad controverſiam inter nos agitari cœptam, de æſtimatione potentiæ motricis; ſperoque nos rectiſſimam viam terminandæ ejus ingreſſos, per penetrationem ſcilicet in medium Elaſticum, aliterve æqualiter ubique reſiſtens. Sed opus eſt, ut rem ordiar paulò altius. Aio igitur, in univerſum, Artem æſtimandi in eo conſiſtere, ut omnia reducamus, quoad licet, ad menſuram quamdam congruam, cujus ſimplici repetitione ſit opus, ut in numeris eſt unitas Itaque concipiamus jam corpus B, in medio liberrimo, ſine ullo impedimento moveri, certa velocitate, ut a, & ſucceſſive aliquot globis inter ſe æqualibus, & ejuſdem materiæ, nempe L; M; N, &c. eundem dare gradum velocitatis, ut e, atque hoc effectu, eoque ſolo peracto, conquieſcere, omni vi agendi

omiſſa

Digitized by Google

omiſſa & huc impenſa; tunc dico unum ex globis, motum cele- 1695
ritate *e*, quam accipit, poſſe haberi pro menſura potentiæ; Et Jul.
cum omnium globorum L, M, N, æqualis ſit potentia, & aggregatum potentiæ omnium, id eſt, totus effectus cauſæ toti, ſeu potentiæ, corporis B, in hunc quippe effectum impenſæ, æquetur; [quod unum ſuppono, ſine quo nulla erit poſſibilis virium æſtimatio,] ſequetur potentiam corporis B, velocitate *a* præditi, exprimi per potentiam globi L, moti velocitate *e*, numero globorum multiplicatam, ſeu potentiam corporis B eſſe ad potentiam globi L, ut numerus globorum eſt ad unitatem. Hinc porro, ſi aliud ſumatur Corpus C, motum celeritate *b*, quod itidem vim ſuam exacte conſumat in globorum dictorum numerum certum, dando cuivis velocitatem *e*; tunc dicam ego potentias Corporum C & B ita eſſe inter ſe, ut ſunt numeri globorum æqualium in velocitatem *e* concitatorum. Sed jam pro globis æqualibus, certa velocitate præditis, aſſumamus alios effectus æquales repetitos, exempli gratia, certa pondera ad certam altitudinem elevanda; dico nos eam proportionem potentiæ, quam per viam præcedentem globorum, pure mechanicam, nihilque phyſicum involventem conſecuti ſumus, etiam conſecuturos, ſi jam gravitatem adhibeamus. Nempe finge (*Fig.* 22.) λPL normam, ſeu angulum rectum, ita ut pertica TAB.IV.
λP ſit verticalis, & PL horizontalis, ſuſtinens grave L; idemque eſſe in normis μQM, νRN, &c. ſuſtinentibus gravia M & N; quæ gravia ſint æqualia, & per omnia ſimilia inter ſe, ceu globi, qui ante; & normæ ſint etiam per omnia ſeſe eodem modo habentes, ita ut λ, μ, ν, ſint in eadem recta horizonti parallela, & L, M, N, itidem in eadem; patet corpus B incurrens ſucceſſive in perticas λP, μQ, νR, quas fingimus eſſe lineas rigidas, ponderis & reſiſtentiæ expertes, elevare hos globos graves L, M, N, ad eandem altitudinem, veluti L ad altitudinem (L) unde globus L elevatus ad (L), & delabens per arcum (L) S deveniet in horizontem TS, vel LQM; ibique procurret ea velocitate, quam poſtulat deſcenſus altitudo, & quam adeo dedit ipſi corpus B, elevando; idemque erit in cæteris M, N, adeoque perinde eſt, ac ſi æſtimemus numerum gravium æqualium ad eandem altitudinem elevato-

1695 Jul. rum, an vero corporum æqualium numerum eandem velocitatem nactorum; ſi ſcilicet tantus ſit aſcenſus, ut præciſe illam velocitatem producere poſſit. Unde intelligitur poſſe nos tuto adhibere gravium æſtimationem, ad æſtimandam potentiam. Eſt autem gravitatis conſideratio pulchre apta ad hanc æſtimationem; quia in homogeneas partes commodiſſime dividi poteſt. Finge ſcilicet B conſumere potentiam ſuam incurrendo in duas perticas λ & μ, ſed C incurrendo tantum in unam λ, utique dupla erit potentia ipſius B, at potentia ipſius C erit tantum ſimpla. Hinc patet potentiam ipſius B, quæ elevat duas libras L & M, ad altitudinem unius pedis, ſi (L) vel (M) ponamus pedali altitudine eſſe ſuper horizontem L M, eſſe duplam potentiæ ipſius C, quæ elevat ſolum unam libram L ad altitudinem unius pedis; ſimiliter etiam hinc ſequitur, potentiam, quæ elevat libram ad duos pedes, eſſe duplam potentiæ quæ elevat libram ad unum pedem. Nam finge grave L, elevatum incurſu ipſius B in normam λ, tradi in (L) ipſi normæ μ, facili quadam connexione ſeu machinatione, ut ejus ope rurſus tantundem elevetur ubi B in μ incurrerit; patet B non minus integram ſuam vim conſumere hoc modo quam ante, nihil enim refert, ſive (L), ſive M, ad pedem ſecundo incurſu elevet, cum a normæ ipſius, machinationiſve reſiſtentia animus abſtrahatur. Itaque potentia ipſius B conſumitur in elevationem ipſius libræ ad pedes duos; unde ſequitur porro etiam ejuſdem potentiæ eſſe elevare libram ad duos pedes, cujus eſt elevare duas libras ad pedem unum.

Jam veniamus ad elaſtra, ſeu ad medium elaſticum; vides facile TAB.IV. quo tendam; nempe finge (*Fig.* 23.) L λ, M μ, N ν, eſſe elaſtra æqualia, & ſimilia, eodem modo tendenda procurſu mobilis B: utique [ex principio æſtimandi noſtro] potentiam ipſius B æſtimabimus numero talium elaſtrorum æqualiter tendendorum, totam ejus potentiam in hoc unum conſumentium. Pono autem ejuſdem potentiæ eſſe elaſtrum aliquod tendere, & grave quoddam attollere ad altitudinem, ex qua cadens id ipſum elaſtrum ſic tendere poſſit; ſive ejuſdem eſſe potentiæ Elaſtrum aliquod mediate, vel immediate, ad determinatum tenſionis gradum producere:

ducere: Ex principio ſcilicet noſtro, quod effectus integer ſuæ cauſæ æquipolleat, ſeu quod æquipollentia ſint, quæ idem poſſunt. Hinc neceſſe eſt, ut pro elaſtris ſubſtitui poſſint pondera, aut vice verſa. 1695 Jul.

Itaque ut nunc ad id veniamus, de quo proxime inter nos agebatur; neceſſe eſt corpus B, habens celeritatem ut duo, quadruplo altius penetrare poſſe in medium, talibus elaſtris æqualiter diſſeminatis inſtructum, quam corpus æquale D, habens celeritatem ut unum. Nam ſi corpus D poteſt attollere unam libram ad altitudinem pedis, potentiam ſcilicet ſuam conſumendo; poterit corpus B duplæ celeritatis attollere unum libram ad quatuor pedes, vel quatuor libras ad unum pedem, vel ut utrumque una locutione complectar, poterit quater attollere unam libram ad unum pedem, antequam vim ſuam conſumat; vel quod idem eſt, ſi unum elaſtrum poſſit intendi, lapſu libræ ex pede; conſequens eſt B celeritate dupla poſſe quatuor elaſtra intendere; ſi D æquale, celeritate ſimpla, tantummodo intendat unum.

Ita ratiocinationes ſemper ſibi reſpondent & ſatisfaciunt. Si vero non procederent, & alia proportio virium, inter duo corpora datæ celeritatis, oriretur, conſumendo ipſa in Elaſtris intendendis, quam prodiret in ponderibus attollendis, aut in motibus imprimendis, caderet tota Scientia Dynamica; ſeu impoſſibile eſſet vires æſtimare: imo potentia non eſſet quantitas certa, ſed quiddam vagum & abſonum. Sed hæc fuſius explicui, ut aliquando per otium examinares. Res enim magni momenti eſt.

Cæterum, ſi ad priora nuper reſpondere viſus ſum ſolito excitatius; hoc ſtudio augendi utriuſque noſtrum attentionem factum, Tibi facile ſpero, re conſiderata, perſuadebis. Ego facillime objectiones fero; a Te vero adeo non refugio, ut potius expetam; quod ſciam mihi fructuoſas eſſe ſolere, præſertim ubi animum intenderis. Et quanquam in re, diu a me conſiderata, aliquid præſtitiſſe ſperem; facile tamen agnoſco, eo Te ingenio eſſe, ut diuturnos labores noſtros, brevi non æquare, ſed & vincere poſſis. Puto autem Dynamicum negotium a Te feſtinatius tractatum fuiſſe; quod omnia tam pulchre determinata haberi poſſe, quam mihi

1695 Jul. mihi deprehendere viſus ſum, non ſuſpicabaris. Quod ſupereſt, vale, & ubicunque ſis, me ama, & felicibus utere fatis. Dabam

Hanoveræ 29. Jul. 1695.

P. S. Incomparabilem HUGENIUM obiiſſe haud dubie intellexiſti. Quanta hæc ſit jactura dici ſatis non poteſt; ob ſummum viri judicium, cum maxima, profundiſſimaque rerum notitia conjunctum; Utinam, quemadmodum ſpero, reperiantur in ejus ſchedis, ex quibus pars eorum, quæ meditatus eſt, erui & publico commodo produci in lucem poſſit. Dolendum eſt quod vis morbi, quæ mentem obſuſcaverat, non permiſit ut ipſe, quod optimum viſum fuiſſet, ea de re non ſtatuerit, atque ordinarit. Niſi forte [ut fieri ſolet] paulo ante mortem ad ſe rediit, ultimamque voluntatem ſuam aperuit; quod ſi factum eſt, non diu latebit.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA XVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Halenſis *Profeſſio* BERNOULLIO *offertur*.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

1695 Sept. CUm forte *Berolinum* nuntiaſſem Te a *Groningenſibus* vocatum eſſe; juſſu Illuſtriſſimi DANKELMANNI, mihi commiſſum eſt, ut inquiram annon commode effici poſſit, ut *Halam Saxonum* potius accedas; Itaque volui hoc Tibi ſignificare, ut mihi, ſi videbitur, mentem Tuam amica fiducia aperias, ſtatumque Profeſſionis *Groningana*, atque emolumenta indices; ita enim fortaſſe

taſſe in Te exorando elaborare majore cum fructu poſſem. De cæ- 1695
tero, me ad præcedentes meas refero, incertus an hæ Te *Baſileæ* Sept.
ſint inventuræ. Vale.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{5}{15}$ Septemb. 1695.

Doctrinæ tuæ
æſtimator perpetuus
Godefridus Guillelmus
Leibnitius.

P. S. Ubi mea de penetratione in medium elaſticum reſponſa expendere vacaverit, ſententiam noſſe velim.

Nolim, ut mea de quibus a Te in prioribus ſcripſeram, vel minimum officiant tempori Tuo; cujus nunc potiſſimum habenda ratio eſt, dum iter magnum paras. Itaque ſi [quod ex ſilentio ſuſpicor] Tibi nunc ad hoc animum adhibere non licuit, ſcito ea me æquitate eſſe, ut nolim commoda mea cum aliorum incommodo conjungi. Fortaſſe aliquid ex Te didicero, cum tempus & locus ſcribere patientur.

EPISTOLA XVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Proficiſcitur Groningam. *De Studiis Mathematicis apud Gallos. De Oſculis Curvarum. De comparandis Curvis cum arcubus circularibus. De viribus corporum. De* HUGENIO.

Vir Celeberrime & Ampliſſime, Fautor Honoratiſſime.

1695 Sept. PUblicas Vocationis Litteras, quod bono ſit omini, accepi ipſo meo natali die, vigeſimum nonum aggrediens annum. In eo ſum, ut nunc quovis die relicturus ſim patriam, quod ſane intra octiduum fiet: Tandem uxorem induxi, ut ſe mihi præbeat comitem in itinere, unà cum puerulo noſtro.............. Hanc ob cauſam, iter non ſuſcipiemus per *Galliam*; ſed recta *Francofurtum* petemus. Cum advenero *Groningam*, de adventu meo Te quantocius certiorem reddam; ideoque reſponſionem meam eouſque differas. VITODURANI Chronicon, nec apud *Einſidelenſes* reperire eſt, ut ex Bibliothecarii, cui ipſemet ego ſcripſi, reſponſione, quam Tibi mitto, videre poteris. Jam tertia vice *Veſuntionem* ſcribi curavi, ſed nihil adhuc venit.....................

. . . .

Ubi *Groningæ* fuero, omnia tentabo ut mihi aliquando Te videndi copia detur; hoc enim unicum eſt, quod ardenter deſiderem. Si ſolus profectus fuiſſem; multos Patronos, quos in itinere adiiſſem, mihi propoſueram: ſic ſpe excidi perveniendi ad Dnum. HOSPITALIUM, quem etiam propediem rus abiturum intelligo. Mirum non eſt illum ſolum in *Gallia* in Geometriæ profundiora penetraſſe; ideo enim tot alii, qui his ſtudiis incumbunt, inter vulgares notitias torpent, quod noſtra non putent eſſe de pane lucrando.

Bono

Digitized by Google

Bono oportet ſint ſigno nati Dni Hospitalius, Varignonius, & pauci alii, quod æquius ſint animati; plurimos enim alios novi, qui ægre & indigne ſatis ferebant, cum de noſtris loqueremur, ut torvus eorum vultus ſatis indicabat: neſcio annon me juvenem, cum hominibus gravibus ita loquentem, audire dedignati fuerint; ita ut inventa Tua forte ab illis benignius recepta fuiſſent, ſi præconem habuiſſent graviorem. 1695 Sept.

Vix puto omnes lineas tranſcendentes eſſe ſimul percurrentes; omnes enim percurrentes, ope Logarithmicæ, conſtruere poſſum; & hoc modo quadraturæ circuli & hyperbolæ, imo omnium ſpatiorum ab invicem dependerent, quod egregium inventum eſſet.

Gaudeo Te nunc nobiſcum in eadem opinione, circa numerum radicum oſculi: certe credideram aliud quid ſubeſſe quòd ita firmiter contrariæ ſententiæ inhæſeras; ſæpe enim contigit, ut rem diverſimode conſiderantes etiam eam diverſo modo concipiamus, licet in puncto quæſtionis conveniamus. Hujuſmodi controverſia agitata fuit inter Clavium & Peletarium, de angulo contactus; quamvis, quod verius videtur, neutrum ejus naturam bene percepiſſe crediderim. Dnus. Hospitalius etiam in noſtram opinionem tranſiit, & miratus eſt Te in re tam clara a nobis diſcrepare.

Fratri reduci ex acidulis retractationem hanc, cum ſalute, a Te ſignificavi; ſe proxime Tibi ſcripturum dicit. Nolui ipſum latere quæ hactenus inter nos agitata fuere, quorum novitate non parum illum commotum ſenſi; præſertim eorum quæ de Polynomii potentiis, & Rectanguli differentiis comparandis invenimus: his enim plane nihil ſimile quid antea inaudierat.

De ratione comparandi curvas cum arcubus circularibus aliquid ad *Acta* * miſi; ſed Speculationem illam, de comparandis Polynomii potentiis cum Rectanguli differentiis, nunc proſequi plane non licet, ob plurima alia negotia quibus diſtringor.

Neſcio cuinam cauſæ tribuam, an ſtupiditati ingenii mei, an vero diſtractionibus animi, quod modum tuum æſtimandi potentias

M 2

* *Meditatio de Dimenſione linearum curvarum per circulares.* Acta Erudit. 1695. Aug. p. 374. Opp. Tom. I. N°. XXVI. pag. 142.

1695 Sept. tias motrices nondum capiam; tertium enim Te hallucinari, abſit ut dicam. Veriſſima mihi videntur principia Tua, nempe effectum integrum ſuæ cauſæ æquipollere; item Corporis B, cujus velocitas *a*, potentiam menſurari debere per numerum globorum L, M, N, &c. quibus eodem velocitatis gradu *e* impreſſo, illud quieſcit; Hinc potentiam Corporis B, velocitate *a* moti, eſſe ad potentiam corporis C, velocitate *b* moti, ut numerus globorum ab illo, ad numerum globorum ab hoc, in velocitatem *e* concitatorum: Hæc, inquam, omnia concedo; imo & hoc quod, pro globis æqualibus certa velocitate præditis, aſſumi poſſint alii effectus æquales repetiti, nempe certa pondera ad certam altitudinem elevanda; & proinde duplam potentiam elevare duplo plura pondera æqualia ad eandem, puta, altitudinem; triplam, triplo plura; quadruplam, quadruplo plura, &c. vel quod eodem redit, ſi loco ponderum æqualium, quæ ſucceſſive elevanda ſunt, ſumamus idem pondus, ſed quod toties elevandum ſit, quot fuerunt pondera, habebimus utique eundem effectum, & proinde æqualem potentiam: nihil enim refert, ſive ſemper idem pondus ſucceſſive novum ictum recipiat, ſive aliud æquale ſubſtituatur. Sic facile concedo potentiam, exempli gratia, quadruplam elevare unum pondus, quater, ad eandem, vel æqualem altitudinem, id eſt, pondus illud aſcendet *per vices* ad altitudinem quadruplam; ſed [in quo controverſiæ cardo verſari videtur] nego illud pondus, ſi potentiam motricem, quam per vices exhauriebat, uno ictu abſumat; ad altitudinem tantum quadruplam *uno ſaltu* aſcendere. Differentiam omnino faciendam puto inter elevare pondus aliquoties ad altitudinem, & inter elevare idem pondus ad eandem altitudinem toties ſumptam; non enim eadem potentia utrobique requiritur; contra quam Tu ſtatuere videris, quando dicis, *unde ſequitur ejuſdem potentiæ eſſe elevare libram ad duos pedes* [ego addo duabus vicibus] *cujus eſt elevare duas libras ad pedem unum.* Aliter ſe habet in medio æqualiter elaſtico; cum enim in eo elaſtra æqualia, & ſimilia, æqualibus intervallulis ſint diſſeminata; haud dubie, dupla potentia duplo plura elaſtra deprimentur, & proinpe ſpatia percuſſa erunt in ratione potentiarum. In hoc itaque convenimus;

venimus; ſed & hoc ipſum arguit elevationes ponderum æqualium, uno ſaltu factas, non eſſe horum ponderum potentiis proportionales; nam ſi gravitatis cauſam elaſtrorum reſiſtentiis comparemus, videbimus elaſtra iſta, id eſt, ſollicitationes ad gravitatem, non fieri ſpatii percurſi, ſed temporis intervallulis æqualibus; ita enim gravitas explicatur: ceu notum eſt Galilæum accelerationes gravium deſcendentium deduxiſſe ab impulſionibus materiæ ambientis, ſingulis momentis æqualibus grave ſtimulantis. Hoc poſito, evidentiſſimum eſt pondus, aſcendendo ad quadruplam altitudinem, non niſi duplo plures impulſiones ſuperare; ſiquidem etiam nonniſi duplum tempus requiratur, & tempora ſint ut numerus impulſionum. Ergo, ſi ſuperatio unius temporis ſumatur pro communi menſura potentiarum, juxta Tuum ipſum principium, ſequitur ad elevandum pondus, uno jactu, ad altitudinem quadruplam, duplam dumtaxat requiri potentiam; adeoque elevationes eſſe in ratione duplicata potentiarum: & cum elevationes etiam ſint in duplicata celeritatum, potentias eſſe ut ipſas celeritates, & non ut quadrata harum. Sed diutius his immorari non poſſum; quia aliæ cogitationes me ab his abducunt; quamquam plurima adhuc alia habeam, quæ mihi in Tuas partes tranſire non permittunt. Optarim ut ſcrupulum hunc meum diluas, & ingenue dicas, in quo me erraſſe putes; a Te enim doceri mihi ſemper ſumma voluptas fuit. Interim quæ a me Tibi objectiones fiunt, non objiciendi, ſed diſcendi gratia, factas puta: non dubito quin & Tibi interdum utiles eſſe poſſint.

1695 Sept.

Triſtiſſimum nuncium, de obitu Incomparabilis Hugenii, jam ex *Belgio* acceperam. Ego, ut puto, præ aliis ſummam feci jacturam, ſi vel ſolam eum videndi ſpem amiſſam conſiderem. Dnus. Hospitalius mihi ſcribit habuiſſe illum *66* annos, & *Fratri* ſuo exheredato ſubſtituiſſe heredes nepotes ſuos. Solatium nobis eſt, quod ante mortem de Manuſcriptis ſuis optime diſpoſuerit: nominavit enim, ut audio, duos Mathematicos *Batavos*,† quibus ſchedas ſuas committi juſſit, ut præſtantiora typis mandentur: Quantum damnum ſi ea intercidiſſent!

J. Bernoulli.

† Volderum & Fullenium.

EPISTOLA XVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Tranſcendentes Curvæ ammon percurrentes omnes. De viribus corporum & potentiæ æſtimatione ex ponderum elevatione. De actione gravitatis. De HUGENIO. *De Serie ſummatoria. De* VOLDERO.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1695 Octob. QUod vigeſimum nonum ætatis annum ingredienti Tibi, ipſo natali die, vocatorias *Groninganorum* Litteras redditas ſcribis, facit ut Tibi gratuler de tempore hactenus tam bene collocato. Itaque optima quæque porro non poſſum non ominari, ac vovere. Gratias ago, quod *Veſuntionem* pariter, & ad *Einſidelenſes* ſcripſiſti, aut ſcribi curaſti. *Abbas* NICASIUS, *Divionenſis* Canonicus, Vir Doctus & Clarus, mihi *Præſidis* BOISOTII litteras ad ſe pollicitatorias nuper miſit. Nec dubito quin ſit promiſſis ſtaturus. . . . .

Nondum pro certo poſſum affirmare omnes tranſcendentes ſimul eſſe percurrentes, ut appellas, id eſt per puncta ſecundum Geometriam ordinariam deſignata deſcriptibiles; eſt tamen cur de plurimis ſuſpicer ita eſſe, nec dum video quid de reliquis prohibeat. Id fateor faſtigium foret Geometriæ tranſcendentis, ſi huc res, actu ipſo, deducta habetur, ut alias dicere memini. Nondum tamen oſtenſum eſt, neceſſe eſſe ut omnes percurrentes ad quadraturam Circuli & Hyperbolæ reducantur, cum ſint reſolutiones algebraïcæ, quæ, nec per anguli, nec per rationis ſectionem conſtrui poſſunt; quibus duabus, Circuli & Hyperbolæ quadratrices per puncta deſcribuntur; & cæteras tamen itidem ad curvarum per puncta

punčta inventionem adhiberi, tranſeundo de gradu in gradum, non video quid prohibeat. 1695 Octob.

Quod ad æſtimationem potentiæ attinet; videris mihi tam prope nunc acceſſiſſe ad mentem meam, ut tenue illud velum intergerinum, quod nos ſeparat, facile tolli poſſe videatur. Hoc unum Te moratur, quod aliam potentiam requiri putas, pro elevando pondere L ad altitudinem P Q quater repetitam, ſeu ad altitudinem P T quadruplam ipſius P Q, percurſam quatuor vicibus, quam quæ requiritur ad idem pondus A elevandum ad altitudinem P T, [vel ei æqualem,] percurſam una vice. Sed ubi aliquando de his meditari attentius vacaverit, ipſe credo miraberis hic Te diſcrimen ſuſpicari potuiſſe. Ita enim comparata eſt natura, ut ſive per vices, ſive uno tractu agere aliquid coneris, nunquam majus eadem vi efficias; alioqui nihil foret facilius motu perpetuo mechanico. Nec plus intereſt, quam inter pecuniam minutatim, per obolos, ſed ſæpe repetitos expenſam, & eandem magnis ſummis, ac per talenta effuſam. Ipſe etiam vides pondus L, ad altitudinem P T uno tractu aſcendens, revera non ſimul, ſed per gradus P Q, Q R, R S, S T, eo devenire; nec aliud eſſe diſcrimen, quam quod nullum ita eſt intervallum inter vices.

Poſſum autem intervalla inter aſcenſiones interponere, ut tamen fateri oporteat nullum naſci diſcrimen; veluti ſi idem grave (*Fig.* 24.) primum horizontaliter currat per 1. 2; inde inclinate aſſurgat per 2. 3, cujus altitudo perpendicularis æquet P Q; deinde rurſus horizontaliter eat per 3. 4, & inclinate aſſurgat per 4. 5, cujus altitudo perpendicularis æquet Q R; & ita porro per 5. 6, 6. 7; 7. 8, 8. 9. Sed novam diſtinctionem, opinor, afferes, diceſque, hoc Te concedere, ſi primo impetu concepto, pondus L rem peragat; ſecus vero, ſi denuo ſit nova impreſſione excitandum. Equidem ratio aliqua diſtinctionis hujuſmodi expeti poſſit; quam ego nullam video, niſi quod permiſſum eſt reſpondenti rigore ſummo agenti τὴν θέσιν διαφυλάττειν, quamdiu etiam citra veriſimilitudinem poteſt. Unde, vel ideo quod alias admittenda mea concluſio foret, diſtinctionem Tibi adhibere licere putabis, donec a me locum eam non habere oſtendatur. Volo tamen, hac quoque Tab. IV.

1695 Octob. quoque in re, agere liberaliter, ut demonſtratio tanto ſit certior, nec tantum probabilibus argumentis nitamur.

Equidem cum conceſſeris globum majorem æquipollere globis minoribus ſimul ſumtis, quibus in motum concitatis quieſcit; poſſes agnoſcere nihil intereſſe ad potentiam, conjuncta ſint, quæ producuntur, an diſgregata. Sed placet tamen id de quo inter nos agitur ita per ſe demonſtrare. Aio igitur, ejuſdem potentiæ eſſe, TAB.V. efficere ut pondus L (*Fig.* 25.) continuo tractu aſcendat ad altitudinem PT, & efficere ut ad eam aſcendat quatuor vicibus repetitis PQ, QR, RS, ST, nova ſemper excitatione. Ponamus pondus L tantam celeritatem habuiſſe, dum in horizonte movebatur, ut impetu inde concepto aſſurrexerit continuo tractu ad altitudinem PT; jamque inde rurſus deſcendere, & filum ſecum trahere, incedens per trochleolas *x* & *y*, & poſtremo volutum circa trochleam *z*; quo attracto, ſimul trahatur ſtilus F depreſſurus elateria G, H, I, K. Ponamus autem pondus L cadens ex altitudine TS præciſe tantum acquirere impetus, quantum opus eſt, ut ſtylus F ſuperans elaterium G perveniat ex 1 F in 2 F; ſimiliter Elateria H, I, K, ſuperari tranſitu ſtyli 2 F 3 F, 3 F, 4 F, 4 F 5 F, orto ex deſcenſibus SR, RQ, QP; ita ut præciſe, ubi pondus pervenit in P, impetu ejus per deſcenſum concepto, rurſuſque per tenſionem elaſtrorum exhauſto ſtylus pervenerit in 5 F. His poſitis, patet mox, unoquoque Elaſtro ſucceſſive liberato, poſſe per vices globum L rurſus ad altitudinem PT reſtitui; cum unum quodque ad quartam altitudinis partem attollendi grave vim habeat, ex qua ſcilicet, ipſo labente, fuit tenſum; idque ope hujus ipſius fili & trochlearum præſtari, ſi elaſtrum K, liberatum rurſus ac ſe ſe erigens, reducat ſtylum a 5 F ad 4 F, elaſtrum I à 4 F ad 3 F &c. Cum igitur potentia globi gravis L, in horizonte procurrentis, ante omnem aſcenſum tanta ſit [ex hypotheſi] ut poſſit elevare pondus L ad altitudinem PT; eademque tanta ſit, ut poſſit præciſe tendere quatuor elaſtra G, H, I, K; erit ipſius L potentia ante aſcenſum potentiæ tenſionis quatuor elaſtrorum æqualis; ſed hæc poteſt præciſe, per vices, elevare pondus L ad eandem altitudinem

Digitized by Google

tudinem P T. Ergo potentiæ pondus L elevandi ad altitudinem PT, uno tractu, aut per vices, ſunt æquales. 1695 Octob.

Et generaliter hanc æqualitatem tam certam arbitror, ut judicem alioqui, quemadmodum jam innui, nihil facilius fore, quam motum perpetuum mechanicum obtinere, ſi alterutrum altero prævalere dicas; ut Tibimet conſideranti manifeſtum fore arbitror, cum alterum alteri, nullo negotio, ſubſtitui poſſit. Quod ſi hæc nondum perſuadent, opus erit ut aliquando paulo diſtinctius explices mentem Tuam, & certo caſu ac ſchediaſmate declares. Fateor enim me in dictis ne minimam quidem dubitandi rationem videre. Proſunt tamen, quæ opponis; vel ideo, quod ita melius video, quibus præjudiciis inprimis ſit occurrendum. Nam quæ Tibi negotium faceſcere poſſunt, multo magis aliis poterunt. Cæterum ipſe rei ſummam tot modis examinatam habeo, & tam diverſis rationibus atque applicationibus ad conſenſum perveni; ut hic paralogiſmum amplius metuere non poſſim. Non eo minus tamen libenter monita, a Te inprimis, audio.

Objectionem ſumis a gravitatis cauſis, ſed eæ, ut ſæpe monui, nil obſtant. Veriſſimum quidem eſt, quolibet temporis momento æqualem fieri impulſionem, ſed ſciendum eſt eam non producere æqualem vim in impulſo, [quippe aliter atque aliter diſpoſito, prout plus minuſque virium jam habet.] etſi æqualem producat gradum celeritatis, quia hæc duo non coincidunt. Itaque hæc objectio principium petit. Nam, ut jam publice monui, Corpus bis A motum celeritate *e*, duplum eſt re & potentia corporis A præditi celeritate *e*; quia bis in eo occurrit A*e*, ſeu adeſt A*e* + A*e*. Sed corpus A motum celeritate bis *e* [ſeu A. bis *e*] non eſt duplum ipſius A*e*; quia, etſi duplicata ſit celeritas, non tamen ſimul duplicatum eſt corpus: potentiam autem tum demum multiplicatam judico, cum aliquid reale, potentiam habens, exacte repetitur, vel multiplicatur: veluti cum [ſive interrupte, ſive continue] datum pondus ad multiplicatam altitudinem, vel multiplicatum pondus ad datam altitudinem elevare licet; unaquæque enim repetitio, pro ſeparato effectu, exacte congruo, haberi poteſt. Itaque, quod, ſecundum meum principium, ſuperationem alicujus

1695 Octob. impulſionis pro menſura ſumi putas, non concedo, nec concedere debeo; ut, eo attentius conſiderato, ipſe animadvertes, niſi ſcilicet omnia ſint in impellente & impulſo eodem modo ſe habentia. Opus eſt pro menſura repeti realem alicujus potentiæ productionem, vel deſtructionem. Intelligo autem potentiam ſuum ſubjectum includentem, ſeu realem repeti, velut pondus elevatum eſſe, elaſtrum tenſum, grave in motu poſitum, ut repetitio ſit omnimoda. Non vero ſufficit aliquid modale repeti, verbi gratia, gradum velocitatis repetitum, corpore non repetito, ſeu plures gradus velocitatis poni in eodem corpore ſimul exiſtentes. Et ſenties experiundo, ſi utaris repetitione reali, omnia conſentire, etiam ſecundum diverſas aſſumptiones; ſi modali, non item: quoniam, in modali repetitione, non omnia paria, ſeu exacte repetita reperiuntur. Et ſuſpicor cætera omnia, quæ Tibi adhuc ſcrupulum movent, ex hoc uno non obſervato profluere; quod apud me veluti primum eſt principium Artis æſtimatoriæ in univerſum, ſeu ſcientiæ de quantitate in genere. Certe hactenus, in hac materia, vix quicquam mihi fuit objectum, quod non jam tum præveniſſem; aut quod per ſe non diſpareat, meditationem proſequendo.

Reapſe etiam comperi, in ſolvendis Problematibus intactis, nonniſi ſecundum principia mea exitum dari. Non tantum enim naſcuntur inde mihi, quæ alii experimentis didicere, aut ex principiis aliis magis limitatis deduxere; ſed & ultra pergere poſſum ad ea in TAB.V. quibus ipſorum principia deſinunt. Veluti ſi (*Fig.* 26.) globus A ſimul incurrat in duos globos B & C, poſſum demonſtrare quid ſit futurum; idque [quod mireris] ex hoc ſolo principio, quod alioqui cauſa & effectus non futuri ſint æquipollentes; ſeu quod tunc, certis hypotheſibus factis, non poſſit poſt concurſum tantumdem ponderis elevari ad datam altitudinem, quantum ante concurſum, vel contra.

Solatio aliqua certe nobis eſſe debet, quod ſcribis HUGENIUM, ante obitum, de Manuſcriptis ſuis edendis conſtituiſſe; gratum erit aliquando intelligere quoſnam conſtituerit ejus rei Curatores. Unum ex iis VOLDERUM eſſe credo, non mediocris doctrinæ Virum, idque litteris ex *Batavis* acceptis mihi confirmatur.

Recti-

Digitized by Google

Rectiſſime factum, quod *Fratri* tuo, ingenioſiſſimo Viro noſtri commercii copiam feciſti. Ita enim communi ope melius proficiemus. 1695 Octob.

Quoniam, ut ſcis, potentiis analogæ ſunt differentiæ, hinc ex ſerie pro potentiis, duxi ſeriem pro differentiis, hoc modo;

$$(x+y)^m = x^m y^0 + \frac{m}{1} x^{m-1} y^1 + \frac{m.\, m-1}{1.\, 2} x^{m-2} y^2, \text{\&c.}$$

Ergo fit $d^m xy = d^m x d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x d^1 y + \frac{m.\ m-1}{1.\ 2}$ $d^{m-2} x d^2 y$, &c. Ubi vertendo d in $\int$, ut ſit $d^m = \int^n$ poſito $n = -m$, fiet $\int^n dzy = \int^{n-1} z d^0 y - \frac{n}{1} \int^n z\, d^1 y$ $+ \frac{n.\ n+1}{1.\ 2} \int^{n+1} z\, d^2 y - \frac{n.\ n+1.\ n+2}{1.\ 2.\ 3} \int^{n+1} z d^3 y$, &c. ubi, poſito dz conſtante, ſummæ ſingulatim iniri poſſunt, & quidem finite, ſi n integer. Similia pro trinomio, vel aliis polynomiis fabricare licet, aliaſque omnigenas analogias comminiſci.

Has jam ſcriptas dimittere diſtuleram, donec diſcerem ubi ageres; nunc cum ex Tuis *Amſtelodamo* * datis libens intellexerim, Te in *Batavis* recte feliciterque appuliſſe, eas ut juſſiſti, *Groningam* mitto.

Boiſotiana quædam ab *Abbate* Nicasio accepi.

Facile judicare poteram, quid de *Halenſi* negotio dicturus eſſes; jamque in eam fere ſententiam *Berolinenſibus* reſponderam de meo.

Volderi, Viri licet egregie docti, judicium de noſtris Methodis non eſt quod nos magnopere moveat; videtur enim in hanc Analyſeos partem minus inſpexiſſe. At Hugenius ipſe, quo nemo melius iſta dijudicare poterat, & cui *Sluſiana*, & multo ampliora erant perſpectiſſima, de præſtantia noſtræ methodi magnifice ſentiebat; idque teſtatus eſt, non tantum litteris ad me privatim datis, ſed & publice in *Lipſienſium Actis.* Hujus ſententiam *Volderiana*

N 2.

* Ex deſunt.

1695 Octob. *deriana* opponi ſufficerit. Si excerpta deſideras ex litteris Hugenii, mittam.

Quod Nieuwentitium in tranſitu non vidiſti, non maggna, opinor, jactura erit, neque enim Tibi prodeſſe colloquium poterat, ſed illi tantum ad converſionem. Quod ſuperet, gaudeo Te nobis propiorem, ut crebrius Tuis fruar; quibus auxilium ſpero in multis, quæ adhuc diverſi generis molior incremento harum litterarum.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{20}{30}$ Octobr. 1695.

Tuus totus

G. G Leibnitius.

P. S. . . . .

Tuam nunc apud Fœderatos *Belgas* habitationem magni uſus fore arbitror, ad Methodi noſtræ propagationem. Cum enim plurimi in *Batavis* Algebram colant, multa utilia dabunt, ubi huc animos converterint. Interim de mea *Infiniti ſcientia* delineanda cogitabo.

EPIS-

Digitized by Google

EPISTOLA XIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Studiis Mathematicis Groningæ. *De tranſcendentibus curvis. De potentiæ æſtimatione* Leibnitio *aſſentitur. De* Hugenio. *De Serie ſummatoria.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

Ecce me tandem aliquantulum liberum à multitudine negotiorum, tam domeſticorum, quam publicorum; quibus hucuſque adeo obrutus fui, ut poſtremarum Tuarum, quas ſub adventum quàm rectiſſime accepi, pene oblitus fuiſſem. Nondum tamen ea tranquillitate fruor, quam optarem, ad Studiis Mathematicis incumbendum, tanta cum libertate, quâ olim *Baſileæ* feceram: nec enim meus amplius ſum; ſed ſi Matheſis hic maxime mihi exercenda ſit, erit id dumtaxat ſtudioſorum in gratiam, quibus, ut jam prævideo, Elementa inculcando maximam temporis partem teram; adeo ut, quo plures forſan ſtudioſi ego eo pauciores facturus ſim progreſſus. Quos putas in *Batavis* Algebram colentes, hic ſane non reperiuntur; imo ne unicum quidem videre adhuc mihi contigit, qui vel mediocris Mathematici nomen mereatur. Ultimus Matheſeos Profeſſor Borgerius jam ante 28 annos, nimirum eodem, ni fallor, anno quo hanc ego ingreſſus vitam terrenam, ille egreſſus eſt; poſt cujus obitum, Sedes Mathematica in noſtra Academia, in hunc uſque diem, vacavit; hinc judica, quantum hæc ſtudia florere potuerint. Si vel unicam haberem cauſam, cur *Hallenſem*, quam obtuliſti, Vocationem huic anteponerem; eſſet profecto liberior & commodior Tecum converſandi copia. Ex quo Patriam deſerui, nihil plane *Actorum* vidi; ſcire cupe-

1695 Decemb.

1695 Decemb. cuperem an quid novi in iſtis prodierit, quod noſtra concernit; & num, inter alia etiam, *Marchionis* HOSPITALII Generalis quadratura Cycloïdum; † cui ego ſubjunxeram quædam de reducendis curvis ad arcus circulares. *

Procul dubio Faſtigium Geometriæ foret, ſi tranſcendentes curvæ ad percurrentes reduci poſſent, id eſt, ad tales curvas, quarum æquationes conſtant terminis ad dimenſiones indeterminatas aſcendentibus. Sic etiamnum ſum in opinione omnes percurrentes conſtrui poſſe, ope quadraturæ Hyperbolæ: Verùm Tu illas latiori ſenſu ſumis. Quadratrix enim Circuli mihi non eſt percurrens; quoniam ejus natura per talem æquationem exprimi non poteſt.

Quæ de æſtimatione potentiæ adducis multum mihi placent, meque proin in Tuam tandem trahunt ſententiam. Aliqui adhuc mihi hærent ſcrupuli quos adimi mihi vellem. Dicis impulſiones materiæ gravitatem cauſantis, ut ut æquales, & æqualem celeritatem in pondere producentes, non tamen producere vim æqualem; interim, ſi conſideretur materia ſubtilis, quæ gravitatis cauſa eſt, moveri celeritate adeo magna, ut pro infinita haberi poſſit [revera talis ſupponi debet, alias enim elevationes gravium cadentium non in infinitum augerentur,] reſpectu illius quam pondus aſcendens vel deſcendens habet; conſiderandum erit pondus tanquam in quiete, quemcunque habeat celeritatis gradum; ita ut, hac ratione, impulſiones etiam ſemper æqualem vim in pondere producere cenſendæ ſint; eodem plane modo, quo concipio globum ſclopeto exploſum Teſtudinem æque fortiter ferire, ſive quieſcat omnino, ſive prorepat, nunc celerius, nunc lentius; omnis enim Teſtudinis celeritas nihil eſt, reſpectu celeritatis globi.

TAB. V. Secundo; concedo pondus L (*Fig.* 25.) aſcendens uno impetu per 2.3, 4.5, 6.7, 8.9. & dein iterum deſcendens, poſſe tot elaſtra G, H, I, K, deprimere, quot ſufficiunt ad idem pondus ad eandem altitudinem per intervalla attollendum; quia quodlibet elaſtrum depreſſum, ſe ſe reſtituendo, eam tribuit ponderi vim, quam ab illo accepit,

† Prodiit *Actis Erud.* 1695. Aug. pag. 372.
* *Act. Erud.* 1695. Aug. p. 374. Opp. Tom. I. N°. XXVI. p. 142.

accepit, & ſic gradatim aſſurget per altitudines PQ, QR, RS, ST, per quas prius deſcentit. Sed hoc demonſtratum mihi cuperem, quod grave L, eodem impetu quo aſcendit per altitudinem 2.3, 4.5, 6.7, 8.9; etiam poſſit deprimere totidem elaſtra, quot nempe deſcendendo depreſſit: hoc ſi demonſtraveris, omnino in Tuas tranſibo partes. Poſſibilitas motus perpetui mechanici, quam ex negatione hujus deducis, nihil facit ad rem: rigoroſus enim adverſarius illam poſſibilitatem ſtatuere poſſet. 1695 Decemb.

Tertio; omnes Regulæ Communicationis motus, a Cartesio, aliiſque, exhibitæ, & hucuſque receptæ, a Tua hypotheſi ſubvertuntur. Exempli gratia, ſi globus incurrat in alium æqualem & quieſcentem, celeritate ut 1; poſt ictum ambo juncti pergerent moveri celeritate non ut $\frac{1}{2}$, ceu hactenus creditum eſt, ſed ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$; hac enim celeritate, uterque ad dimidiam aſcenderet altitudinem, ad quam totam prior globus, integra ſua celeritate, aſcendiſſet: ſic, pro omnibus aliis, novæ Regulæ communicationis motûs fabricari deberent, ſervando Tuum principium, Vires eſſe in ratione compoſita ponderum & altitudinum, ad quas celeritatibus ſuis aſcendere poſſent. Sic facile divinari poterit, quid ſit futurum ſi globus A ſimul incurrat in duos globos quieſcentes B, & C; ſi enim celeritas globi A, ſit ut 1, erit celeritas poſtfutura cujuſque globi, ut $\sqrt{(A:(A+B+C))}$, ſuppoſito globos nullam habere celeritatem, & omnes tres eſſe in rectâ linea. Illos autem, in ſchemate Tuo, non ponis in recta linea, & ſic Problema mihi non videtur determinatum, ſi globus impingens oblique impingat in reliquos duos; aut ſaltem mentem Tuam non ſatis aſſequor.

Quarto: Diſtinctio Tua, inter potentiæ productionem realem & modalem, valde placet; & ingenioſe oſtendis quod, pro menſura potentiæ, repetitio illius, non autem hujus, ſumenda, ſit. Interim non video quid impediat, quominus penetrationes globi in medium, non elaſticum, ſed tantum frictione reſiſtens, ſumi poſſint pro menſura potentiæ; nihil enim refert, ſive potentia abſorbeatur, ſive reſtituatur; ſaltem potentia eſt cauſa penetrationis, & proinde pe-

netra-

1695 Decemb. netratio illius effectus; ſicque repetito effectu, repetitur etiam cauſa. Ex quo ſequitur, globum aliquem, celeritate dupla, quadruplo altius penetraturum eſſe in medium aliquod molle, veluti in lutum, quam alius globus æqualis celeritate ſimplici; id quod adhuc oſtendendum eſt: credo enim penetrationes fore ut celeritates.

Quos HUGENIUS conſtituerit Curatores pro edendis ſuis Manuſcriptis, hactenus ignore. Excerpta, quæ mihi offers, ex Litteris ejus ad Te datis, in quibus methodi noſtræ præſtantiam agnoſcit, lubenti & grato animo accipiam, ut, ſi aliquando occaſio dabitur, ea VOLDERO, minus æque de noſtris ſentienti, aliiſque objiciam.

Ex Analogia potentiarum & differentiarum facile deducitur Series pro $d^m(xy)$ quam adducis: Interim ſi m ſit numerus fractus, vel irrationalis, dicas mihi quæſo quid ſit $d^m(xy)$; an quantitas, an quid aliud? De his diu eſt, quod non cogitaverim, quoniam nondum ad me redii. Et difficulter a me impetrabo, ut hiſce de novo animum advertam, ſiquidem jam fere mihi exciderunt.

Accepi heri litteras à Dno. *Marchione* HOSPITALIO, in quibus ſibi eandem hanc Seriem Te communicaſſe dicit, & ſimul mea, quæ ſuper hac materia me detexiſſe, a Te intellexerit, petit.........
. . . . Vale & me ama

Ampliſſimi Tui Nominis

Groningæ $\frac{17}{27}$ Decembris 1695.

Cultorem Aſſiduum.

J. BERNOULLI.

EPIS-

EPISTOLA XX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De viribus corporum difficultates removet. De differentiis, quarum exponentes non integri.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

GAudeo Te ſalvum *Groningam* appuliſſe, & rite auſpiciis pu- 1695
blici muneris perfunctum fuiſſe. Omnia tempus faciliora Decemb.
reddet, & quod ſtudioſis docendis tibi peribit, poterit viciſſim accreſcere, ſi quos invenias, aut facias, qui Te juvare poſſint. Nullam eſſe regionem credidi hactenus, in qua magis floreat Algebra, etiam inter plebeios homines, quam in *Batavis*. Certe vix alibi plures Libri tales vernacula lingua ſcripti extant. . . . .

Scrupulos, qui Tibi ſuperſunt circa Dynamicen meam, puto adimi poſſe. *Prima Objectio*, omnium quæ in hoc negotio fieri poſſunt eſt ſpecioſiſſima: Celeritatem materiæ gravificæ eſſe incomparabiliter majorem, quam corporis gravis, ita ut grave, ejus comparatione, ſemper quieſcere videatur, uti teſtudo reſpectu ictus ſclopeti. Reſpondeo veriſſimum hoc eſſe, & effectum qui producitur in mobili tardo, talem eſſe, ſi comparetur motui illi velociſſimo, ut ſive tardum quieſcat plane, ſive jam ſit in motu, diſcrimen non fiat notabile. Si ſcilicet oculus poſitus ſit in globo ſclopeti, ſive in teſtudine, & ex uno horum reſpiciat alterum: non notabit in reſultante diſcrimen inter caſum quietis & motus tardi. Sed ſi effectus novus, qui per ictum producitur in ipſo corpore tardo, comparetur cum priore motu, vel effectu, qui in ipſo jam eſt; omnino ille, reſpectu hujus, notabilis eſt; adeoque hac ratione multum intereſt inter id quod idem ictus, licet celerrimus, pro-

1695 Decemb. ducit in corpore quieſcente, & quod producit in corpore tardo; nec poſſumus aſſerere recipiens ſemper ſe eodem modo habere ad ictus. Et tametſi eumdem ſemper imprimat, vel adimat velocitatis gradum; non tamen ſemper dat, vel adimit eumdem gradum virtutis; Sed majorem dat obſequenti, ſeu in eaſdem partes tendenti, adimit reſiſtenti, ſeu in contrarium nitenti.

Secundo loco; non bene intelligo quid Tibi adhuc velis demonſtrari, cum oſtendi poſtulas, quod grave L eodem impetu quo aſcendit per altitudinem 2, 3 : 4, 5 6, 7 : 8, 9, etiam poſſit deprimere totidem elaſtra, quot nempe deſcendendo depreſſit. Nam, quantum judico, ſemper facile oſtenditur, grave idem poſſe efficere aſcendendo, vel deſcendendo; quanquam nec ſatis videam cur hoc petas. Ab eadem cauſa ſe totam conſumente, vel impendente, æqualis ſemper producetur effectus, quomodocunque ad ſe ſe conſumendum cauſa applicetur, aſcendendo, vel deſcendendo.

Quod vero *tertio*, modum deducendi ad motum perpetuum, tanquam ad abſurdum, quo ſubinde utor, a rigido adverſario rejici poſſe putas; id ego nimii in hac ſcientia rigoris fore arbitror, & tuto aſſumi hypotheſin hanc; quippe & rationi conſentaneam, & infinitis experimentis comprobatam. Qui motum perpetuum mechanicum poſſibilem defendit, etiam fieri poſſe putabit, ut aqua ſponte aſcendat in montem.

Quarto, quod communicationis motuum regulas attinet; concedo, ſi corpus A celeritate, ut 1, incurrat in æquale B quieſcens, & ambo poſt concurſum ſimul ferantur, nec pars potentiæ abſorbeatur, aggregatum latum iri celeritate, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Sed ſciendum eſt hunc caſum non occurrere. Nam ſi corpora ſint elaſtica, non ibunt ſimul poſt ictum; ſin ſint mollia, ut argilla, magna pars virium in ipſo ictu abſorbebitur, & transferetur in partes inſenſibiles materiæ mollis, nec reſtituetur corporibus integris, ut fit in caſu elaſticitatis.

Quinto, recte judicas, ex meis principiis ſequi corpus duplo celerius quadruplo amplius penetraturum in materiam mollem; modo ſcilicet ſeponatur condenſatio, quæ contingit in molli, ut ſcilicet initio

initio cedat facilius, poſtea difficilius, ob partes poſteriores, ipſo priorum impactu, redditas magis compactas; Et modo conſideretur ſola difficultas, quæ eſt in ſeparatione partium tenacium, excluſo motu partium in molli, qualis eſt in aqua; ſeu excluſo eo, quod in ſchediaſmate *De reſiſtentia medii* * vocavi reſiſtentiam reſpectivam, retenta ſola abſoluta. Hæc enim, quæ excluſi, efficere poſſunt & debent, ut regula illa non exacte obſervetur; puto tamen nihilominus, adhibitis cautelis debitis, ab experientia ei fautum iri. 1695 Decemb.

Quod quæris de differentia, cujus exponens eſt fractus vel irrationalis, etiam notavi in litteris ad Dnum. *Marchionem* HOSPITALIUM, ſimulque addidi modum, per quem talis differentia poteſt alteri ordinariæ comparari. Exempli gratia $d^{\frac{1}{2}}x$ ſit differentia propoſita. Sint x progreſſionis geometricæ; aſſumpta differentiali conſtante dh, ut fiat $xdh : a = dx$, erit $d^2x = dxdh : a = xdhdh : aa$, & ſimiliter $d^3x = xdh^3 : a^3$, & generaliter, $d^ex = xdh^e : a^e$, adeoque $d^{1:2}x = xdh^{1:2} : a^{1:2} =$ ſeu $d^{1:2}x = x\sqrt{(dh:a)}$ [1 : 2. mihi eſt idem quod $\frac{1}{2}$; & $dh : a$ idem quod $\frac{dh}{a}$]. Unde vides talium differentiarum valores hoc modo haberi poſſe, per radicem vel potentiam ordinariæ differentiæ. Quod cum memorabile ſit, Tibi non ingratum fore puto. Eaſdem extraordinarias differentias, per ſeriem infinitam, ex ordinariis conflatam exprimi poſſe, me non monente, vides; adoque ſuo modo reales eſſe, etiam hinc patet. Vale, feliciaque feſta age, & cum anno novo novum rerum proſperarum curſum ingredere.

Dabam *Hanoveræ* 28. Decembr. 1695.

* *Acta Erud. Lipſ.* 1689. Janv. pag. 38. G. G. L. *Schediaſma de Reſiſtentia medii & motu projectorum gravium in medio reſiſtente.*

EPISTOLA XXI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De viribus corporum æſtimandis Objectiones ulteriores. De controverſia LEIBNITII *&* PAPINI, *circa id argumentum. De actione gravitatis. Ex impulſu obliquo & viribus centrifugis, æſtimatio virium. De mediorum reſiſtentia. De perpetuo mobili.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

. . . .

. . . .

1696 Januar. NEſcio annon crebræ meæ objectiones contra Dynamicen Tuam tandem Tibi moleſtiam creaverint; quod fere conjicio, ex eo quod, more Tuo ſolito, non ad omnia, quæ Te in prioribus meis rogabam, ita exacte reſpondiſti: ſed novi Tuam æquitatem & animi candorem; ſi quid, hac in parte, a me commiſſum fuerit, quod minus arrideat, mihi condonabis. Nihil ſane a natura mea alienius eſt, quam pravus iſte contradicendi pruritus; & nihil eidem convenientius quam veritatis amor, quam uſque adeo depereo, ut acquieſcere minime poſſim in re aliqua, niſi omnis obſcuritatis nebula mihi ſit diſcuſſa. Eſt hæc præcipua cauſa, cur in rebus dubiis ad Te recurram, tanquam ad Naturæ oraculum, cui in abſtruſiſſimis nunquam lumen deeſt, cum aliis quoque communicandum; quod jam abunde compertum habeo. Vides itaque, quo incitamento difficultates Tibi ſubinde proponam; adeo tamen iniquus non ſum, ut promptam nimis reſponſionem ad eas exigam; ſufficiet ſi ſumma Tua commoditate id fiat.

Paucis abhinc diebus, noſter Academiæ Rector mihi ſuggeſſit libellum a *Dionyſio* PAPINO, proxime elapſo anno, editum, cui titulus,

titulus, ***Faſciculus diſſertationum de novis quibuſdam machinis*** &c. 1696
ubi inter alia exhibet ſynopſin controverſiæ inter vos agitatæ, circa rationem æſtimandi vires motrices; in cujus fine dicit, quod Te rogaverit, ut etiam tale extractum ſcriberes, quo poſſint Lectores omnia pro & contra certius perſpicere. Miror quod me nunquam ablegaveris ad ***Acta Eruditorum***; video enim, ex hac ſynopſi, quod præcipuæ meæ objectiones jam in ***Actis*** * a Dno. Papino prodierint, ut & Tuæ reſponſiones ad illas, de quibus certe nihil mihi conſtabat; alias labori inutili eas de novo repetendi, qui hucuſque calamos noſtros exercuit, pepercissem. Eo enim tempore, quo hæc inter vos ventilabantur, in Galliis verſabar, ubi nihil quicquam ***Actorum*** ad me perveniebat. Nunc ***Acta***, in quibus hæc extant, a quodam Collegarum meorum mihi comparavi; ubi, ſummo cum fructu, rationes utriuſque perluſtravi; quibus, ut & meis, quas ſuper hac re inveni, diligenter expenſis, Tuam nunc opinionem, (in quam jam ab aliquo tempore inclinavi, ſed, ob leves, qui mihi ſupererant, ſcrupulos, judicium tantiſper ſuſpendens,) omninò pro verâ agnoſco: quæ me proin in poſterum, non ſolum non adverſarium, ſed ſui defenſorem, quavis occaſione, habebit.

Januar.

Doleo vices Dni. Papini, qui in falſa ſua opinione perſiſtit; videtur ille mihi, aut rem non ſatis examinaſſe, aut ſibi non glorioſum ducere revocare errorem popularem, quem in ***Carteſianorum*** gratiam ſibi defendendum ſuſcepit. Quod enim dicit potentiam corporis majoris non poſſe totam transferri in minus quieſcens, & deinde aliquam partem potentiæ non quidem perire [quod ex ***Carteſianorum*** mente neceſſario ſequi aptiſſime oſtendiſti] ſed impendi & communicari materiæ ambienti, in ipſo ictu; idem

O 3 nulla

* 1689. April. p 183. D. Papini, *de Gravitatis cauſa & proprietatibus Obſervationes.*

Reſpondit Leibnitius in eiſdem *Actis* 1690. Maj. p. 228. G. G. L. *De Cauſa gravitatis & defenſio ſententiæ ſuæ de veris naturæ legibus contra Carteſianas.*

Inſtantiam Papini Vide in Actis 1691. Janv. pag. 6. *Mechanicorum de viribus motricibus ſententia, aſſerta a Dno. Papino adverſus* Cl. G.G.L. Objectiones & reſponſionem Leibnitii *ibid.* Sept. pag. 439. G. G. L. *De legibus naturæ, & vera æſtimatione virium motricium, contra Carteſianos, &c.*

1696 Januar. nulla dari corpora perfecte rigida; mihi videntur mera effugia quibus ſuæ opinioni, jamjam labenti, aſylum ſtruere conatur. Quis enim non videt translationem iſtam potentiæ totius ex corpore majori in minus, non ſupponi tanquam actu poſſibilem, ſed quatenus, ſine ulla implicita contradictione, mente ſubſtitui poteſt potentia minoris corporis in locum æqualis potentiæ corporis majoris; ſufficit namque hoc, ut ſi abſurdum aliquid, mediante iſta ſuppoſitione, ex aliqua ſententia ſequatur, etiam ipſam ſententiam abſurdam eſſe dicamus. Et appoſite notaſti, quod ſi adverſarius hoc neget, perinde ſit, ac ſi quis ARCHIMEDI poſtulanti negaſſet aliquam rectam alicui curvæ æqualem eſſe, quia nullam poterat geometrice exhibere. Atque, quod plus eſt, ſi quis mihi ad oculum oſtenderet ſe reperiſſe motum perpetuum, ſi modo haberet metallum aliquod gravius auro; dicerem, ſane ſummo jure, eum hominem revera inveniſſe motum perpetuum, licet metallum gravius auro non inveniatur; & vix inventum iri ſperandum ſit; oſtendiſſet enim mihi poſſibilitatem motus perpetui, ſi non practicam, ſaltem theoreticam.

Optime dicis objectionem, a celerrimo motu materiæ gravificæ, ut vocas, petitam, eſſe ſpecioſiſſimam, quam etiam maximopere urget Dnus. PAPINUS; nec Tua reſponſio mihi omnino ſatisfacit, videtur enim quod, non ſolum velocitates ſingulis momentis corpori impreſſæ, ſed etiam ipſi effectus, quos impulſiones materiæ gravificæ in corpore producunt, debeant eſſe æquales. ſive dein comparentur motui materiæ velociſſimo, ſive comparentur motui priori, qui in corpore jam eſt; comparatio iſta non habet locum; effectus enim conſiderantur abſolute; idque ſolummodo quæritur, annon inter ſe comparati omnes ſint æquales? Facile enim demonſtrari poteſt quod globus A incurrens celeritate infinita in globum B, huic ſemper æqualem vim imprimat, ſive ſit in motu, ſive in quiete; ita ut adverſarius conſtanter perſiſtere poſſit in eo, quod potentia corporis aſcendentis, non per aſcenſus, ſed per temporis ſpatium menſurari debeat; ex quo dein ſequitur corpus aſcendens, exempli gratia, ad altitudinem quadruplam, non niſi duplo plures ictus æquales recipere, quam aliud æquale corpus aſcendens ad altitudi-

titudinem ſimplam; ideoque potentias illorum corporum eſſe ut 2 ad 1, non autem ut 4 ad 1. Difficultas hæc fateor, me diu multumque vexavit; videbam enim hic non eſſe petitionem principii, uti dicebas; ſed præcipuam argumenti Tui vim directe impugnari: donec tandem exinde ita me extricare putaverim, dicendo verum quidem eſſe, quod effectus in corpore ab impulſionibus materiæ gravificæ producti, initio cujuſvis momenti, ſint ſemper æquales, ſive corpus quieſcat, ſive moveatur, ſed & hoc verum eſt, quod corpus deſcendens, vel aſcendens, occurrat uno momento certo numero particularum perpendiculariter diſpoſitarum, qui numerus eſt in ratione celeritatum corporis moti; ſingulæ autem hæ particulæ ſuum peculiarem faciunt ictum æqualem in corpus aſcendens, vel deſcendens; & hac ratione, effectus materiæ gravificæ, non initio tantum momenti, ſed per totum momentum productus, computandus eſſet per quantitatem ſpatii uno momento percuſſi: hinc augmentum momentaneum potentiæ corporis aſcendentis, vel deſcendentis, ſemper variatur pro ratione celeritatis, & erit infinities majus, quamvis impulſionis quam recipit quieſcens a materia gravifica. 1696 Januar.

Mentem meam melius ſchemate aperiam: Repræſentet (*Fig.* 27.) A B, lineam deſcenſuum in qua o 1, o 2, o 3, o 4, o 5, &c. percurrantur momentis æqualibus 1, 2, 3, 4, 5, &c. applicentur ad o, 1, 2, 3, 4, 5, &c. æquales o*a*, 1*b*, 2*c*, 3*d*, 4*e*, 5*f*, & quæ denotent vires impulſionum materiæ gravificæ, initio cujuſvis momenti, corpori impreſſas. Nunc, per naturam gravium cadentium, altitudo A8 eſt quadrupla ipſius A4, quamvis nonniſi duplo plures impreſſiones æquales o*a*, 1*b*, 2*c*, 3*d*, 4*e*, 5*f*, 6*g*, 7*h*, 8*i*, in illa contineantur quam in hac o*a*, 1*b*, 2*c*, 3*d*, 4*e*, hinc cum Dno. Papino credideram, ſufficere ut grave aſcendat per altitudinem 4A ſubquadruplam ipſius 8A, ad ſuperandam dimidiam partem reſiſtentiæ, quam ſuperaret aſcendendo per 8A, non animadvertens errorem, qui in eo conſiſtit, quod ſumſeram impreſſiones momentorum initiales o*a*, 1*b*, 2*c*, 3*d*, 4*e*, &c. loco impreſſionum continuarum o*b*, 1*c*, 2*d*, 3*e*, 4*f*, &c. quæ utique non amplius ſunt æquales. Oppido inde liquet veritas aſſerti Tui; quod nempe potentiæ TAB. V.

1696 Januar. tentiæ corporum æqualium ſint in ratione altitudinum percuſſarum; eſt enim ſumma omnium impreſſionum $0b + 1c + 2d + 3e + 4f + 5g + 6h + 7i$ id eſt, rectangulum Ai, ad ſummam omnium impreſſionum, $0b + 1c + 2d + 3e$, id eſt, ad rectangulum Ae, ut altitudo A8 ad altitudinem A4. Rogo mihi ſincere dicas, annon rem acu tetigerim. Hoc argumento, arbitror, Dnus. PAPINUS optime convinci poſſet, quamvis alias, in eodem libello, contra GUILLELMINUM diſputans, de fluentium aquarum menſura, proprium gladium ſuppeditet quo jugulari poteſt.

Ex iis enim quæ pag. 77. legitime contra adverſarium ſuum infert, apertiſſime ſequitur vires motrices, vel potentias ponderum æqualium eſſe in ratione aſcenſuum, id eſt in quadrata celeritatum. Tibi haud dubie non ingratum erit, ſi quæ ad rem faciunt hic excerpam; cum forſan hunc libellum Tibi nondum videre contigerit.

„ Conſtat quod gravia, ſi motu a gravitate accepto ſurſum verſus reflectantur, aſcendendo motum amittunt: finito autem aſcenſu ipſorum centrum gravitatis non poteſt reperiri altius quam antequam cœpiſſent moveri, alioquin daretur motus perpetuus mechanicus. Sit, exempli gratia (*Fig.* 28.) funis ABD, ſupra trochleam BC tranſiens, cujus alteri extremo A una libra, alteri vero extremo D duæ libræ appendantur; ſitque AE dupla ipſius ED, centrum gravitatis erit in E. Supponamus jam pondus D deſcendere in *d*, debebit pondus A tantundem aſcendere, nempe ad *a*, & tunc centrum gravitatis reperietur in *e*. Facile eſt autem demonſtrare quod deſcenſus E*e* eſt tantum $\frac{1}{3}$ deſcenſus D*d*. Ergo corpus illuc delatum, ſi ſurſum verſus reflecteretur, non aſcenderet niſi ad $\frac{1}{3}$ altitudinis *d*D ut in *f*, & corpus A continuando ſuum motum ſurſum verſus, tantundem ſpatii percurreret uſque ad G; tunc enim centrum gravitatis in eadem qua prius altitudine, nempe in E reperiretur, &c. " (TAB.V.) Quid hæc ad confirmationem Tuæ ſententiæ contribuant, facile perſpicies. Libra enim una, deſcendens ex altitudine D*d*, efficere poteſt ut tres libræ

libræ aſcendant ad $\frac{1}{3}$ ejuſdem altitudinis. Ergo quælibet trium *1696* Januar. librarum aſcendentium habebit $\frac{1}{3}$ potentiæ libræ deſcendentis [ſiquidem effectus ſit æqualis cauſæ;] unde conſtat propoſitum, nempe potentias ponderum æqualium eſſe in ratione aſcenſuum vel deſcenſuum, id eſt, in quadratâ celeritatum.

Sed regeret forſan Dnus. Papinus, unam illam libram, quod cum reliquis duabus conjuncta ſit, non efficere eamdem vim, ac ſi in aere libero per eamdem altitudinem ſola deſcenderet; præſertim cum, in illo caſu, plus temporis, & proinde plures impulſiones materiæ gravificæ durante deſcenſu recipiat quam in hoc. Verum hoc objiciens pariter ad motum perpetuum mechanicum deduceretur; ubi non opus haberemus ſupponere translationem totius potentiæ corporis majoris in minus; adeoque Dnus. Papinus ſolitis ſuis effugiis, nimirum negatione illius translationis, & perfectæ rigiditatis, amplius evadere non poſſet.

Hæc omnia cum perpendiſſem, & vidiſſem tam luculenter confirmare novam Tuam vires motrices æſtimandi rationem, & deſtruere vulgarem illam *Carteſianorum* opinionem, quæ eouſque in Philoſophorum Scholis invaluit, & radices egit, ut quamplurimi, cæco ductu, malint credere rem, in omnium quotquot ſunt, Philoſophorum modernorum ore verſantem, quam eam paulo attentius & penitius examinare; Ego, inquam, poſtquam hæc probe perpendiſſem, tandem errorem vulgarem omnino deſerui, mihique ipſimet iratus fui, quod illum apud me tamdiu foverim. Interim mentem meam ſubiit, annon nova hæc ratio potentias æſtimandi, demonſtrari poſſet directe & ἀποδεικτικῶς; ex ipſa nempe motus natura & lege, ſupponendo corpora moveri in vacuo, in quo in alia vires ſuas exerant. Demonſtratio enim per deductionem ad motum perpetuum, tanquam ad abſurdum quid, pertinacem *Carteſianum* novis potius involvit ſcrupulis, quam ab erronea opinione deflectit.

Poſt levem meditationem vidi id directe poſſe probari per principium aliquod, quod ipſe Carteſius admiſit; nempe per compoſitio-

1696 Januar. TAB. V. poſitionem motus & quidem ſic. Moveatur (*Fig.* 29.) globus A, celeritate & directione AB, & impingat oblique in alium globum æqualem B quieſcentem, ita ut angulus obliquitatis ABD ſit ſemirectus: nunc quæritur, quid poſt ictum ſit futurum, ſuppoſito totam potentiam corporis alicujus directe incurrentis poſſe transferri in aliud corpus æquale quieſcens? Conſidero motum AB tanquam compoſitum ex duobus aliis æqualibus AC, BC, quorum directiones angulum faciant rectum ACB: nunc ſtatim patet, quoniam AC eſt parallela ipſi BD, & BC ad eamdem perpendicularis, quod globus A, ſecundum directionem AC, nihil globo B communicet, ſed quod tota vis ſecundum BC transferatur in globum B (ſi modo globi perfecte aut ſaltem admodum elaſtici ſupponantur, ut globi in ludo tudiculario,) ita ut poſt ictum globus B moveatur in directione BE, velocitate BC, & globus A in directione BF, velocitate AC. Quoniam autem, tam globi, quam velocitates, ſint æquales, erunt eorum potentiæ æquales, & ambæ ſimul junctæ, tanquam effectus, æquales cauſæ, id eſt, toti potentiæ quam habebat globus A ante ictum. Ergo potentia globi A ante ictum, eſt ad potentiam globi B poſt ictum ut 2 ad 1, ut $(AB)^2$ ad $(BC)^2$; ut quadratum velocitatis A, ad quadratum velocitatis B: Q. E. D.

Idem generaliter poteſt demonſtrari, ſi globus A, alia quavis obliquitate, intelligatur incurrere in globum B; tunc enim ſemper globus B recipiet velocitatem BC, & globus A perget moveri velocitate AC; & hoc modo, quia potentiæ duæ partiales, ſimul ſumptæ, conſtituunt totam; erit potentia globi A poſt ictum, ad potentiam globi B, ut $(AC)^2$ ad $(BC)^2$, id eſt ut quadrata globorum celeritatum.

Neſcio quid huic demonſtrationi objici poſſit; niſi fortaſſe quod nulli globi tam perfecte elaſtici reperiantur, qui omnem ſuam potentiam in alios æquales directe impingentes transfundere poſſint. Hoc profecto demonſtrationem noſtram minime labefactat: Etiamſi enim concedamus illam perfectam elaſticitatem non dari; ſcimus tamen per experientiam dari corpora ita prompte ſe reſtituentia, ut nullum ſenſibile diſcrimen interſit inter velocitatem globi incurrentis

ante

ante ictum, & inter velocitatem globi æqualis percuſſi poſt ictum; adeoque & hoc contra demonſtrationem noſtram nihil valet. Supponamus tamen tantummodo partem celeritatis BC (*Fig.* 30.) communicari globo B; nihilominus ex Cartesii opinione ſequetur aliquid abſurdi. Eſto enim, & acquirat globus B, ex percuſſione globi A, partem celeritatis BC, puta BG; Ergo, ſecundum Cartesium, remanebit globo A in directione CB, reſidua celeritas CG (ſupponuntur enim globi æquales). Quoniam autem juxta directionem AC, integram velocitatem AC ſervat; habebit globus A poſt ictum, ex compoſitione motus AC & CG, velocitatem AG. Ergo, ſi quantitas motus ante & poſt ictum eſſet æqualis, foret $A \times AB = A \times AG + B \times BG$, & quia $A = B$, foret $AB = AG + BG$. *Q. e. a.* 1696 Januar. TAB.VI.

Quid ad hæc reponi poſſit ab acerrimo quoque *Carteſiano*, non video; compoſitionem enim motus non negabit, niſi ſimul Coryphæi ſui explicationem reflectionis & refractionis radiorum deſtruere velit, aliaque, in quibus compoſitio hæc admodum ſolemnis ipſi fuit: Dicet forſan, poſt ictum directionem mutari; hinc globos A & B celerius moveri, quam ſi ille in hunc directe impingeret; ut nempe quantum a prima directione deflectuntur, compenſetur per augmentum celeritatis. Sed quid, quæſo, directio ad quantitatem motus, vel ad quantitatem virium? ſive corpus aliquod huc, ſive illuc feratur, retinebit, credo, ſemper eamdem vim, ſi modo celeritas eadem maneat. Nunquid ridiculum eſſet dicere ſingula, quæ in toto Univerſo moventur, ſemper eamdem directionem ſervare; ſecus juxta mentem adverſarii quantitas motus variaret.

Aliud adhuc ſupereſt Argumentum non contemnendum, quo probatur vires corporum æqualium eſſe in ratione quadrata velocitatum: Conſtat quod vires centrifugæ Corporum in gyrum motorum ſint in ratione compoſita ex quadrata celeritatum, & reciproca longitudine radiorum; [facile hoc demonſtrari poteſt.] Ergo, exiſtentibus radiis æqualibus, erunt vires centrifugæ, vel vires fila, quibus corpora detinentur, tendentes in ratione quadrata velocitatum. Sic quia vires iſtæ tendentes ſunt, inadæquate quidem, effectus corporum motorum; ſatis probatur propoſitum.

P 2 Jam

Digitized by Google

1696 Januar. Jam nimium fere huic materiæ immoror; patere tamen ut, quæ ex nova Tua ſententia legitime fluere videntur, paucis proponam; ſuper quæ mentem tuam deſiderarem. Videtur centrum percuſſionis corporum aliter nunc ſe habere, quam hactenus creditum eſt; ſiquidem vires percutientes elementorum corporis æſtimatæ ſunt a mole elementorum, & a velocitate; loco quod quadrata velocitatum, juxta novam hypotheſim, ſumenda eſſent. Hoc modo centrum percuſſionis lineæ rectæ rigidæ, circa unam extremitatem motæ, non eſſet ibi, ubi eſt centrum in triangulo, nempe $\frac{2}{3}$ longitudinis lineæ diſtans ab extremitate quieſcente; ſed eſſet, ubi eſt centrum gravitatis in pyramide, nempe $\frac{3}{4}$ axis diſtans a centro rotationis; & ſic in aliis.

Præterea videntur reſiſtentiæ medii, quas vocas reſpectivas, ſepoſitis abſolutis, non eſſe in duplicata ratione velocitatum, ſed in triplicata. Corpus, exempli gratiâ, aliquid motum, in liquido tenacitate notabili carente, duobus velocitatis gradibus, certo tempore duplo majorem quantitatem liquidi penetrat, & duplo celerius quam aliud corpus æquale, motum uno velocitatis gradu; quoniam vero quantitatum æqualium vires ſunt, ex nova hypotheſi, in duplicata ratione velocitatum; erit reſiſtentia corporis illius octupla reſiſtentiæ hujus: contra quod Tu ſtatuere videris in *Actis*, an. 1691, pag. 177. † Dices forſitan, differentiam eſſe, quando corpus cum omnibus ſuis partibus, ſimul & uno inſtanti, in alterum corpus, ut globus in globum, impingit, & quando per partes & ſucceſſive appellitur, ut fluidum contra obicem; ſed optarim ut explicares rationem diſtinctionis. Deſiderarem etiam rationem exactam, cur nova Tua hypotheſis tantum locum habeat in velocitatibus actualibus, non autem in conatibus; ſiquidem conatus nihil aliud eſt quam motus infinite parvus. Cur, exempli gratia, ad æquilibrandas quatuor libras in una diſtantia ab hypomochlio vectis appenſas, non etiam requiratur ab altera parte vectis tantum una libra in duabus diſtantiis appendenda, ſed duæ libræ. Et deinde,

† *O. V. E. Additio ad Schediaſma de Medii reſiſtentia publicatum in Actis m. Febr. 1689.*

Digitized by Google

de, conceſſo, hujus poſſe rationem reddi, videtur quod ſi duabus 1696
iſtis libris, quæ cum quatuor libris oppoſitis æquilibrium faciunt, Januar.
vel minima velocitas actualis imprimatur deorſum verſus, illico præponderare deberent, & magno impetu deſcendere: duæ enim iſtæ libræ, habentes duos gradus velocitatis, duplo-majorem vim, quam quatuor libræ cum uno gradu velocitatis. Hoc tamen eſt contra experientiam; nam lente admodum, nec eouſque quo poſſent, deſcendunt. Explicationem etiam ſciſcitor experimenti illius quod, recenſente in Epiſtolis Cartesio, (ut Dnus. Varignonius in *Actis Erudit.* an. 1691, pag. 300. memorat.) Pater Mersennus, cum Dno. Petito, ſæpius iterata vice inſtituerat, circa majus tormentum bellicum; quo perpendiculariter erecto & diſploſo, globum, ejuſve veſtigia, fruſtra in terra quæſivere: argumento eum non cecidiſſe, ſed etiamnum in aëre hærere ſuſpenſum. Hoc, ſi non ſit figmentum, multum etiam Tuæ demonſtrationi, quam ab impoſſibilitate perpetui motus petis, derogaret.

Quando dicis, quod qui motum perpetuum mechanicum poſſibilem defendit, etiam fieri poſſe putabit, ut aqua ſponte aſcendat in montem; facile judico quorſum digitum intendas: nimirum ad meam, olim in *Actis* * inſertam, inventionem perpetui mobilis, filtri ope comparandi; per quam perennem aquarum per poros terræ, inſtar filtri, aſcenſum, & ſub forma fluviorum & fontium deſcenſum explicabam. Certe hujuſmodi perpetuum mobile non tam abſonum eſſe, & contra naturæ leges cuivis, vel leviter ad preſſiones fluidorum attendenti, patebit: Numquid enim, ſi poſſemus efficere, ut centrum gravitatis alicujus corporis, ſponte, vel ob motum quemdam particularum, aſcenderet; haberemus motum perpetuum mechanicum? Aſt, ſi ſuper liquorem graviorem in vaſculo quodam contentum, infunditur alius levior cum priori perfecte miſcibilis; commune duorum liquorum centrum gravitatis infimum locum non occupabit, ſed neceſſario aſcendet: alias liquores non miſcerentur. Quod ſi ais hanc permixtionem non duraturam, ſed tractu temporis particulas liquoris gravioris iterum ſubſidere; rogabo Te, ut conſideres quam-minutim ſolvatur mercurius a liquore

P 3 quodam

* 1691. Febr. pag. 65. Opp. Tom. I. N°. I. pag. 41.

1696 Januar. quodam corroſivo, velut ſpiritu nitri, & ita intime cum illo miſceatur, ut, niſi affundatur ſal quoddam, permixtio illa in perpetuum duratura ſit, manente interim liquore adeo limpido, ut ſi ex gravitate id non conjiceretur, nihilo impraegnatum illum eſſe diceres. Quid igitur impedit, quominus ope filtri, quod ſepararet iſtas duas ſubſtantias, leviorem a graviori, haberi poſſit motus perpetuus; filtratione enim iſta, commune centrum gravitatis, quod non eſt in ſua ſede naturali, deſcendere non poteſt, ob delabentem ex tubo materiam ſecretam, quæ, ut ſuppono, iterum ſe ſe perfecte miſcet cum ſubſtrato liquore; conatus iſte, & proinde filtratio, continuo perſeverabit: unde objectio, quod gravioris liquoris actio per filtrum intercipiatur, ita ut ſolus levior in eum, qui in tubo jam eſt, gravitet, nihil valet: ipſe enim levior, qui extra tubum eſt, etiam a graviori premitur, & ita junctis viribus eum qui in tubo eſt premunt. Non itaque mirum, multo minus abſurdum eſſe debet, tali modo, ubi natura motus, nempe inteſtinus, juvat, motum perpetuum obtineri poſſe dicam. Non enim minor abſurditas eſſet dicere centrum gravitatis poſſe aſcendere, quod tamen hic contingere videmus. Interim Tecum ſentio impoſſibile eſſe motum perpetuum per machinam quamdam corporum ſolidorum procurandum, quæ ſolo artificio & induſtria humana operatur. Sed quia litteræ jam, præter ſpem, Tibi forſan ad nauſeam, excreverunt; hic abrumpo, & differentialium materiam in proximam ſcribendi occaſionem differo. . . . .

Vale, & votum pro voto habe. Perage lætus, & inconcuſſa ſanitate, novum hunc annum & quam-plurimos ſubſequentes, ut ego, cum toto Orbe litterato, ingenii Tui fructibus, ut hactenus, ita pro porro, quam-diutiſſime frui poſſim. Iterum vale & ama, qui ſe ſincero corde dicit.

Ampliſſimi Tui Nominis

Groningæ $\frac{18}{28}$ Jan. 1696.

Cultorem perpetuum
J. Bernoulli.

EPIS-

EPISTOLA XXII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM

Reſponſio ad præcedentem.

De PAPINO, *ſuaque cum illo controverſia. De actione corporis infinite velocis. De incurſu obliquo. Æſtimatio virium* a priori. *De celeritatibus elementaribus. De motu perpetuo. De Dynamica. De conſervatione virium & directionis. De celeritate aucta. De Ipecacuanha.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

QUod ad nonnulla Tuarum anteriorum viſum ſum reſpondiſſe paulo brevius, non ideo factum eſt, quod Tuæ objectiones mihi fuerint ingratæ, ſed quia judicavi, quod res eſt, eo Te eſſe ingenio, ut non habeas opus multis verbis. Fortaſſe etiam fuere tunc, quæ ſcribentem coegerunt feſtinare, & nunc quoque ſunt, quæ me avocant a meditandi laboribus; quorum potiſſimum eſt catharrus gravis, qui adjunctam habet febriculam, quæ ne quid altius in receſſu habeat, cavendum eſt. *1696 Januar.*

Dnus. PAPINUS libellum ſuum, quem vidiſti, ubi primum fuit editus ad me miſit, ex eo renovata eſt inter nos concertatio per litteras, quam totam Tibi communicabo; cui enim meliori poſſem judici atque etiam defenſori? videbis antiquum obtinere morem, nec facile gloriam veritati daturum eſſe, non conſiderantem, quod ipſe Deus eſt veritas. Gaudeo Te, repetitis meditationibus, pro acumine Tuo perſpexiſſe, & pro candore agnoſcere ſententiæ meæ vim ac firmitatem; quod paucis contigit; adeo difficile, nec fere niſi meliorum ingeniorum proprium eſt, præjudicia exuere. Quod ad *Acta Eruditorum* Te non remiſi, cauſa in promptu eſt; quia tibi lecta non dubitabam.

Quæ de ictibus materiæ gravificæ habes, ſunt ingenioſiſſima; nempe

1696 Januar. nempe quod numeri ictuum, qui quolibet tempuſculo imprimuntur corpori gravi, non ſint æquales, ſed ejus celeritati proportionales; quo quidem admiſſo, ſublata eſſet difficultas Dni. Papini; etiamſi ipſi concederemus, quemlibet ictum æqualem vim imprimere. Alterutrum igitur nobis faciendum ſupereſt, vel quærendus modus oſtendendi quod notas de numero ictuum, vel neganda ictuum æquipollentia. Fateor nondum mihi modum occurrere oſtendendi, quod numeri ictuum in æqualibus momentis ſint celeritatibus proportionales; quia adverſarius negabit de eo quæri, quot occurratur corpuſculis; cum non ab horum numero, ſed velut a numero totidem flatuum venti [*bouffées de vent*] res pendeat, quemadmodum in navi velis acta; qui numerus eſt æqualibus tempuſculis. æqualis, adeoque temporibus proportionalis. Hoc igitur rogo, ut porro mecum conſiderare velis; quemadmodum & alterum membrum dilemmatis, utrum ſcilicet globus A. incurrens celeritate infinita in globum B, æqualem ei vim imprimat, ſive globus B quieſcat, ſive moveatur, quod facile demonſtrari poſſe ais; ego fateor me nondum eam demonſtrationem videre.

Jungemus igitur meditationes, ut videamus an nobis in his rebus liquido ſatisfacere liceat; quo facto, haud ſcio an deprehenſurus ſis ſubeſſe aliquid ſolidi meæ reſponſioni ad elegantem difficultatem de Globo ſclopetario in teſtudinem impacto. Et conſiderandum videtur, non omni modo eſſe verum, quod concinnatis impreſſionibus infinite celeribus in B inde a quiete, ſemper idem celeritatis gradus denuo imprimi debeat mobili, tempuſculo quovis; ſed tum demum, cum etiam feriens infinities minus cenſetur, quam mobile continue percuſſum; ubi etiam in impulſibus materiæ graviſicæ, vel venti navem impellentis, reapſe ita contingit, ob materiæ percutientis maximam tenuitatem, vel raritatem. Sed ſi feriens percuſſo æquale, verbi gratia, vel notabiliter comparabile eſſet, ac ſe haberet velut aqua ad lapidem & infinito impetu feriret; manifeſtum eſt, primo ſtatim ictu, quieſcenti percuſſo imprimendam fore celeritatem infinitam, quem gradum continue denuo imprimi non poſſe, eſt manifeſtum. Unde vides, non poſſe generaliter pronuntiari, quod continuo æqualem velocitatis gradum imprimat

primat medium æqualiter agens, ſi infinita celeritate agere ponatur; *1696* ſed & in eo caſu, quo revera idem aut circiter idem ſemper gra- Januar. dus velocitatis imprimitur; non video quomodo inde poſſit inferri, ſine petitione principii, eumdem imprimi gradum virtutis, ſeu eumdem in patiente produci effectum; cum non concedam, vires eſſe velocitatibus proportionales, imo contrarium mihi ſit pro demonſtrato.

Quæ habes de incurſu obliquo egregia ſunt & prorſus ad ſenſum meum. Imo ſi in plano aliquo (*Fig.* 31.) tres ſint globi æ- TAB. VI. quales A, B, C & globus A in duos quieſcentes B & C ſimul incurrat, ita ut centra eorum in momento concurſus faciant triangulum, quod ſit rectangulum ad A; demonſtro quieturum corpus A in 2 A, corpora autem B & C omnem vim eſſe receptura; & quidem itura celeritatibus 2 B 3 B, 2 C 3 C, quæ ſint latera quadrati, cujus diagonalis ſit 1 A 2 A, celeritas ipſius A ante ictum. Hinc jam duxi conſequentiam, qua rurſus conſtrictus tenetur Dnus. Papinus. Ponamus corpora B & C, in 3 B & 3C, parieti immobili Elaſtico directe occurrentia, repercuti celeritate & itinere, quo venerunt, & redeuntia proinde ſimul ad 1B & 1C, ibi rurſus ſimul incurrere in A, loco cujuſque reſumto; tum ambo B & C reſument quietem, & corpus A ſuam celeritatem recipiet. Hinc porro ſequitur, idem futurum, ſi B & C in quieſcens A veniant, ex locis 3 B, 3 C, celeritate aliunde accepta, quam ab A, aut pariete elaſtico; nihil enim refert, unde habeant, poſtquam ſemel habent. Ergo æquales globi B & C & æquiveloces, ſimul incurrentes in tertium cuilibet eorum æqualem A, ſitu centrorum faciente triangulum A B C rectangulum in A, quieſcent poſt ictum, & totam ſuam vim in A transferent, eique dabunt celeritatem 2 A 1 A, quæ ſit ad celeritatem ipſorum 3 B 2 B, vel 3 C 2 C, ut diagonalis ad latus quadrati. Unde jam habemus ſimpliciſſime, quod Papinus fieri poſſe negárat, ut, in concurſibus, ex majore maſſa in minorem tota vis transferretur; quod tamen hic contingit ex B + C in A. Idque in litteris ad Papinum ſcriptis innui a me repertum per concurſum unius cum duobus, non ta-

Digitized by Google

1696 Januar. men expoſui; quod videretur mihi inconvertibilis demonſtrationibus quantiſcunque.

Sed quoniam Te in noſtris caſtris video, lubenter communicabo principium meum a priori demonſtrandæ veræ æſtimationis virium; quod mihi in promptu eſſe aliquoties indicavi, nondum tamen hactenus produxi. Tibi autem communicare eſt frugiferæ maxime terræ commendare granum, ut in magnam plantam ſurgat. Petitur autem ex principiis maxime primis & abſtractis, nempe notione temporis, ſpatii, & actionis. Unde etiam patet tantum abeſſe, ut quod aliqui putarunt, negligatur a me debita temporis conſideratio, ut potius ſit totius æſtimationis baſis.

Ecce Argumentum.

Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt dupla, virtualiter, actionis facientis idem duplum tempore duplo; ſeu percurſio duorum milliarium, intra horam, eſt dupla [virtualiter] percurſionis duorum milliarium, intra duas horas.

2°, Actio faciens duplum, tempore duplo, eſt dupla, formaliter, actionis facientis ſimplum tempore ſimplo; ſeu percurſio duorum milliarium, intra duas horas, eſt dupla, [formaliter,] percurſionis unius milliaris, intra unam horam.

3°. Ergo Actio faciens duplum tempore ſimplo eſt quadrupla Actionis facientis ſimplum, tempore ſimplo; ſeu percurſio duorum milliarium, intra unam horam eſt quadrupla percurſionius unius milliaris, intra unam horam.

4°. Si pro duplo ſubſtituiſſemus triplum, quadruplum, quintuplum &c. prodiiſſet actio noncupla, ſedecupla, 25pla; & generaliter patet, actiones motrices æquabiles, æquitemporaneas, æqualium mobilium, eſſe ut quadrata celeritatum, vel quod idem eſt, in eodem, vel æquali corpore, vires eſſe in duplicata ratione celeritatum. Q. E. D.

Hoc argumentum, quo eſt brevius & petitum ex magis obviis, hoc puto fore inexpectatius, & nonnullos etiam ſe ſe in eruendo aliquo ejus paralogiſmo fruſtra fatigaturos. Suſpicamur enim nos decipi, quoties brevibus & facilibus argumentis velut circumvenimur. Nolui tamen illos dignari hac liquida luce veritatis, qui argumenta

Digitized by Google

gumenta illa, ab affectibus gravium vel aliorum corporum ſenſibilium petita, non ut par eſt accepere; unde nec publice extare volui, ut eſſet, quod illis communicarem, qui ſe ſe æquos judices præbuiſſent. *1696* Januar.

Veriſſimum eſt, quod ais, & a me quoque comprobatum in Tentamine de motuum cœleſtium cauſis †, vires centrifugas in ratione compoſita eſſe ex duplicata directa celeritatum & reciproca ſimplice radiorum; neque id contemnendum eſt in rem noſtram; etſi enim hæ vires, vel potius ſollicitationes, differant a viribus ipſius per ſe circulantis; ſufficit quod illis ſunt proportionales. Interim revera nihil aliud ſunt quam celeritates elementares. In centro percurſionis indagando peculiaris oritur ſubtilitas, quam alia vice exponam; nunc enim valetudinis ratio magnam attentionem non fert.

Memini etiam me olim examinare reſiſtentiam reſpectivam ad meæ æſtimationis leges, & tamen veram deprehendere, quod & ipſum reſumtum lubentiſſime exponam. Cur autem in vulgari Mechanica æquilibrium ſit, cum velocitates deſcendendi infinite parvæ, ſeu initiales, ſunt ponderibus reciproce proportionales, cauſa eſt, quemadmodum etiam indicavi in *Actis*, quod initio etiam deſcenſus, vel aſcenſus, ſive altitudines, ſunt velocitatibus iſtis elementaribus proportionales. Generaliter autem gravium vires ſunt in ratione compoſita corporum & altitudinum, ad quos vi ipſarum aſcendere poſſunt corpora, vel ex quibus deſcendendo eas acquiſivere. Cæterum pro objectione non habeo quod notas, ſi una libra a fulcro duplo remotior cum duabus libris ſit in æquilibrio, ſupervenientem velocitatem actualem ex parte unius libræ deſcenſum ejus facturam, non tamen magno impetu ſemper, ſed pro ratione impreſſæ velocitatis; cum & oppoſitæ duæ libræ, una illa deſcendente, ſint elevandæ; nec puto experientiam a noſtris principiis diſſenſuram.

Mersenni experimentum vereor ne ſit erroneum; ſi tamen verum eſſet, globum erecto perpendiculariter tormento excuſſum non recidere, ſequeretur gravitatem, in brevi diſtantia a Terra,

† *Acta Erud.* 1689. Febr. p. 82.

Digitized by Google

1696 Januar. vim perdere, & Terram eſſe inſtar magnetis, qui aeus nonniſi valde propinquos attrahit. Neque id nobis officeret; rem tamen ita ſe ſe habere non facile credo. Miror experimentum a nemine, inde a MERSENNI temporibus, fuiſſe ſumptum.

Velim Tibi perſuadeas, cum contra motum perennem mechanicum nuper Tibi ſcriberem, plane me in animo non habuiſſe, quæ olim ope filtri propoſueras; alioqui dixiſſem aperte & candide, nec Te verbis aculeatis pupugiſſem; quod a meo more eſt alienum. Et non ero adverſus, cum declares debere accedere motum inteſtinum, ex aliis quam gravitatis principiis ortum, [veluti ſi fermentatio durabilis, aut periodica eſſet in liquore,] atque non niſi-motum phyſicum perennem intendas. Nam optime ais, liquore leviore ſuper graviorem poſito, & deinde cum eo perfecte mixto, commune eorum gravitatis centrum aſcendere; unde adeo vi quadam extranea, vel phyſica, ad hanc mixturam opus eſſe conſtat. Forte & alia poſtea vi phyſica opus erit ad procurandam filtrationem, ſeu ad vincendam cauſam mixtionis conſervatricem, quæ cauſa conſervans fortaſſe eſſe poſſet, vel ſola partium tenuitas. Itaque ingenioſam Meditationem Tuam ſugillare in animo non fuit.

Atque ita jam omnia Tua attigiſſe credo, etſi omnibus non ſit ſatisfactum, quod tamen ſpero me alias, Deo dante, facturum, ubi valetudo ſibi recte conſtabit. Interea parabilioribus meditationibus ſemper promptiſſime inſervire conabor. Et ſunt omnino in hoc negotio Dynamices noſtræ, quæ adhuc Tibi exponi debent, quia publice nondum proſtant; cum enim a multis annis iſta verſaverim, mirum non eſt, ſi nonnulla conſtitui, quæ primo aſpectu ſe ſe offerre non poſſunt. Quanti autem momenti ſit, recte conſtitui principia hujus Matheſeos, vel Phyſico-Matheſeos tam late patentis, quæ conſiderationem virium [rem imaginationi non ſubditam] addit Geometriæ, ſeu ſcientiæ imaginum univerſali, facile intelligis. Libentiſſime autem Tibi exponam ſententias meas, vel ideo, ut cognitis illis, facilius deinde per Te ſuperes difficultates, meque neceſſitate hæc diutius meditandi leves. Nam multa mihi elaboranda ſuperſunt adhuc altiora, ſi Deus vires vitamque concedat, quæ vellem non interire.

Cum

Cum Curſor publicus abiiſſet, ante has expeditas, atque adeo tempus adhuc ſupereſſet; nonnulla ſubjungenda putavi, ne qua in re Tibi ſatisfacere negligerem. Et quidem circa demonſtrationem meam ex principiis primis petitam, notatu dignum eſt, & imprimis memorabile, hinc ſequi revera eamdem ſemper quantitatem Actionis motricis abſolutæ conſervari; ſed in eo fuiſſe peccatum a CARTESIO, quod eam non recte accepit, & cum ea, quam vocat quantitate motus confudit, præjudicia recepta ſecutus. Deinde ſciendum eſt, a me diſtingui vim abſolutam a directiva, quamquam & directivam ex ſola conſideratione potentiæ abſolutæ deducere & demonſtrare poſſim. Et quidem demonſtro non tantum eamdem conſervari vim abſolutam, ſeu quantitatem actionis in mundo, ſed etiam eamdem vim directivam, eamdemque quantitatem directionis ad eaſdem partes, ſeu eamdem quantitatem progreſſus, ſed progreſſu in partibus computato, ducta celeritate in molem, non quadrato celeritatis. Hæc tamen quantitas progreſſus in eo differt a quantitate motus, quod duobus corporibus in contrarias partes tendentibus pro habenda quantitate motus totali [ſenſu *Carteſiano*] debent addi quantitates motus ſingulorum [ſeu facta ex celeritate in molem]; ſed pro habenda quantitate progreſſus, debent a ſe invicem detrahi; differentia enim quantitatum motus in tali caſu erit quantitas progreſſus. Itaque cum CARTESIUS putarit ſe ſe ita poſſe ſalvare actionem animæ in corpus, quod anima quidem non augeat, vel minuat quantitatem motus in mundo; augeat tamen, vel minuat quantitatem directionis ſpirituum; lapſus eſt ignoratione hujus legis noſtræ novæ de conſervanda quantitate directionis, quæ non minus pulchra eſt & inviolabilis, quam conſervatio virtutis vel actionis abſolutæ. Hæc autem lex directionis, vel potius conſectaria ejus, mire decepere pleroſque; ut videntes ibi locum habere æſtimationem ex ductu celeritatis in molem, ubique illi locum facerent, etiam cum agitur de vi abſoluta. Exempli cauſa, experimentis conſtitit, ſi duo globi duri, ſeu Elaſtici, A & B, directe & centraliter concurrant inter ſe celeritatibus, quæ ſint reciproce proportionales corporibus; eos ſe mutuo repellere, ita ut ambo redeant ex qua venere celeritate. Hujus rei neceſſitas

1696 Januar.

1696 Januar. ceſſitas ſequitur ex noſtro principio conſervandæ directionis. Nam, ante concurſum, progreſſus eorum, ſeu quantitas directionis, eſt æqualis nihilo; ergo talis etiam debet eſſe poſt concurſum. Cum vero etiam vis eorum abſoluta debeat conſervari, demonſtratur has duas conſervationes virtutis abſolutæ & directionis ſimul non poſſe obtineri, niſi dicta repercuſſione. Simili Methodo demonſtratur, quod ſupra aſſerui de globo A cum B & C concurrente per triangulum rectangulum, & regulæ etiam concurſus duorum corporum ſtatim definiuntur. Veriſſimum eſt etiam ipſam vim directivam haberi ductu molis in quadratum celeritatis, ut aliquando apparebit. Interim, eo ſepoſito, illa ſimplex conſideratio directionis, ſeu progreſſus, etiam facit, ut, in aliis multis, opus ſit celeritate ducta in molem; veriſſimaque maneant theoremata receptæ Mechanicæ, item oſcillationis, vel percuſſionis, imo & reſiſtentiæ medii reſpectivæ. Reperi enim, ſi ponamus corpus in medio ferri, & medium conſtare ex innumeris globulis, per ſpatium tanto rarius diſſeminatis, quanto medium eſt tenuius; celeritatum decrementa, in quovis ictu amiſſa, eſſe celeritatibus proportionalia; & cum, æqualibus temporibus, numeri ictuum hoc loco ſint ut celeritates, fore decrementa ut quadrata celeritatum, æqualibus temporum elementis. Idque ex ipſis illis meis principiis de conſervanda, tam virtute abſoluta, quam directione, demonſtro. Unde vides, quanta hic cautione ſit opus in recto uſu principiorum, nec iri debere per ſaltum, nondum omnibus rite examinatis. Sed hæc altiora objectoribus, in quibus non ſatis docilitatis apparuit exponere non ſum dignatus; tametſi principium hoc generale de conſervanda etiam directione contra Carteſianos non diſſimularim. Tibi vero vellem hæc omnia uno oculi obtutu paterent. Atque ita jam ea dedi, ex quibus omnibus tuis difficultatibus [etiam ſupra dilutis] ſatisfit. Hoc tantum addo, re conſiderata, non eſſe quod quæramus demonſtrationem hypotheſeos illius, quaſi grave deſcendens vel aſcendens plures ictus a materia gravifica recipiat, eodem tempuſculo, proportione celeritatis, neque enim veram puto: & ſi eſſet vera, celeritates non creſcerent æquabiliter, ſeu ut tempora. Interim minime concedendum eſt, quod æqualis gradus virium abſolutarum, quovis

vis ictu gravi, addatur vel auferatur; etſi enim materia gravifica ſemper æqualiter agere ponatur, tamen grave patiens non manet æqualiter diſpoſitum. Longe enim alia ejus eſt diſpoſitio cum quieſcit, quam cum jam vim accepit. Imo, eo ipſo, dum additur eadem celeritas celeritati alicui jam inexiſtenti, demonſtratum habetur ex noſtris principiis addi vim majorem, quam cum additur quieti; ſeu plus eſſe celeritatis gradum addere jam moto, vel magis moto, quam addere quieſcenti, vel minus moto. Ut ita argumentum contrarium ſit demonſtrative revictum, & alia ſolutio non ſit quærenda. Vale. *1696 Januar.*

Dabam *Hanoveræ* 28. Januar. 1696.

Deditiſſimus
Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

P. S. Curavi nuper edi relationem ex *Gallia* mihi miſſam de novo illo & admirabili Antidyſenterico, quod mercator quidam ex *Hiſpania* attulit, & juſſu Regis innumeris ſucceſſibus comprobatum eſt. Non dubito quin Tibi, in *Gallia* verſanti, dudum innotuerit. Sed quoniam nunc compertum eſt, nihil aliud eſſe quam remedium a PISONE deſcriptum in *Hiſtoria naturali Braſiliæ*, & quæ antea velut arcana premebantur, jam emanavere, in uſum noſtrorum edi curavi. Credo hoc remedium plus adhuc habere in receſſu, nec ad ſolas dyſenterias valere. Apud PISONEM vocatur *Ipecacuanha*. . . . .

De cœtero magna me voluptate afficies, ſi me crebro, & ſi vacat, ſeptimanatim ſcribas, etſi ego fortaſſe ſemper ſeptimanatim reſpondere non poſſim. Iterum Vale.

EPIS-

Digitized by Google

EPISTOLA XXIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De actione gravitatis. De actione corporis infinite velocis. De mediorum reſiſtentia. De æſtimatione virium a priori. *De curva æquabilis preſſionis. De Centro gravitatis quiete vel motu non turbato & actionibus corporum. De legibus motus. De reſiſtentia.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

1696 Febr. VIx credideris, quanto me mœrore afficiat dubia Tua Valetudo; faxis, rogo, omnibus modis, ut graviori malo in tempore occurras; ſpero tamen catharrum, quo natura ſubinde, præſertim hoc anni tempore, utitur ad expellendum quod ſibi moleſtum eſt, Tibi pariter in firmiorem ſanitatem eſſe ceſſurum; quod ut ita fiat, Deum animitiùs precor.

Dominus Papinus, ut video, manus victas nunquam dabit, jam nimis aperte *Carteſianæ* opinionis defenſionem ſuſcepit, quam ut ab ea deflecti poſſit, ſuæ magis conſulens gloriæ [ſi qua gloria dicenda eſt, à præjudiciis non deſiſtere velle] quàm veritati....... Interim gaudeo, quod nunc ego Tecum in ſumma rei conveniam, & pleraque, quæ in prioribus meis notabam, ad ſtabiliendam novam Tuam hypotheſim, Tibi non diſpliceant. Miror etiam, a Te non approbari modum meum explicandi ictus materiæ gravificæ, qui, quolibet tempuſculo, corpori gravi imprimuntur; Certe ſi velimus æquos judices agere, oportet ut cuique ſuum tribuamus. Et quid clarius eſt, quam quod duæ quantitates fluidorum æquivelocium incurrentium in duo Corpora æqualia, ipſis inferant vires, quæ erant in ratione ipſarum quantitatum fluidarum; eſt enim & hic repetitio effectuum homogeneorum, quam adeò commendas pro æſtima-

æſtimatione cauſarum; ita Ex. gr. quantitas fluidi ut 2 A, Celeritate ut C, producet duplo majorem vim quam quantitas ejuſdem fluidi, ut 1 A, celeritate eadem C, quod enim poteſt unum A, idem poterit etiam A, cæteris paribus; ergo geminata cauſa, geminatur effectus. Hinc ſiquidem minus arrideat quod dixerim, numeros ictuum, qui quolibet tempuſculo imprimuntur Corpori gravi, eſſe ejus celeritati proportionales, ponamus unicum eſſe ictum, quovis tempuſculo impreſſum [quamvis, ut verius dicam nullus ſit ictus, ſed potius una continua preſſio per totum deſcenſum gravis]: Numquid ipſi ictus diverſis tempuſculis impreſſi erunt, [quandoquidem celeritas materiæ gravificæ maneat ſemper eadem] ut quantitates fluidi ſeu materiæ gravificæ illis tempuſculis percurſæ ſeu penetratæ; verum hæ quantitates ſunt ut ſpatiola deſcenſuum momentaneorum, id eſt, ut celeritates gravis; ergo etiam ictus, vel potius vires ictuum diverſis tempuſculis gravi impreſſæ, erunt ut celeritates. Id quod apertius liquet ex ipſa figura in ultimis meis adjecta, quam, ſi placet, aſpicias; ubi ſi ſupponatur grave deſcendens per AB, eſſe Ex. gr. in 2, facturum uno tempuſculo deſcenſum 2, 3; nunc autem eſſe in 6, & æquali tempuſculo percurrere 6, 7; illico apparet majorem copiam materiæ gravificæ æquali tempuſculo appellere ad grave, quando eſt in 6, quam cum eſt in 2; quæ quidem copiæ erunt ut ſpatiola percurſa, id eſt, ut 5, 6. ad 1, 2; id eſt, ut celeritates in dictis locis acquiſitæ; ſed rogo ut hæc paulo attentius mecum conſideres; non enim dubito quin iis tandem aſſenſum tribuas, cum adeo apprime & rationi & experientiæ conveniant; licet verum ſit, me minus congrue dixiſſe grave deſcendens, vel aſcendens, plures ictus a materia gravifica recipere, eodem tempuſculo, pro portione celeritatis, eſt enim, ut jam dixi, unica continua preſſio; interim per numeros ictuum illorum Celeritatibus proportionales, intelligere volui preſſiones uno tempuſculo inductas, quæ ſint celeritatibus proportionales, ideo quod grave in illa proportione materiam gravificam penetret, ut ego puto, non autem quod grave, nunc tardius, nunc celerius moveatur, ut tu ſtatuis. 1696 Febr.

Unde cernis meam ſententiam planè nil officere opinioni recep-

1696 Febr. tæ, celeritates creſcere æquabiliter, ſeu ut tempora; Ne autem quid deſit, oſtendam alterum Dilemmatis membrum, quod ſcilicet globus A, incurrens celeritate infinita in globum B, æqualem ei vim imprimat, ſive globus B quieſcat, ſive moveatur; ad quod demonſtrandum hæc duo tanquam conceſſa præmittam. 1°. ſi duo globi moveantur in plano, quacumque celeritate, & ſibi mutuo occurrant; erit quantitas ictus eadem cenſenda, ſeu erit ictus æque fortis, ſive planum, ſuper quo moventur globi, omnino quieſcat, ſive alia peculiari celeritate moveatur; hoc utique nemo negabit, alias corporum actiones in terra non eædem dicendæ eſſent in Hypotheſi Ptolemaica, & Copernicana, vel Ex. gr. Operarius in navi laborans, non eadem vi clavum impelleret, ſi navis quieſcat quam ſi ſit in motu. 2°. Corpus motum celeritate infinita eumdem effectum præſtabit, quem præſtat, ſi ejus celeritati ſuperaccedat finitus celeritatis gradus; ſit enim Corpus A, celeritate ∞ (infinita) & idem corpus A celeritate $\infty + 1$; erunt effectus ut quadrata celeritatum, id eſt, ut ∞^2 & $\infty^2 + 2\infty + 1$: verùm hæc duo quadrata cenſentur æqualia, quoniam $2\infty + 1$ pro nihilo habebitur reſpectu ∞^2. Quibus præliminatis ſupponatur globus A moveri in plano aliquo quieſcente, celeritate ∞, & incurrere in globum B, quieſcentem; nunc verò intelligatur planum ſimul etiam moveri in eaſdem partes, celeritate ut 1; habebit hac ratione globus A velocitatem $\infty + 1$, & globus B. velocitatem 1: atque adeo, per lemma primum, globus A, celeritate $\infty + 1$, tantundem valet in globum B, celeritate 1, quam idem globus A, celeritate ∞ in globum B, celeritate 0, ſeu quieſcentem. Verùm per Lemma ſecundum effectus Globi A, celeritate ∞, eſt æqualis effectui globi A, celeritate $\infty + 1$; Ergò etiam globus A, celeritate ∞, tantundem valet in globum B, celeritate 1, quam in globum B, celeritate 0, ſeu quieſcentem; id eſt, vis impreſſa globo B, erit æqualis, ſive moveatur, ſive quieſcat. Q. E. D.

Hinc, ni fallor veritas illius, quod de globo ſclopeti in teſtudinem impacto retuli, ſatis aſſeritur.

Dum hæc ſcribo, non poſſum quin ob affinitatem materiæ, aliquid moneam, quod mihi, poſt ſcriptas demum priores meas, occur-

Digitized by Google

occurrit in perlectione ſchediaſmatis tui *Actis Erud.* Anno 1689. p. 40. inſerti, *De reſiſtentia medii, & motu projectorum gravium in medio reſiſtente*; ubi, quæ de Reſiſtentia abſoluta, Art. 1. habes, nimis feſtinanter à Te ſcripta videntur, ut pro ingenuitate Tua ipſe fateberis, ſi ea relegere placuerit. Dicis enim, 1696 Febr.

1°. *Decrementa virium ſunt proportionalia incrementis ſpatiorum*; quod utique ita debet eſſe; etenim ad ſuperandam duplo majorem frictionem, id eſt, ad percurrendum duplum ſpatium, etiam impenditur duplo major vis &c. ſed quod ſubnectis.

2°. *Velocitates ſunt proportionales ſpatiis, perdita percurſis, reſidua adhuc percurrendis*; hoc ipſi tuæ hypotheſi de æſtimatione virium minus conſentaneum videtur. Ratio quam addis ibidem.

Ponantur incrementa ſpatii eſſe æqualia, erunt decrementa virium æqualia [per prop. 1.]: *jam ſi ejuſdem mobilis decrementa virium ſint æqualia, etiam decrementa velocitatum ſunt æqualia* [*ſunt enim vires ut quadrata velocitatum; æqualibus autem exiſtentibus quadratis, etiam æqualia ſunt latera;*] *itaque Elementa velocitatum amiſſarum ſunt ut elementa ſpatiorum percurſorum, reſiduarum ut adhuc percurrendorum. Ergo velocitates ſunt ut ſpatia* &c. In hoc præprimis vacillat, quod conſideras, velocitates amiſſas, quæ utique amplius non exiſtunt, & proinde ad æſtimationem virium perditarum nihil faciunt, loco quod conſiderari debuiſſent velocitates reſiduæ ad æſtimandas vires reſiduas, ex quibus deinde decrementa illarum & horum innotuiſſent; ſunt enim velocitates reales, quæ determinant vires. Hinc, ſi in figura ibi appoſita, (*Fig.* 32.) velocitas initio ſit AE, ſpatium integrum in medio percurrendum ſit recta AB, ejus pars jam percurſa AM, adhuc percurrenda MB; velocitas reſidua MC, vel (AF,) amiſſa FE, erit ECB, non recta, ſed parabola, cujus vertex B, & axis BA: quod quidem ex hoc ſolo etiam patet, quod ſi ſpatium percurſum AM ſit Ex. gr. $\frac{3}{4}$ partes axis AB, perdiderit mobile etiam $\frac{3}{4}$ ſuæ vis [quia ſpatia percurſa ſunt ut vires impenſæ] remanebit ergo mobili $\frac{1}{4}$ vis initialis, & cum vires ſint [juxta hypotheſin novam] ut quadrata TAB.VI.

 celeri-

1696 Febr. celeritatum, habebit mobile in M, $\frac{1}{2}$ celeritatis initialis, id eſt $BM : BA = MCq : AEq$.

Præterea huic meæ objectioni ipſe apertiſſime ſuffragaris in penultimis tuis ad me datis; ubi ais, me recte judicare, ex Tuis principiis ſequi Corpus duplo celerius quadruplo amplius penetraturum in materiam mollem; modo conſideretur ſola difficultas, quæ eſt in ſeparatione partium tenacium, id eſt, conſiderata ſola reſiſtentia abſoluta &c. Quæ cum ita ſe habeant, pleraque cadunt, quæ in dicto ſchediaſmate ex præmiſſis illis deducis; ut curva AL cujus abſciſſæ & applicatæ BM, ML, denotant ſpatia reſidua, & tempora inſumta, non erit logarithmica, ſed parabola communis, contra reg. 3, & 5. Art. I. Ideoque mobile M abſolvit ſpatium percurrendum integrum AB. tempore finito, contra reg. 4, ibidem. Sequentia etiam quoad maximam partem ſubvertuntur. Qua de cauſa, Tibi deliberandum relinquo, annon hæc corrigere operæ pretium eſſet. Interim enixe rogo, ut hanc meam admonitionem ſerena fronte aſpicias; vides enim unicum meum ſcopum eſſe ſtudium veritatis, & procul a me diſtare morem illorum qui, aliorum ſcripta cavillandi unice cauſa, ſuas objectiones ſtatim divulgant publicè; ſi viciſſim a me in aliqua re peccatur, non ſolum æque fero correctionem, ſed inſuper obſtrictum me fateor illi qui me ab errore liberaverit; quo nomine Tibi plura, quam ullatenus demereri poſſum, debeo.

Modus transferendi totam vim ex majori maſſa in minorem; quem ex iis, quæ de incurſu obliquo globorum dixeram, deduxiſti, mihi perplacet; nec dubito quin Dnum Papinum, & vel invitum, ad aſſenſum coëgerit, pergratum tamen eſſet intelligere, quid reſponderit. Meo arbitrio non male ageres, ſi reſponſionem Tuam ad ultimas ejus objectiones etiam publici juris faceres; cum ille, in libello ſuo, eo Te invitare videatur; alias multi rem a Papino egregie defenſam putarent.

Argumentum a priori petitum, quo demonſtras principium Tuum, eſt ſane ſpecioſiſſimum, & ut dicis, omnino inexpectatum; quod illud mihi communicare volueris, haud parvas refero gratias. Non

yideo

video quid ab adverſario in contrarium dici poſſit; Niſi forte quod *1696*
actio virtualis confundi videatur cum actione formali; negando ſci- Febr.
licet conſequi A eſſe quadruplam ipſius C, ex eo quod A ſit dupla ipſius B, virtualiter, & B dupla ipſius C, formaliter. Itaque dicet tali modo ratiocinari licere, ſi utraque actio eſſet homogenea, id eſt, utraque aut virtualis, aut formalis; ſed utrumvis ſumamus, delabemur ſemper in πρώτον ψεύδος; quod ſcilicet actio faciens duplum, tempore ſimplo, non eſſet quadrupla, ſed dupla tantum, actionis facientis ſimplum tempore ſimplo. Ecce imitor argumentum Tuum.

1°. Actio faciens duplum tempore ſimplo eſt dupla virtualiter actionis facientis idem duplum tempore duplo.

2°. Actio faciens duplum tempore duplo eſt ſimpla virtualiter actionis facientis ſimplum tempore ſimplo.

3°. Ergo actio faciens duplum tempore ſimplo, eſt dupla actionis facientis ſimplum tempore ſimplo. Vel ſcilicet.

1°. Actio faciens duplum tempore ſimplo eſt ſimpla formaliter actionis facientis idem duplum tempore duplo.

2°. Actio faciens duplum tempore duplo eſt dupla formaliter actionis facientis ſimplum tempore ſimplo.

3°. Ergo, &c.

Vides duo Argumenta, quæ idem plane concludunt, ſed Tuæ concluſioni omnino contrarium, & vulgato illo nituntur axiomate, quæ eidem ſunt æqualia illa ſunt inter ſe æqualia; quod quidem tantummodo locum habet in quantitatibus homogeneis, ut hic comparando actionem virtualem cum virtuali, & formalem cum formali, non autem illam cum hac. Quid ad hanc objectionem reſponderi debeat, ipſe diſpicias; Nolim ego Tibi quid objicere, ſed potius quid ab aliis objici poſſit ſincere moneo, quod a Te etiam ita acceptum iri ſpero.

In *Actis Februarii*, Anni 1689, vidi Tibi quoque compertum fuiſſe vires centrifugas, ſeu, ut vocas, conatus excuſſorios eſſe in ratione compoſita ex duplicata directa celeritatum, & reciproca ſimplice radiorum.

Hinc ſi velis paulo attentius conſiderare Problema meum, quod

R 3 ante

Digitized by Google

1696 Febr. ante annum in Actis propoſui, † illud non adeo inelegans reperies, quin tuam applicationem mereatur. Grave nempe in plano verticali deſcendens, & evolvens curvam aliquam quæſitam acceleratur, & proinde vis centrifuga hac ratione augetur. Quoniam autem filum evolvens, cui grave alligatum eſt, elongatur; vis centrifuga hac ratione minuitur. Quæritur itaque Conſtructio Curvæ, ut decrementa vis Centrifugæ, ab elongatione fili profecta, compenſentur per incrementa ejuſdem vis ab acceleratione provenientia; id eſt, ut tenſio fili ſemper eadem maneat; vel ut filum ſemper vi eadem extendatur.

Quænam, in Centro percuſſionis indagando, alia oriatur ſubtilitas, quam illà, ut conſiderentur quadrata celeritatum actualium, ceu in prioribus meis innui, lubentiſſimè mihi exponi cuperem.

Ais Te olim examinaſſe reſiſtentiam reſpectivam ad Tuæ æſtimationis Leges, & tamen veram deprehendere; ſed neſcio utrum verum putes, an quod reſiſtentiæ reſpectivæ ſint ut quadrata, an vero ut cubi celeritatum; illud vulgaris eſt opinio, hoc autem ex exiſtimationis Tuæ lege conſequitur.

Mirum quantum me delectarunt, quæ habes de vi directiva, & quantitate directionis ad eaſdem partes, ſeu quantitate progreſſus; ubi pulchre detexiſti, quid CARTESIO aliiſque ad errorem anſam dederit; ſcilicet quod cum viderent æſtimationem ex ductu celeritatis in molem alicubi, ut in duobus globis perfecte elaſticis, inter ſe, celeritatibus quæ ſint reciproce proportionales corporibus, concurrentibus; qui poſt ictum, priſtina celeritate repercutiuntur, locum habere; fallaciam committentes inductionis ubique illi locum facerent. Recte dicis quod vis directiva, ex ſola conſideratione potentiæ abſolute deduci & demonſtrari poſſit: ſed non ita facile eſt demonſtrare, ſemper eamdem quantitatem directionis ſeu progreſſus conſervari. Interim ſcies me, jam a longis annis, ſimile formaſſe principium, quod, ex occaſione Tui, iterum in memoriam revocavi, & poſt inſtitutum Examen mirifice cum Tuo conſpirare deprehendi. Illud autem eſt tale: ſi Corpora quotcunque, in motu conſti-

† *Acta Erud. ſuppl.* Tom. II. ſect. VI. p. 290. *Opp.* Tom. I. N°. XXV. p. 141. Vide ſupra Epiſt. 7.

conſtituta, ſibi quomodocunque occurrant; habebit ſe centrum commune gravitatis poſt concurſum eodem modo quo ante concurſum; id eſt, poſt mutuam actionem Corporum, centrum commune gravitatis eamdem directionem & eamdem celeritatem ſervabit, quam habebat ante actionem. Poſſum autem demonſtrare, quod id quod vocas quantitatem directionis, ſcilicet ducta celeritas in molem, nil aliud ſit, quam quantitas progreſſus centri gravitatis, ſeu ducta celeritas centri communis gravitatis in ſummam molium; adeo ut hæc duo principia ſint plane unum & idem. Ex his jam conjicere liceret, eamdem ſemper gravitatem directionis in Mundo conſervari; eſt enim iſta quantitas ſemper nulla; ſeu tanta eſt quantitas directionis in unam partem, quanta in contrariam; alias centrum commune gravitatis totius univerſi progrederetur æquabiliter in linea recta in infinitum; à quo utique natura abhorret. Concipio itaque totam Machinam mundanam, tanquam Corpus ſuſpenſum in centro gravitatis, cujus tamen partes, liberæ & ſeparatæ, omnibus modis circa centrum moventur; ita ut perpetuum æquilibrium ſervetur. Ex his principiis facile novæ & veræ conduntur Regulæ communicationis motuum: Veteres enim, a CARTESIO & aliis conſtitutæ, omnes erroneæ ſunt; eo ipſo quod ad conſervationem ejuſdem quantitatis virium motricium & progreſſus centri communis gravitatis non attenderint. Concurſus harum duarum quantitatum ſibi ſemper æqualium regulas determinat; alias eſſet Problema indeterminatum, cum infinitis modis celeritates mobilium variari poſſint, ita tamen ut ſemper eadem quantitas virium maneat. Sed non erit eadem quantitas directionis, ſeu progreſſus centri gravitatis; & viciſſim infinitis modis celeritates variantur, ut ſemper eadem quantitas progreſſus maneat, ſed tunc non manebit eadem quantitas virium. Unicus ergo eſt caſus, ubi utrumque ſimul obtinetur, ex quo generalis Regula pro communicatione motuum elicitur hæc.

1696 Febr.

Globus a, celeritate m, incurrens in globum b, habentem celeritatem n, habebit poſt ictum celeritatem $(am + 2bn - bm) : (a + b)$ & celeritas ipſius b erit $(bn + 2am - an) : (a + b)$; ſi globi ad eaſdem partes ferantur, & m ſit major quam n. Sin ad

1696 Febr. ad partes contrarias, ponendum tantum eſt $-n$ pro $+n$, & $+n$ pro $-n$. Hinc ſi corpus A, celeritate ut 1, incurrat in æquale B quieſcens; habebit poſt ictum, B celeritatem ut 1, & A quieſcet; [pono hic corpora perfecte elaſtica, vel dura; idem enim effectus ſequetur, ſive ſint perfectè elaſtica, ſive perfectè dura, nam falſiſſimum puto, quod aliqui, inter quos Wallisius, ſtatuerunt perfectam duritiem, ſi qua daretur, efficere ut corpora poſt concurſum ſimul & conjunctim ferrentur.] Sed ſi artificio quodam effici poſſet ut, in ipſo concurſus momento, corpora, etiamſi ſumme dura, per uncum aliquem, vel aliquod gluten, ita arcte ſibi invicem cohærerent, ut non poſſent progredi niſi junctim; procul dubio ob conſervationem ejuſdem quantitatis virium, irent celeritate ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$: Verum tunc quantitas progreſſus non eadem maneret. En igitur caſum aliquem, quem in penultimis Tuis dari poſſe negaveras: Tuam ſuper hoc reſponſionem libenter audirem; Ego quidem aliquid reſponſionis loco adducere poſſem, ſed id ipſum non omnino mihi ſatisfacit. Cæterum dicis, quod ſimplex conſideratio directionis, ſeu progreſſus, etiam faciat ut in aliis multis opus ſit celeritate ducta in molem, veriſſimaque maneant theoremata receptæ Mechanicæ: item oſcillationis, vel percuſſionis, imo & reſiſtentiæ medii reſpectivæ. Neſcio quo pacto facias ut, ſola celeritate ducta in molem, pervenias ad cognitionem centri oſcillationis; Ego eleganter admodum & feliciſſime, centrum iſtud invenio; ponendo tantum principium illud conſervationis ejuſdem quantitatis virium; ubi in omnibus conſentio cum Dno. Hugenio, abſque ut adhibeam ejus obſcurum principium, quod ſcilicet commune centrum gravitatis penduli compoſiti ad eamdem altitudinem aſcendere debeat, ſive corpora pendulum conſtituentia ſeparatim moveantur, ſive ſimul, cum ſunt in linea rigida affixa, oſcillentur. Interim de centro percuſſionis nondum conſtat, an illud ſit, quod Geometræ hactenus conſtituerunt; Lubentiſſime concedo, ſi ponamus corpus ferri in medio es conſtante ex innumeris globulis æqualiter diſſeminatis, celeritatum decrementa fore ut quadrata celeritatum, æqualibus temporum elementis. Poſſum

ſum enim & ego illud demonſtrare ex principiis de conſervanda tam virtute abſoluta quam directione; hoc autem minime probat, quod etiam reſiſtentiæ ipſæ, id eſt, virium decrementa quovis tempuſculo amiſſa ſint ut quadrata celeritatum; quin imo ex hoc ipſo evincitur reſiſtentias eſſe ut cubos celeritatum. Si enim (*Fig.* 33.) Mobile A feratur in tali medio, & abſciſſa AB denotet tempus, erit celeritas BD, in curva hyperbolica CD, cujus aſymptotos AB, & celeritas initialis AC, quoniam differentiales ipſarum BD ſunt ut harum quadrata. Verum vires mobilis ſunt etiam ut quadrata celeritatum BD: ergo decrementa celeritatum ſunt ut vires, & proinde decrementa decrementorum celeritatum ut decrementa virium, id eſt, ut reſiſtentia ipſa; ſunt autem in hyperbola decrementa decrementorum applicatarum BD, id eſt, differentiæ ſecundæ ut cubi applicatarum ipſarum BD. Ergo &c.

1696 Febr.

Tab. VI.

Vale Vir Celeberrime.

Groningæ 22. Febr. 1696.

& ama

omni honoris cultu

addictiſſimum

J. Bernoulli.

Digitized by Google

EPISTOLA XXIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De reſiſtentia mediorum. Controverſia cum PAPINO. *De æſtimatione virium* a priori. *De centri gravitatis quiete vel progreſſu uniformi. Tractatur dynamice. De legibus motus. De notis algebraicis.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

1696 Mart. MEditationes Tuæ mihi ſunt gratiſſimæ; ſive provehas noſtra, ſive ingenioſis dubitationibus illuſtres. Utinam ego ſemper meditandi laborem ferre poſſem, ut Tibi recte ſatisfacere liceret; faciam tamen quantum nunc commode poſſum. A Te abſit ut exigam, mihi ut ſeptimanatim ſcribas, cum paria reddere non poſſim: facies ergo, quod e re videbitur, perſuaſus tua nunquam apud me nimia eſſe. Si non aſſentior in quibuſdam, peto ne me id quadam judicii iniquitate facere putes, ut propemodum inſinuas, cum ais: *ſi æquos judices agere velimus, oportere ut ſuum cuique tribuamus.* Spero Te perſenſurum me, non ſine gravi cauſa, dubitaſſe de modo explicandi ictus materiæ graviſicæ. Aſſeris, ſi fluidum A incurrat in corpus L & fluidum priori ſimile & æquivelox B incurrat in corpus M æquale corpori L, vires in corporibus L & M productas, fore ut magnitudines fluidorum A & B; vel ut tuis verbis utar; *duas quantitates fluidorum æquivelocium, incurrentium in duo corpora æqualia, illis inferre vires, quæ ſunt in ratione quantitatum fluidorum.* Hanc propoſitionem non concedo, nec video quomodo per repetitionem effectuum a me adhibitam & commendatam demonſtrari poſſit. Et reperies contrarium contingere, ſi A & B non fluida ſint, ſed ſolida; licet corpora recipientia L & M ambo quieſcere intelligantur. Et multo minus res ſuccedet, ſi diffe-

differant celeritate. Nimirum ſi globus A, 1; celeritate 1, incurrat in globum L, 1, quieſcentem; accipiet globus L celeritatem 1. Si vero globus B, 2, celeritate 1, incurrat in globum M, 1, quieſcentem, accipiet globus M celeritatem 4. Vides ergo, etſi globus B ſit duplus ipſius A, tamen vires impreſſas ipſi M multo plus quam duplas eſſe earum, quæ impreſſæ ſunt ipſi L. Numerum ictuum non improbo; imo magis veritati conſentaneum arbitror, quam preſſionem continuam. Quod tuam attinet rationem probandi corpus celeritatis infinitæ eamdem vim dare percuſſo, ſive quieſcenti, ſive moto, concedo ictum eſſe æque fortem, ſive corpora concurrant in plano quieſcente, ſive in plano moto; ſed aliud eſt ictum eſſe æque fortem, aliud eamdem in percuſſo produci potentiæ quantitatem; computando tam quod proprium, quam quod commune eſt; cum alia ſit virium, alia motuum, vel potius directionum compoſitio: quæ etiam in finitis agnoſci poſſunt. Sunt & alia in eo argumento, quæ non omnino concludunt, quod appareret, ſi in formam redigeretur. 1696 Mart.

Monitum Tuum ad meam æſtimationem reſiſtentiæ abſolutæ deprehendo veriſſimum; idque ipſe occaſione data profitebor. Revera enim non valet hæc conſequentia; *ſi ejuſdem mobilis decrementa virium ſunt æqualia, etiam decrementa velocitatum ſunt æqualia;* ortumque hoc eſt ex præjudicio vulgari de æſtimatione virium, menti adhuc, præter intentionem, inhærente. Sit mobilis a, celeritas e, vis aee; vis amiſſa avv, vis reſidua $aee - avv$, celeritas reſidua $\sqrt{(ee - vv)}$. Sit ejuſdem mobilis celeritas (e), erit celeritas reſidua $\sqrt{((e)(e) - vv)}$. Celeritatis decrementum priore caſu erat $e - \sqrt{(ee - vv)}$ poſteriore caſu eſt $e - \sqrt{((e)(e) - vv)}$, quæ duæ quantitates non ſunt æquales. Itaque illud verum eſt, ſi vires integræ ejuſdem corporis diverſis temporibus ſint æquales, etiam velocitates fore æquales; ſecus eſt de parte, veluti de viribus amiſſis vel acquiſitis.

Nondum communicavi Dno. PAPINO modum transferendi totam vim ex majore maſſa in minorem, quem poſſibilem eſſe negaverat, ut theſin tueretur. Nempe vigeſimo Decembris anni præteriti, his verbis ad eum ſcripſeram „ Pour conclure, je me

Digitized by Google

1696 Mart. „ ſouviens, qu'autrefois vous avez nié qu'un grand Corps pût transferer toute ſa force ſur un plus petit, parce que ſelon l'opinion „ vulgaire des *Cartéſiens*, que vous ſoutenés, j'en inferois le mouvement perpetuel, & vous avez tâché d'éviter la force de mes „ preuves, touchant les moyens de cette translation, le mieux „ que vous avez pû, en faiſant des difficultés un peu recherchées ſur „ ces moyens. Cependant ayant revû mes méditations ſur le choc „ des Corps, j'ai trouvé que, ſans levier, ni autre apparat, dont „ je m'étois ſervi autrefois pour vous ſatisfaire là-deſſus, il y a un „ moyen ſimple pour cela. C'eſt que faiſant enſorte que deux „ corps choquent à la fois un troiſiéme, il doit arriver en certain „ cas, que les deux corps enſemble, quoiqu'ils faſſent une maſſe „ plus grande que le troiſiéme, demeurent pourtant en repos, & „ donnent toute leur force au troiſiéme. Ad hæc reſpondet Dnus. PAPINUS in litteris 15. Januarii 1696. „ Pour ce que vous di- „ tes des deux Corps, qui communiquent enſemble tout leur mou- „ vement, [non dixeram, *tout leur mouvement*, ſed, *toute leur force*] a un troiſiéme; je crois me douter de ce que c'eſt; mais „ crainte d'être encore obligé de donner deux réponſes au lieu d'u- „ ne, je différerai d'en parler, juſqu'à-ce que vous ayez nettement „ expoſé le fait, &c." Sed cum in illis ipſis mihi non ſatis æquitatis oſtendere, ſed ſe ſe ad eluſiones præparare videretur, rem exponere operæ pretium non putavi; neque enim ita nunc conſtitutus ſum, ut latebras varias quærentem perſequi velim, aut poſſim. Cæterum cum voluptate vidi Te in litteris tuis 18. Januarii datis, afferre nonnulla de compoſitione motus, quæ cum his pulchre conſpirant, ipſique opponi poſſunt. Quæ in libello ſuo ſcripſit, mihi controverſiam tuam parum ad ſenſum meum proponere videntur, ut rem ipſam per ſe explicare aliquando, quam cum ipſo litigare malim.

Video argumentum meum a priori non eodem apud Te eſſe loco, quo apud me. Neque habeo quod de eo querar. Tantum rogo, ut expendas talia paulo attentius, neque enim tam facile eludi poteſt, & ipſe pro me ſolutionem objectionis dare potuiſſes. Sane non video quid Tibi velis, cum dicis actionem virtualem confundi

fundi cum formali. Non enim actio mihi hic eſt virtualis vel formalis; ſed una actio alterius eſt dupla, vel *virtualiter*, vel *formaliter*. Nimirum *virtualiter*, cum dupla eſt æſtimatione, etſi non ſit dupla mole, vel congruentia, ut Ducatus eſt duplus Thaleri: *Formaliter* vero, ut Thalerus duplum eſt ſemithaleri. Et ſciendum eſt, quod duplum eſt formaliter, id etiam virtute ſeu æſtimatione eſſe duplum. Ideo cum nonniſi de virtute, ſeu æſtimatione, hic quæratur, nulla eſt confuſio diverſi generis quantitatum vel æſtimationum; nempe *virtualiter* duplum intelligo quod tale eſt virtualiter ſolum; ſed *formaliter* duplum voco, quod ſimul & formaliter & virtualiter duplum eſt, & poteram vocabulis illis [tantum harmoniæ cujuſdam cauſa adjectis] abſtinere; ut enim quia Ducatus duplus eſt Thaleri, & Thalerus ſemithaleri, concludo Ducatum ſemithaleri quadruplum eſſe; ita quia percurſio 2 milliarium, una hora, dupla eſt percurſionis 2 milliarium, 2 horis, & percurſio 2 milliarium, 2 horis, dupla eſt percurſionis unius milliaris, una hora; ſequetur percurſionem 2 milliarium una hora eſſe quadruplam percurſionis unius milliaris una hora. Ignoſce candide dicenti, non videris niſi admodum obiter inſpexiſſe demonſtrationem meam, cum eam ſic contra me verti poſſe objicis. 1°. Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt dupla virtualiter actionis facientis duplum, tempore duplo. 2°. Actio faciens duplum, tempore duplo, eſt ſimpla virtualiter actionis facientis ſimplum, tempore ſimplo. Ergo, 3°. Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt dupla actionis facientis ſimplum tempore ſimplo, quod eſt contra me. Sed rogo ut expendas, quo jure aſſumi poſſit præmiſſa ſecunda. Scilicet percurſionem duorum milliarium, duabus horis, eſſe virtualiter ſimplum, ſeu æquale percurſioni unius milliaris, factæ una hora. Certe quæ virtute æqualia ſunt æquipollent; quis vero curſor non malit percurrere unum milliare, una hora, quam duo milliaria duabus horis: quin potius, ſi hoc ultimum ab ipſo fieri velis, licet per intervalla, duplam mercedem petet, pro duplicato ſcilicet labore. Nimirum, ut dixi, quod formaliter duplum eſt [percurſio ſcilicet duorum milliarium, duabus horis] eo ipſo etiam virtualiter, ſeu æſtimatione, eſt duplum. Idem eſt de altero tuo argumento, ad

1696 Mart.

1696 Mart. mei, ut ais, imitationem fabricato, quod tamen rurſus longiſſime ab imitatione ejus abeſt; ut ipſe facile perſpicies, Ducato, Thalero, & ſemithalero ſubſtitutis. Placet tamen hoc quoque argumenti ſimulacrum expendere. 1°. Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt ſimpla formaliter actionis facientis idem duplum, tempore duplo. 2°. Actio faciens duplum, tempore duplo, eſt dupla formaliter actionis facientis ſimplum, tempore ſimplo. Ergo 3°. Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt dupla actionis facientis ſimplum, tempore ſimplo. Videris ita loqui, ac ſi propoſitiones hic poſſent aſſumi pro arbitrio; ſed qua tandem veriſimilitudine aſſumis hic præmiſſam priorem? ſimplum formaliter eſſe, nihil aliud eſt, quam æquale eſſe formaliter, ſive congruere, ut Thalerus & duo ſemithaleri. Tantum autem abeſt, ut percurſioni duorum milliarium, intra horam, æquetur formaliter percurſio duorum milliarium, intra duas horas, ut ne virtualiter quidem, ſeu æſtimatione, æquetur; quis enim dubitet, quin plus ſit, idem velocius, quam tardius peragere? Interim mirari ſubit mentis humanæ conditionem. His duobus vocabulis, virtualiter & formaliter, quæ omittere poteram, adjectis, totam apud Te argumenti vim corrupi, ut a re ipſa averſus, ageres, quod *Galli* non male vocant, *prendre le change*. Talia nobis eveniunt, ſolo attentionis defectu. Obvium aliquid nos ſæpe ita percellit, & ad ſe trahit, ut reliqua non amplius conſideremus; quaſi jam aſſecuti paralogiſmi, quem nobis facile fingimus, ſedem, ſive πρῶτον ψεῦδος, ut Tute loqueris. Ego nihil magni promittere auſim; ſperabam tamen reus non fieri paralogiſmi apertiſſimi, in argumentatione, non obiter elapſa, ſed a compluribus annis conſiderata, quam tanquam alicujus momenti venditaram. Itaque fateor non potuiſſe me non valde mirari præcipitem ſententiam tuam, & puto candorem in monendo meum Tibi non ingratum fore; quia utilis eſt, ut attentio excitetur, ne tempus male collocare mihi opus ſit, defendendo, quæ Tibi ipſi conſideranti facile ſe poterant approbare; cum me æquius ſit in his ſublevari. Majori ſpecie opponi poterat, pari jure quo ego aſſumſi hanc propoſitionem, *Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt dupla actionis facientis duplum, tempore duplo*, potuiſſe aſſumi hanc: *Actio faciens duplum*

duplum tempore ſimplo eſt dupla actionis facientis ſimplum tempore 1696
ſimplo. Verum reſpondeo hanc poſteriorem non poſſe aſſumi, ſed Mart.
potius convinci falſitatis manifeſtæ, hoc modo: Inter hæc duo A, *Facere duplum tempore ſimplo*, itemque C, *facere ſimplum tempore ſimplo*; datur medium minus priore & majus poſteriore, nempe B, *facere duplum tempore duplo*, cumque manifeſtiſſime [ex natura repetitionis perfectæ] ſit B duplum ipſius C, ſequitur demonſtrative A eſſe plus-quam duplum ipſius C. Comparatio igitur inter A & C poteſt reſolvi ulterius per interpoſitionem comparationis ſimplicioris; comparatio vero inter A & B interpoſitione ſimplicioris reſolvi non poteſt, ſed primitiva eſt. His igitur a Te expenſis, gratum erit aliquando cognoſcere, quid jam de argumentatione mea videatur. Quin aliam addo, quæ, ſi fundum rei ſpectes, redit in priorem, habet tamen ſuum proprium pondus. Actiones motrices [æquabiles intelligo] ejuſdem mobilis ſunt in ratione compoſita effectuum immediatorum, nempe longitudinum percurſarum & velocitatum. Porro longitudines [æquabiliter percurſæ] ſunt in ratione compoſita temporum & velocitatum. Ergo actiones motrices ſunt in ratione compoſita ex ſimplice temporum & duplicata velocitatum; ideoque iiſdem temporibus, vel temporum elementis, actiones motrices ejuſdem mobilis ſunt in ratione duplicata velocitatum, vel, ſi diverſa ſint mobilia, in ratione compoſita ex ſimplice mobilium & duplicata velocitatum. Itaque ex noſtris principiis verius rectiuſque oſtenditur, eamdem in univerſo quovis momento, vel æqualibus temporibus, actionis motricis quantitatem conſervari; Quam vero *Carteſiani* computant quantitatem motus, veram actionis motricis quantitatem non eſſe. Sunt autem potentiæ ut actiones, non impeditæ, nec adjutæ, æqualibus temporibus exercitæ. Videmus ergo eamdem ſemper vim, eamdemque movendi actionem in rebus ſervari, & quantum, vel potentiæ, vel actionis motricis uni decedit, tantum in alterum transferri.

Egregie divinaſti [conſiderato concurſu duorum in quibus celeritates ſunt reciproce ut moles, ubi nullam eſſe directionem notaveram] principium de conſervato ſemper progreſſu centri gravitatis coincidere cum principio ſervandæ directionis. Revera enim directio,

1696 Mart. rectio, ſeu progreſſio totalis idem eſt, quod progreſſio centri gravitatis ducta in mobilium aggregatum, ut jam fere GULDINO notatum, cujus regulam ampliavi; * & centrum gravitatis tantum præſtat ratiocinandi compendium. Malui autem directionem adhibere in loquendo, quod mihi cum *Carteſianis* res eſſet. Cum *Romæ* eſſem, anno 1689 & cum AZOUTO eruditiſſimo Gallo, qui inter Academiæ Scientiarum Regiæ velut conditores fuit, multum de his diſputarem, meditationes meas in ordinem redigens libellum adumbravi, in quo demonſtrantur hæc omnia, de vi ſcilicet tam abſoluta quam directiva, & conſervando progreſſu centri gravitatis, aliaque his non inferiora. Eum, tranſiens per *Florentiam*, amico, in Mathematicis egregio, petenti reliqui edendum, & ille redegit in mundum omnia ſtudioſe, ſed cum finis libro adhuc deeſſet, ſummittere in me receperam; & per me ſtetit hactenus, quominus editio ſequeretur; nondum enim colophonem adjeci; partim quod multa nova ſubinde naſcerentur, partim quod his, quos videbam mea non ut par erat accepiſſe, nollem velut obtrudere pulchras veritates. Interim propoſitionem hanc perelegantem inde decerptam, ante annos aliquot *Diario Pariſino* † inſeri curavi. Si mobile A [quod ut punctum nunc conſideramus] tendat ſimul motibus [id eſt, celeritatibus & directionibus] AB, AC, AD, &c. [id eſt, ut quo tempore, ſi uno motu ſolo ferretur, perventurum eſſet in B, eo, ſi altero ſolo ferretur, perventurum eſſet in C, & ita porro] & quæratur punctum G, quod ſit centrum gravitatis punctorum B, C, D, E, &c. & recta AG, producatur in F, ita ut AF ſit ad AG, ut numerus tendentiarum ad unitatem; feretur mobile motu compoſito AF, [id eſt, eo tempore, quo motu ſolo AC, perveniſſet in C, nunc motu compoſito perveniet in F:] quæ Propoſitio HUGENIO profundæ meditationis viſa eſt, & naſcitur & ipſa ex conſervatione directionis. Scilicet, quod ex motibus duobus componentibus, qui ſint ſecundum duo latera parallelogrammi, oritur motus compoſitus ſecundum diagonalem; hujus

* *Acta Erud. Lipſ.* 1696. Nov. p. 493. vel Joh. BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. XXIX. p. 153. G. G. L. *De novo uſu Centri gravitatis*, &c.

† *Journal des Sçavans* 1693. 35e. Journal. du 7. Sept.

Digitized by Google

jus propoſitionis generalis caſus eſt ſimpliciſſimus, dudum notus. Meminit meæ propoſitionis Dnus. *Frater* tuus, in iis, quæ nuper contra nos in *Actis* dedit. † Reſpondi quam-humaniſſime. *........ 1696 Mart.

. . . .

Verum eſt, quemadmodum & in proxime præcedentibus litteris innui, ex conjunctis duabus Legibus, conſervatæ vis abſolutæ, & conſervatæ directionis, determinari leges motuum, ſeu concurſuum; modo corpora concurrentia A & B ponantur eſſe dura, ſeu, quod idem eſt, perfecte elaſtica. Calculum autem ita inire ſoleo, ejuſque communicationem tibi non ingratam fore ſpero. Progreſſus corporum A & B, ad eamdem partem, vocetur, ante ictum, in illo v, in hoc, y; poſt ictum in illo x, in hoc z; quod ſi contingat corpora non tendere in eaſdem partes cum centro gravitatis, tunc ejus, quod in partem contrariam tendit, progreſſus erit negativus. His poſitis, ex lege virium abſolutarum conſervandarum fiet (1) $Avv + Byy = Axx + Bzz$; ex lege conſervandæ directionis, fiet (2) $Av + By = Ax + Bz$, quæ regula, certo tantum caſu, coincidit cum regula conſervandæ quantitatis motus *Carteſiana*, cum ſcilicet àmbo corpora tam ante, quam poſt concurſum tendunt ad eaſdem partes, & adeo nullus ex progreſſibus v, x, y, z eſt quantitas negativa. Sed ecce jam tertiam legem, quæ hinc naſcitur, non minus elegantem, imo cæteris ſimpliciorem. Ut enim prima regula eſt trium dimenſionum, & ſecunda duarum, ita tertia eſt dimenſionis unius. Nempe (3) $v - y = z - x$. Quod ſic oſtendo: Ex æquatione (1) fit (4) $Avv - Axx = Bzz - Byy$, & ex æquatione (2) fit (5) $Av - Ax = Bz - By$. Dividatur æquatio (4) per æquationem (5), prodibit (6) $v + x = y + z$, vel [quod idem eſt] æquatio (3). Æquatio igitur (3) continet legem conſervandæ celeritatis reſpectivæ ejuſdem, ſive ſit appropinquationis, acceſſuſve ante concurſum, ſive receſſus poſt concurſum. Et quidem hæc lex aliunde demonſtrari poteſt, per vim ſcilicet elaſticam concurrentium,

† *Explicationes* &c. Acta Erud. 1695. Dec. p. 548. Opp. N°. 66. pag. 657.
* G. G. L. *Notatiuncula ad Acta* Decemb. 1695... Act. Erud. 1696. Mart. pag. 145. vel Jac. BERN. Opp. N°. 71. p. 728.

1696 Mart. rentium, quæ concurſu compreſſa ſe deinde reſtituunt, adeoque tantum celeritatem reſpectivam in contrarium vertunt, ſeu diſpelluntur ut compellebantur. Unde ex lege prima & ex tertia aliunde demonſtrata viciſſim oſtendi poteſt lex ſecunda. Nam ſi æquationem (4) dividas per æquationem (6) prodit æquatio (5) vel (2). Aliaque adhuc plura in his arcana ſatis mirabilia latent. Caſus, ut corpora concurrentia ſimul eant poſt concurſum, ſervatis viribus, facilius fingi, quam a natura præſtari poteſt; abſorbebitur ſcilicet pars in ipſo retinaculo, vel glutine; atque ita objectioni, quam Tibi eo caſu facis, reſpondendum eſt.

Haud dubie, cum Hugenio ſentiendum eſt circa Centrum oſcillationis; in quo noſtra principia ſpectanti non poteſt eſſe difficultas; puto tamen & Centrum percuſſionis conſentire ob cauſam dictam. Circa medium reſpective reſiſtens, puto nos in ſe non pugnare, quia agnoſcis quod dixi, æqualibus temporum elementis, fore celeritatum decrementa, ut celeritatum quadrata. Interim pergratæ erunt meditationes tuæ, quas innuis de centro oſcillationis, vel de reſiſtentia reſpectiva, aliiſque. Diu eſt, quod de noſtris differentialibus apud me nihil attigiſti, ſed facile judico multa alia Tibi nunc agenda eſſe. . . . .

Mitto exemplum ejus quod de Antidyſenterico ex Gallico edi curavi. Inquiri peto in ſpecialia, quæ habentur in Batavis de modo obtinendi & uſu. . . . .

Tuas noviſſimas, his jam conceptis, partem & ſcriptis, accepi. . . . . Interim vale rectiſſime.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{8}{18}$ Martii 1696.

Deditiſſimus

G. G. Leibnitius.

P. S.

P. S. Accepi etiam *Acta* Februarii proximi *Lipſienſia*, in qui- 1696
bus relationem de Libro Nieuwentitii, tuamque ad ejus ob- Mart.
jecta reſponſionem † reperio, quam prorſus probo.

In relatione ipſa notatum video non immerito, intereſſe Reipublicæ Litterariæ, diſcentiumque inprimis, ut conſentiant Viri Docti in eaſdem notas. Quare velim audire ſententiam tuam, an probes mecum adhiberi notam ∫ pro ſummis, ut adhibetur nota d pro differentiis; item an approbes meam rationem exhibendi ſubinde diviſionem per duo puncta, verbi gratia, ut $a : b$, idem ſit quod $\frac{a}{b}$, id enim præſertim in typis commodum eſt, ne linearum ſpatium amittatur. Et conſtat proportiones a nonnullis ſolere tali ratione exhiberi $a : b :: c : d$, cum revera res redeat ad quotientum æqualitatem, ſufficit ſcribi meo more $a : b = c : d$ ſeu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Sunt & alia in notis fortaſſe utiliter obſervanda, de quibus alia occaſione.

† Joh. Bernoulli, *Demonſtratio analytica & ſynthetica conſtructionis curvæ Beaunianæ &c.* Act. Erud. 1696. Febr. pag. 82. Opp. Tom. I. N°. XXVII. pag. 145.

Digitized by Google

EPISTOLA XXV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De actione gravitatis. De æſtimatione virium a priori. *De conſervatione virium & directione. De corpore a pluribus ſimul potentiis impulſo. Ac reſiſtentia mediorum. Demonſtratio centri oſcillationis ex viribus vivis. De ſignis algebraicis. De notis* HUGENII *ad* Acta Eruditorum.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1696 April VEllem tandem diſceptationum noſtrarum finem videre, quod ipſe haud dubie deſiderabis; præſertim cum ſummam rei non ſpectent, in qua utique convenimus; .... & proinde diſpiciendum nobis eſſet potius, qua ratione unitis viribus veritatem adeo claram ab Antagoniſtarum telis vindicare poſſimus, quanquam interim te ſolum hujus veritatis primum detectorem eidem defendendæ plus ſatis parem putem. Noli quæſo verba, ſincero ut-ut imprudenti mihi elapſa, ita iniquè interpretari, quaſi Te cujuſdam iniquitatis arguam, abſit hoc procul, novi Tuam ingenuitatem, quam cum profunda Scientia & Eruditione conjunctam habes; optarem ut Tibi ſatis innoteſceret, quanti Te æſtimem, quam-longe te omnibus, qui Phyſici, Philoſophi, Mathematici audiri volunt, præferam; quam crebro unicum LEIBNITIUM in me habeam apud omnes, quibuſcum hodie converſari datur. Interim etiamnum ſententiam meam tueor, duas nimirum quantitates fluidorum æquivelocium incurrentium in duo Corpora æqualia, illis inferre vires, quæ ſunt in ratione quantitatum fluidorum. Sed hic ſuppono quantitates fluidorum infinite parvas eſſe reſpectu Corporum, in quæ incurrunt [uti revera ſupponi debet, hoc enim ſimili uſus ſum ad explicandum impulſum momentaneum materiæ gravificæ,

quæ

Digitized by Google

quæ utique quolibet tempuſculo nonniſi infinite parva ſui portione in grave impingit] adeoque fluida totam ſuam vim transferre in Corpora, ſiquidem particulæ fluidi ob continuo alias ſubſequentes poſt impulſum quieſcere cenſendæ ſunt. Hac itaque ratione aſſertum meum non poterit in dubium vocari. Fluido enim A incurrente in Corpus L, ipſique totam ſuam vim inferente, & fluido priori ſimili & æquiveloci B, incurrente in Corpus M æquale corpori L, huicque pariter totam ſuam vim imprimente, erunt dubio procul vires productæ in Corporibus L & M [licet etiam L & M non eſſent æqualia] ut vires fluidorum ante impulſum, utpote ipſis æquales, adeoque ut magnitudines fluidorum; quis enim dubitabit de eo, quod fluidorum homogeneorum & æquivelocium vires ſint ut magnitudines eorum? cum hic evidens ſit repetitio non modulitatis, ſed realitatis. Vides ergo Exemplum tuum Corporum ſolidorum non infinite parvorum in alia Corpora quieſcentia incurrentium huc non quadrare; Interim [ut hæc obiter dicam] feſtinando errorem calculi admiſiſſe hic videris. Dicis enim *ſi globus A*, 1, *celeritate*, 1, *incurrat in globum L*, 1, *quieſcentem, accipiet globus L celeritatem* 1, hoc veriſſimum eſt: *ſi vero globus B*, 2, *celeritate*, 1, *incurrat in globum M*, 1, *quieſcentem, accipiet globus M celeritatem* 4: puto globum M accepturum eſſe celeritatem $\frac{4}{3}$. Secundum regulas communicationis motus novo principio ſuperſtructas, quarum formulas in præcedentibus meis exhibui, quaſque ex iiſdem æquationibus eliciebam, quas in ultimis tuis exprimis; compoſitis ſcilicet legibus virium abſolutarum & directionis conſervandarum; Ergo vires impreſſæ ipſi M non *multo plus*, ſed paulo minus *quam duplæ ſunt earum quæ impulſæ ſunt ipſi* L. 1696 April

An actio materiæ gravificæ per ictus diſcretos, an vero per preſſionem continuam explicari debeat, amplius haud diſquiramus; ſunt enim tantum diverſi modi unam eamdemque rem contemplandi; qui ſi dextre adhibeantur, nullus dubito, quin idem concludant; ſed inexpectatam mihi affers diſtinctionem inter *ictum eſſe æque fortem, & inter eamdem in percuſſo produci potentiæ quantitatem*, quæ duo, ut fatear, eadem putabam, conſiderando ictum fortiorem vel minus

 fortem

Digitized by Google

1696 April fortem tanquam percutientis effectum, qui eſt æqualis quantitati potentiæ productæ in percuſſo; miror quod non jam diu hanc diſtinctionem protuleris in reſponſione ad exemplum meum teſtudinis, ubi æqualitatem ictus, quam nunc concedis, aperte ſatis negare videris. Sed quidquid ſit ſtatus controverſiæ nunc huc redit; *an duo Corpora æqualia, ſive in motu, ſive in quiete, æque fortes ictus recipientia recipiant etiam æqualem vim, vel potentiam.* Tu id negas, ego vero, etiamſi ratio mihi contrarium dictitet, in ſuſpenſo hæreo, propter id ipſum quod negas; malo enim inpoſterum mihi ipſimet diffidere quam a Te diſſentire; Et propterea optarem meas difficultates a me non acciperes tanquam ab adverſario, ſed potius tanquam ab amico, qui quid ab adverſario fieri poſſit, ſincere monet. Hoc ſaltem explicatum mihi vellem, *quid æque fortiter ferire ſit; aliud niſi eamdem vim imprimere*, alias de ictu non habeo conceptum clarum atque diſtinctum.

Multum gaudeo quod monitum meum ad Tuam æſtimationem reſiſtentiæ abſolutæ tam benigne exceperis; Diu enim hæſitabam, an e re eſſet talia a Te jam olim prolata inſinuare; veritus ne Tibi importune caderent eorum denuo recordari. Unde vides me amore veritatis ductum interdum monere quædam de quorum licet eventu, an nimirum grata ſint futura ipſe dubitem.

Optime prævides eluſiones Dni. Papini, ad quas in anteceſſum ſe præparare videtur, eo ipſo quod verba Tua intempeſtive ſatis pervertit, mutando *vim* in *motum*; quaſi neſcires quale interſit diſcrimen, cum tamen in hoc præcipuæ controverſiæ cardo verſatur; ſic nec ego conſultum duco eum corrigere & in meliorem viam redigere velle, cum oleum & operam perderes, quam utilius collocabis, meo judicio, ſi rem totam bono Reipublicæ Litterariæ publice exponeres, non quidem ſub forma reſponſionis, hoc enim Papinum ſilere non faceret; ſed potius præmoneres Lectorem, te traditurum relationem hiſtoricam totius controverſiæ, & ſimul explicationem difficultatum hactenus propoſitarum, alias autem novas Te a nemine expectaturum, ſed totum negotium ad judicium Lectoris remiſſurum, ne tempus tibi adeo pretioſum litigando inutiliter pereat.

Me

Me ſane immerentem ſevera nimis cenſura perſtringis, retundendo neſcio qua indignatione objectionem adeo amice factam contra argumentum Tuum a priori. Cum tamen ab initio objectionis diſerte dixerim, eam, non a me, ſed ab adverſario proficiſci putandum eſſe, ſed quid multum! Inventorum tuorum ſum præco, ubicunque datur occaſio; quid ergo ſuccenſes ſi, ut eorumdem veritatis defenſor eſſe poſſim, a te difficultatum enodationem ſubinde peto, qua adverſariis obviam ire queam. Quidquid ſit, ſi objectiones meæ, vel minimum offendant, impone mihi ſilentium, & compeſcam luxuriantem calamum, ne forte præcipitem ſententiam ferat, quæ me attentionis defectus reum faciat; dico forte, divinari enim non poſſum, an argumentatio quædam Tibi ſit obiter elapſa, an vero a pluribus annis conſiderata; ſumus homines & erroribus obnoxii; ſi ergo in æſtimanda reſiſtentia abſoluta, & fortaſſe in aliis, paralogiſmus Tibi excidere potuit, quidni & idem hic contingere potuiſſet. Sed ut videas quod res eſt, exponam paucis cauſam, quæ me fecit *prendre le change*; id quod credebam fuiſſe legitimam retorſionem. Sumebam terminos, *virtualiter* & *formaliter*, alio ſenſu quam eo quo nunc eos explicas & quidem non ſine omni ratione; Etenim per *actionem virtualem* intelligebam vim ipſam vel virtutem rei agentis, & hoc ſenſu præmiſſa mea ſecunda, quam negas, erit veriſſima; *Actio faciens duplum, tempore duplo, eſt ſimpla virtualiter actionis facientis ſimplum, tempore ſimplo;* id eſt, eadem vis vel virtus corporis requiritur ad percurrendum ſpatium duplum, tempore duplo, quæ requiritur ad percurrendum ſpatium ſimplum, tempore ſimplo: utroque enim in caſu celeritas corporis, & proinde etiam potentia, eſt eadem. Et per *actionem formalem* intelligebam effectum jam productum, ut via quædam manet ſemper ejuſdem longitudinis, ſive ſit unica, ſive duabus horis percurſa; hocque ſenſu præmiſſa mea prima alterius retorſionis erit etiam vera. *Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt ſimpla formaliter actionis facientis idem duplum, tempore duplo;* id eſt; ſpatium percurſum intra minutum unum a corpore celeritatis duplæ eſt æquale ſpatio percurſo intra minuta duo a corpore celeritatis ſimplæ. Vides itaque me non ita locutum fuiſſe, ac ſi propoſi-

1696
April

1696 April propoſitiones poſſent aſſumi pro arbitrio; ſed omnia mature expendiſſe, antequam tibi ea perſcripſiſſem. Interim Tua reſponſio mihi nunc plane ſatisfacit, eique proin acquieſco; video enim, quid duo iſti termini Tibi ſignificent; Cæterum argumentatio Tua mihi videtur elegantiſſima, & Publico non amplius invidenda; multum enim ponderis tribuet argumentis a poſteriori.

Quæ de conſervanda, non ſolum virium motricium, ſed & directionis quantitate, vel quod idem eſt, me divinaſſe ais [quamvis non caſu, ſed induſtria eo pervenerim] de conſervato ſemper progreſſu centri gravitatis habes, omnino mihi placent. Et memorabile inprimis eſt, quod Lex tertia conſervandæ celeritatis reſpectivæ ejuſdem, ſeu ejuſdem differentiæ celeritatum ante & poſt concurſum quæ alias, uti bene notas, ex vi elaſtica concurrentium oſtendi poteſt, tam pulchre ex duabus præcedentibus tanquam corollarium fluit: qui conſenſus non parum confirmat principium conſervationis quantitatis virium. Alia procul-dubio arcana ſub his latent. Putem ergo alias poſſe condi leges quam-plurimas, ſi loco diviſionis adhibeamus multiplicationem, multiplicando ſcilicet æquationem (1) per æquationem (2) vel (3); & quæ provenit iterum per unam inferiorum, quod in infinitum continuari poteſt. Propoſitionem ex conſervato progreſſu centri gravitatis decerptam, quam HUGENIUS jure merito ex profunda meditatione ortam dicit, & quam ante aliquot annos *Diario Pariſino* inſeri curaſti, * mihi ſine mora communicavit Dnus. VARIGNONIUS, cujus de-
TAB. VI monſtrationem etiamtum e veſtigio inveneram. Sit enim (*Fig.*34.) mobile A, tendens ſimul celeritatibus & directionibus AB, AC, AD, AE; & ſit AF directio & celeritas mobilis A, qua fertur ex motu compoſito: dico: AF, [productam] tranſituram per centrum commune gravitatis G punctorum B, C, D, E: & eſſe ad AG, ut numerus punctorum ad unitatem. Motus enim particulares BA, CA, DA, EA, &c., intelligi poſſunt tanquam compoſiti ex collateralibus Bβ & B*b*, Cγ & C*c*, Dδ & D*d*; Eε & E*e*; &c., quoniam itaque FAγ eſt directio motus compoſiti, erunt celeritates

* 1693. 35e. Journal. du 5e. Septemb.

eritates affirmativæ æquales Celeritatibus negativis, ideſt, B 𝔠 + C γ &c., = E ε + D δ &c. Ergo, ut patet ex ſtaticis, F A γ eſt axis æquilibrii, ſeu tranſit per centrum gravitatis punctorum B, C, D, E, & porro quia B *b*, C *c*, D *d*, E *e* &c. ſunt parallelæ A F, erunt celeritates partiales ſimul ſumptæ B *b* + C *c* + D *d* + E *e* &c. = celeritati compoſitæ A F: eſt autem, ut iterum conſtat ex ſtaticis B *b* + C *c* + D *d* + E *e* + &c. ad A G, ut numerus punctorum B, C, D, E, &c. ad unitatem; Ergo &c. Q. E. D. Hinc ultro ſequitur, ſi mobile A ſit in ipſo centro gravitatis G conſtitutum, & ſollicitetur a potentiis A B, A C, A D, A E, &c. ſecundum directiones A B, A C, A D, A E, &c. mobile A manſurum in quiete; cujus generaliſſimi theorematis illud tantum eſt caſus ſpecialis, quod apud Hugenium, alioſque me legiſſe memini; Nimirum ſi Corpus in centro gravitatis Trianguli vel etiam Pyramidis triangularis conſtitutum tendatur a potentiis ſecundum directiones linearum ab angulis ad centrum ductarum in earumdemque ratione, corpus illud neutrorſum motum iri & proinde quieturum. Ex hiſce autem patet, non ſolum hic, ſed in omnibus aliis, centrum potentiarum [ut ita loquar] eſſe idem, quod centrum gravitatis; Hoc enim Triangulo & Pyramidi triangulari proprium eſt, quod eorum centrum gravitatis ſit etiam centrum gravitatis punctorum in angulis. 1696 April

Concedo reſiſtentias medii reſpective reſiſtentis eſſe ut quadrata celeritatum mobilis; ſi per reſiſtentias intelligantur decrementa celeritatum; Sed ſi per reſiſtentias intelligamus [quod meo judicio etiam ſic intelligendum eſt] decrementa virium mobilis quovis tempuſculo amiſſa, erunt citra omnem controverſiam reſiſtentiæ, ut Cubi celeritatum.

Meditationes meæ, ut vocas, de Centro oſcillationis, non quidem ſunt multæ vel magni momenti; interim uno Theoremate totam Doctrinam pendulorum complecti poſſum, quod cum *Hugenianis* optime conſpirat; neque conſidero centrum gravitatis, quod Hugenius æqualiter deſcendere & aſcendere ſuppoſuit, ſive corpora ſeparatim ſive conjunctim oſcillentur; ſed aſſumo novum tuum principium de conſervatione ejuſdem quantitatis virium, ex quo deinde principium *Hugenianum* tanquam conſectarium deducitur.

Digitized by Google

1696 April TAB.VI. Sit enim (*Fig.* 35.) pendulum H A, compoſitum ex quotvis gravibus A, B, C, &c., perticæ rigidæ & nullius gravitatis H A affixis, & agitatum circa centrum H: quæritur longitudo penduli ſimplicis & iſochroni H G. Ponantur diſtantiæ gravium penduli compoſiti AH, BH, CH, &c. a, b, c, &c. & diſtantia penduli ſimplicis G H, x. Poſtquam nunc pendulum deſcendit quantum deſcendere poteſt, nempe ſcilicet in ſitum verticalem, erunt celeritates punctorum A, B, C, &c., G, a; b, c, &c., x: ergo quantitas virium gravium A, B, C, &c., erit $Aaa + Bbb + Ccc$ &c.: Conſideremus jam corpora A, B, C, &c. non amplius perticæ affixa, ſed quodlibet in ſua diſtantia ſeparatim oſcillari, circa H: erunt, per naturam gravium deſcendentium jam notam & receptam, celeritates gravium A, B, C, quando in ſitum verticalem venerint, $\sqrt{ax}$, $\sqrt{bx}$, $\sqrt{cx}$, &c. ſuppono enim celeritatem puncti G eſſe x. Ergo hoc modo quantitas virium gravium A, B, C, &c. erit $Aax + Bbx + Ccx +$ &c.: quoniam autem utroque modo ſuppono eamdem virium quantitatem eſſe, erit $Aaa + Bbb + Ccc +$ &c. $= Aax + Bbx + Ccx +$ &c.: & proinde

$x = \frac{Aaa + Bbb + Ccc + \text{\&c.}}{Aa + Bb + Cc + \text{\&c.}}$. Hæcque nunc eſt propoſitio fundamentalis, quam Hugenius in ſuo Tractatu, pag. 100, operoſe admodum, & per deductionem ad abſurdum juſto majoris minoriſve aſcenſus centri gravitatis, (quod ego ne conſidero quidem) demonſtravit. Ex qua omnia Theoremata *Hugeniana* facillime eliciuntur, adeo ut etiam hinc veritas novi principii pateſcat, quia cum *Hugeniano* tam mirifice convenit. Liquet etiam ex hac æquatione Centrum oſcillationis illud ipſum eſſe, quod vulgo ſtatuitur percuſſionis. . . . .

. . . .

Jam olim Tibi aperui mihi perplacere, ut adhibeatur S pro ſummis & me inpoſterum eodem ſigno uſurum; quod autem in reſponſione ad objectionem Nieuwentiitii vocabulum *integralis* etiamnum uſurpaverim, id ideo factum eſt, quia iiſdem verbis quibus Nieuwentiit objiciebat, ego reſpondere volebam. Interim non inconſultum mihi videtur, ſi Lectores admonerentur, idem

Digitized by Google

idem intelligendum eſſe per *ſummam* vel $\int$, quod nos antehac per *Integrale* vel *I*, denotare voluimus; quandoquidem hæc expreſſio jam paſſim invaluit. Pariter tua ratio exhibendi diviſionem per duo puncta commodiſſima mihi videtur, ſed ipſi aſſueſcere difficile erit, ita ut illis qui vulgari diviſioni aſſueti ſunt, vix uno intuitu dividendum & diviſorem diſtinguere poſſint; præſertim quando fractio fractionis occurrit, ut ſi pro $\frac{a+\frac{b}{c}}{e-\frac{f}{g}}$ ſcribatur $\overline{a+b:c} : \overline{e-f:g}$; non ſtatim patet quid, & per quod, ſit dividendum. Præterquam quod variæ lineolæ ſupraſcriptæ non minus impedimentum pariunt in typis. 1696 April

Nuper Novi noſtri Gubernatoris *Principis* NASSOVII Informator mihi miſit *Actorum Lipſ.* annos 1690. 1693 & 1694, quos coëmit in auctione Librorum HUGENII; invenio ibi varias notas criticas breves quas HUGENIUS ad marginem plumbagine ſcripſit, & pleraſque ſuper ea quæ Tu, Dominus TSCHIRNHAUS, *Frater*, & ego publicavimus; nec Tibi, nec nobis pepercit, præſertim *Fratris* multa ipſi diſplicent; ſi curioſus es, ea quæ Te concernunt Tibi tranſcribam. Curabo ut etiam cæteris annis potiar, ut quid de aliis ſenſerit videam.

Interim vale quam-optime, & ama, ut ſoles

Ampl. T. Devotiſſimum

Groningæ 7. Aprilis 1696.

J. BERNOULLI.

Digitized by Google

EPISTOLA XXVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De actione gravitatis. De æſtimatione virium a priori. *De* NIEUWENTIITIO. *De ſignis algebraicis. De* HUGENIO.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1696 Mai

NOlim putes diſceptationes noſtras mihi ingratas eſſe, dummodo illuſtrandæ, confirmandæque veritati ſerviant, quod vix eſt ut fieri non poſſit inter ſtudioſos veritatis & in ea inquirenda exercitatos. Quod verba attinet, elabi interdum calore ſcribendi non exquiſite tornata,

Scimus, & hanc veniam petimuſque damuſque viciſſim.

Neque ego de Tuo erga me affectu dubitavi, & nolim viciſſim admonitiunculam illam ab indignatione potius [quæ nulla fuit] quam ab amico animo profectam putes, quod quædam leviore brachio tractata arbitrabar, quam merebantur, aut veritatis intereſſet.

Spero controverſiam inter nos de origine potentiæ gravibus impreſſæ jam facilius componi poſſe, poſtquam expreſſa tua verba me tandem docuerint in quo conſiſtat diſſenſus. Nempe ſtatuis particulam fluidi gravifici totam ſuam vim imprimere in grave; quod ſi ita eſſet, fateor quemvis ictum gravi æqualem [circiter] potentiæ gradum eſſe additurum. Sed ego puto particulam materiæ gravificæ impactam omnino repercuti, nec alias ſequentes particulas id impedire. Nam non ſequuntur niſi ex intervallo, & ſi immediate ſequerentur, unum continuum percutiens componerent; de quo rurſus idem poſſet dici, nempe totam potentiam ſuam non transferre. Et vero ſi particulæ percutientes darent totam ſuam potentiam, ſequeretur non celeritatem, ſed potentiam gravis creſcere uniformiter, cum numerus ictuum ſit tempori proportionalis.

Ceterum

Cæterum hanc rationem de translatione totius potentiæ [quantum memini] in prioribus non allegaras, & ita ni fallor ratiocinationem jam mutas. Porro ſi globus B, 2, celeritate 1, incurrat in globum M, 1, quieſcentem, omnino eſt ut ſcribis, acquirere globum M celeritatem $\frac{4}{3}$ & negligentia quadam omiſi diviſionem per 3, quam calculus dabat. 1696 Mai

Veriſſimum puto, etiamſi ictus ſint æque fortes, non tamen ideo ſequi potentiam eamdem inprimi recipienti; quia ictus vis æſtimanda eſt, non tantum ab eo quod contingit in percuſſo, ſed etiam ſimul ab eo quod fit a percutiente. Interim puto hic nobis magis in loquendi modo, quam rebus diſſenſum fuiſſe, neque in iſto ſitum eſſe controverſiæ ſtatum, ſed potius in iis quæ paulo ante dixi.

Utrum adhuc reciprocanda ſit, cum Dno. Papino ſerra, intelligam ex effectu noviſſimarum mearum apud ipſum litterarum; publice cum ipſo litigare adhuc minus operæ pretium erit. Quem litteræ privatæ non movent, is multo minus publice manus dabit. Itaque ſatis erit rem ipſam ſuo tempore exponi.

Spero Te, qua es ſinceritate, ingenue agnoſcere, fuiſſe mihi cauſam mirandi, quod circa *τὸ formaliter* & *virtualiter* tam a meo ſenſu abhorrentia dixeras; ea enim, quam indicas, interpretatio nunquam mihi venerat in mentem, nec potuiſſem adhibere ad ſcopum meum, niſi manifeſte ineptiendo. Sed bene eſt quod ego Tibi ſatisfeci, & Tu mihi jus reddis. Quid videtur Tibi de altera ejuſdem propoſitionis demonſtratione? Quæ paulo magis eſt ad formam receptam, etſi ambæ conveniant in radice. Maximi mei concluſio ipſa momenti viſa eſt; quia hinc magnum patet arcanum Divinæ Sapientiæ, & corrigitur ſententia Cartesii, ſimulque ſcopus, quem ſibi propoſuerat, obtinetur. Nam vere ſervatur eadem quantitas actionis motricis in mundo, ſi quantitas illa æſtimetur ut oportet. Unde, & revera dici poſſet eamdem quantitatem motionis ſervari; niſi ſenſus hujus phraſis vulgaris, quæ celeritate in molem ducta motionem æſtimat, jam eſſet receptus. Quantitas autem actionis motricis, ex hac mea demonſtratione duplici, con-

1696 ficitur eſſe in ratione compoſita ex ſimplice molis & duplicata velocitatis. Mai Itaque jam a priori conſtat Deum non fore facturum ex legibus perfectæ Sapientiæ, ſi ex *Carteſianorum* ſententia eamdem quantitatem motus, ut ab ipſis intelligitur, conſervaret; ita enim ipſa actio revera non foret æquabilis. Haud dubie, non caſu, ſed ingenio acri divinaſti, vel potius penetraſti, coincidere centri gravitatis æquabilem progreſſum & conſervationem directionis. Demonſtratio etiam Tua regulæ meæ de compoſitione motuum, omnino conſentit cum ea, quam innui in ipſo *Diario*, cum ederem.

Pulcherrime oſtendis ex principio noſtro, velut ictu, confici propoſitionem HUGENII fundamentalem de pendulis; ita alterum alterius teſtimonio confirmatur & illuſtratur.

. . . .

Dnus. NIEUWENTIIT voluit replicationem ad reſponſionem meam mittere *Lipſiam* in *Actis Eruditorum* edendam; ſed cum conſtaret illa neſcio quot plagulis, Dnus. MENCKENIUS id declinavit, excerpta tamen inſerere obtulit. Scripſi illum admonendum videri, ut etiam Tibi reſpondeat eadem opera, quo inanes repetitiones evitentur; quin-imo, ne fruſtra publico obſtrepatur, recte meo judicio facturum, ſi Tibi vicino ſcrupulos ſuos per litteras communicet. Nam non video, quid ejus methodus peculiaris, quam laudat, præſtare poſſit; cum pars ſit ex noſtris deſcripta, pars ex iis non intellectis enata.

In notandis calculis ad uſum typorum, decrevi pro lineis vinculorum inpoſterum uti commatibus directis atque inverſis in vim parentheſium, ita non interrumperetur typorum ſeries, nec ſpatium amittetur, & tamen omnia [ni fallor] accurate habebuntur. Velim tamen prius tuam audire ſententiam.

Exempli cauſa, tuum $\dfrac{a+\dfrac{b}{c}}{e-\dfrac{f}{g}}$, quod quinque typorum lineas minimum poſtulat, ſic poterit ſcribi: ${}_{\textstyle ,}a+{}_{\textstyle ,}b:c_{,,}:{}_{\textstyle ,}e-{}_{\textstyle ,}f:g_{,,}:$ poſſent tamen inverſa commata omitti, ſcribique $a+b:c_{,,}:e-f:g_{,,}$ quod

quod & facere ſoleo, & communiter ſufficere poteſt. Sed tamen deſignatio, quaſi parenthetica, per commata includentia eſt abſolutior, tutiorque interdum; præſertim ſi pro commatibus adhibeantur veræ parentheſes, ne commata inverſa confundantur cum littera *c*, exempli gratia in eodem caſu iſta ſtabit $(a+(b:c)):(e-(f:g))$. 1696 Mai

Pergratum fuit, quod nuntias de notatis Domini Hugenii marginalibus in *Acta Eruditorum*. Rogo ut omnia deſcribi cures, ſive me, ſive alios concernant, mihique communices, libenter expenſas reddam. Initio parum favebat methodis noſtris, quod fructum earum, ſua amicorumve experientia, nondum didiciſſet, quod nec in ſuis ad me prioribus diſſimulavit; ſed poſtea rectius doceri cœpit, & cum in litteris privatis, tum in ſchediaſmate quodam inter *Acta Lipſienſia* publicato, candide pronuntiavit, quod res eſt. Non dubito tamen, quin quædam ab ipſo recte admoneantur. In ſcheda, *De Reſiſtentia* error quidam, ex feſtinatione, admiſſus erat, circa quamdam Propoſitionem; hunc cum, in aliqua Epiſtola ad ipſum data, occaſione emendaſſem, reſpondit ſe ſe idem pene totidem verbis, ibi ad marginem *Actorum*, notaſſe. . . . .
Vale,

Dabam *Hanoveræ* 15. Mai: 1696. [ex itinere reverſus]

Deditiſſimus

Godefridus Guillelmus Leibnitius.

EPIS-

EPISTOLA XXVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De actione materiæ gravificæ in corpora gravia. De iſtius vi & quantitate. De æſtimatione virium a priori. *De* NIEUWENTIITIO. *De* HUGENII *annotationibus ad* Acta Erudit. *De* TSCHIRNHAUSII *putatitio invento comparandi arcus parabolicos. Curvæ Brachyſtochronæ Problema.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

1696 Jun. NOſtra Controverſia omnino naturam referre videtur duarum linearum aſymtotorum, quæ quidem magis ac magis convergunt, nunquam tamen coincidunt: ſic diſcrepantes noſtræ opiniones, tractu temporis, continuo ſibi invicem propius accedunt, ut nunc parum diſtare & inpoſterum minus diſtituræ videantur, ita tamen ut nunquam non aliquid ſcrupuli inter ſe relicturæ ſint; ſed præſtat continuationem aſymtoticæ noſtræ liti præſcindere, quam in infinitum diſputando diminuere, ſed nunquam adimere differentiam, quæ jam fere inſenſibilis eſt. In hunc finem hiſtorice tantum [minime vero ut objiciam] modum proponam, quo particula fluidi gravifici totam ſuam vim [cum noſtram diſputationem ad exiguam hanc particulam nunc redactam eſſe ipſe agnoſcas] gravi imprimere concipi poſſit. Hanc enim translationem totius Potentiæ, quam in penultimis meis me non allegaſſe, adeoque in ultimis ratiocinationem mutaſſe dicis, ſemper innuere volui, & ſic verba, non autem ratiocinationem mutavi. Utique tecum puto, particulam illam repercuti, ſi ſtatuas poſt venientes nonniſi ex intervallo ſequi, & illam quæ nunc impingit, ſimul ac impingit liberè & ſine ullo impedimento reſilire poſſe. Verum conſidera, ſi placet, annon fractus & ſinuoſitates pororum corporis gravis poſſint

poſſint eſſe in cauſa cur particula materiæ gravificæ poſt impulſum, non ita facile corpus penetrare & ab eo ſeparari queat, quin potius aliquantiſper in poro quaſi intruſa & infixa manere cogatur, adeoque tota ejus vis a Corpore abſorbeatur? Quid ſi teſtudinis exemplum iterum proferam; recipit ſane totam vim globi a ſclopeto ipſi injecti, ſi nempe poſt ictum in carne ipſius hæreat, nec aliorſum evadat; atque hac ratione non video, quale diſcrimen interſit, ſive teſtudo moveatur, ſive quieſcat; utrovis enim caſu exhaurit totam vim globi, niſi dicatur aliquam ejus partem impertiri materiæ ambienti, quam autem hic excludo, ſupponendo motum illum in vacuo fieri. Præterea, ut ad rem noſtram redeamus, materia gravifica cum ſit ſubtiliſſima, & omnia ſint plena, procul-dubio unum quid continuum conſtituit, in tantum ut ejus particulæ, non ex intervallo, ſed immediate ſequi debeant. Demus vero & hoc, materiam gravificam non eſſe continuum quid; ſaltem ejus particulæ erunt æqualiter diſſeminatæ, adeoque ſi non agat per continuam preſſionem, erit tamen numerus ictuum, non tempori, ſed ſpatio proportionalis. Et hoc eſt quod hactenus impedivit, quominus huic opinioni aſſenſum dederis; quia credis, cum GALILÆO, omnino neceſſe eſſe, ut numerus ictuum ſit tempori proportionalis; ſi hoc eſſet, & ipſe faterer meam opinionem non poſſe ſubſiſtere, quia tunc Corporis cadentis celeritates non creſcerent uniformiter ſecundum tempora: ſed jam-jam videbis, quam pulchre hæc uniformitas, ex ipſa mea hypotheſi, quæ GALILÆO omnino eſt contraria, ſequatur. Qua in re idem fere mihi contingit quod olim FERMATIO contra CARTESIUM de refractionibus diſputanti, qui per rationem, ut-ut *Carteſianæ* directe oppoſitam, ad eaſdem tamen a CARTESIO ſtabilitas refractionum leges pervenerat. Oſtendo itaque; 1°. Quomodo concipi poſſit, particulam materiæ gravificæ totam ſuam vim transferre in grave. 2°. Quod numerus ictuum ſit in ratione ſpatiorum, id eſt, quod grave aſcendens, vel deſcendens, recipiat ictus, eodem tempuſculo, proportione celeritatis; ſunt enim ſpatiola percurſa eodem tempuſculo ut celeritates. 1696 Jun.

Uniformitatem ſeu æqualitatem accretionis celeritatum ſecundum

Digitized by Google

1696 Jun. TAB. VI. tempora ſic demonſtro. Eſto (*Fig.* 36.) altitudo deſcenſus AB, quæ dividatur in partes æquales A*a*, *ab*, *bc*, &c. Erunt per Lemma 2um numeri ictuum per A*a*, *ab*, *bc*, &c. etiam æquales. Atqui per Lemma 1um grave recipit totam vim particularum gravificarum; ergo augmenta virium gravis in ſingulis punctis *a*, *b*, *c*, ſucceſſive exiſtentis ſunt æqualia, id eſt, ſi *ae*, *bf*, *cg*, *dh*, &c. denotent vires acquiſitas, erunt *ae*, *if*, *lg*, *mh*, &c. elementa æqualia, & proinde AC eſt linea recta. Nunc, quia tecum mihi res eſt, ſuppono principium tanquam a priori demonſtratum, vires acquiſitas eſſe in ratione duplicata celeritatum. Applicentur itaque *aα*, *bβ*, *cγ*, &c. quarum quadrata ſint ut *ae*, *bf*, *cg*, &c. ſeu ut A*a*, A*b*, A*c*, &c. denotabunt *aα*, *bβ*, *cγ*, &c. celeritates acquiſitas; Eſt autem, uti patet, curva A*αβ* parabola. Ex quo ſequitur etiam illam curvam, cujus applicatæ denotant tempora impenſa eſſe parabolam; adeoque celeritates eſſe ut tempora, ſeu creſcere æquabiliter ſecundum tempora; id eſt, tempuſculo æquali æqualem addi celeritatis gradum. Q. E. D. Meam nunc opinionem clare expoſuiſſe ſufficiat, ſi eam pro vera non agnoſcère velis per me licet; Tibi nullam inde movebo litem; vides ſaltem, quod omnino conſentiat cum Legibus deſcenſuum à GALILÆO ſtabilitis. Ex eo enim quod poſui totam vim particularum gravificarum transferri in grave, & numerum ictuum eſſe ut celeritates eodem tempuſculo, idem ſequitur, ſcilicet acceleratio uniformis, quæ deducitur ſupponendo vim particularum non totam transferri; & numerum ictuum eſſe ut ipſa tempuſcula; adeo ut nequaquam videam, cur natura hac potius agendi via utatur quam vero illa; Et ſane neſcio annon probabilius ſit dicere materiam gravificam continuo exercere vim ſuam in grave; ubicunque enim grave cadendo exiſtat, ibi offendit particulam, cujus vim recipit. Econtrario quidquid faciam, non poſſum concipere, qui fieri poſſit ut materia gravifica ſingulis tantum momentis ictum faciat. Quid quæſo facit inter duo proxima momenta? ociaturne? Ceſſatne agere? annon ubique & ſemper præſens eſt, & præſto, ad removendum obſtaculum quandocunque motui ſuo celerrimo occurrit? Quid clarius, quam quod poſita cauſa, ponatur effectus? Cum ergo materia gravifica

viſica continuo ſit in actione, non interruptim, nec per intervalla temporis, quid impedit quominus grave eam actionem ſemper & ubique perſentiſcat [ſi ſentire poteſt.] Ignoſce prolixo mihi, non credebam tot de hoc verba facere; quia autem ab initio declaravi me meam opinionem, vel ſi mavis, explicandi modum circa originem potentiæ gravibus impreſſæ ſimpliciter expoſiturum, ut inpoſterum altercationibus ſuperſedere poſſimus; Non ægre feres, quod forte longius a calamo ſcripturiente abreptus fuerim, quam feciſſem, ſi patientiæ Tuæ inter ſcribendum rationem habuiſſem. 1696 Jun.

Antequam hanc materiam omnino deſeram, diſſimulare non poſſum, quod quo attentius hactenus dicta conſidero, eo magis in mea opinione confirmor. Commodum, hoc ipſo inſtanti, mihi incidit ſimile: Concipio aliquod medium inſtructum infinitis ſpiris elaſticis, vel aliis elaſtris æque fortibus æqualiter diſſeminatis, vel [quod præſtat] immediate juxta ſe poſitis; Iſta elaſtra tali artificio tenſa ſuppono, ut ad appulſum alicujus corporis a retinaculo liberentur, & ſubito reſiliant, ſimulque vim ſuæ elaſticitatis integram corpori appellenti tribuant, quod facile concipi poteſt, ſi modo ſtatuatur elaſtrum incomparabiliter celerius reſtitui, quam corpus movetur. Nunc, in iſto medio, concipio corpus aliquod a minima vi, qua nempe pollet unum elaſtrum, moveri incipere; ſic retenta vi primi elaſtri progrediens offendit ſecundum, cujus vim pariter recipit; poſtea retentis duobus virium gradibus, progreſſu ſuo accipit tertium, tunc quartum, quintum, ſextum, &c. & quidem hi gradus virium ex æquali intervallo, non tempuſculorum, ſed ſpatiolorum ſuperaccedunt. Dico hoc corpus in iſto medio nihilominus ſecundum tempora uniformiter accelerari, id eſt, ea lege, qua Galilæus grave cadendo accelerare aſſeruit; id quod ex demonſtratione ſuperiori luculenter apparet. In tantum, ut ſi nolis materiam gravificam, juxta meam hypotheſim operari, tamen dicere tenearis, illam ita operari poſſibile eſſe, ſalva manente uniformitate accelerationis per tempora æqualia, nullamque rationem apparere, cur communis explicandi modus, qui & Tuus eſt, alteri meo ſit præferendus; cum ſatis ſupra oſtenderim, quo modo fieri poſſit; ut particula materiæ gravificæ totam ſuam vim transfe-

1696 Jun. rat in grave; & contra quam magnæ incongruitates ſe ſe prodant ſtatuendo ictus procedere ſecundum tempuſcula; ſed hæc Tuæ attentioni commendo; forſan ex ipſis aliquid utilitatis capies, præſertim poſtquam mentem præoccupatam hactenus, quaſi mea opinio opinioni ubique receptæ de uniformitate accelerationis e diametro oppoſita fuiſſet, cum tamen illam mirifice confirmet; poſtquam, inquam, hanc præconceptam mentem exueris, quæ forte fecit, ut meas rationes hucuſque allatas nunquam ſerio perpendiſſes.

De ictus quantitate nihil amplius urgebo, quia jam nihil facit ad controverſiam. Nondum tamen clare patet, quomodo ejus vis æſtimanda ſit; ſi, ut innuis, impreſſio potentiæ non ſit proportionalis ictui.

Memini me, apud *Ignatium Gaſtonem* PARDIES, in diſcurſu, *De motu locali*, legiſſe, quod ex ictus quantitate regulas motus deducere conatur, ex principio quodam, quod mihi falſiſſimum videtur; ſcilicet ex indifferentia corporis ad motum & ad quietem; qua poſita corpus maximum quieſcens, a minimo incurrente, celeritate non imminuta abripi ſequitur. Hanc indifferentiam, cui Te olim etiam addictum fuiſſe ex *Actis* ſuperioris anni pag. 151. video, ipſe ibidem explodis; ubi non male corporibus inertiam, ſeu ad motum reſiſtentiam tribuis. Hoc autem non-niſi incidenter innuere volui; Præcipuum illud eſt, quod PARDIES in eodem diſcurſu jam-jam animadvertit, contra *Carteſianos*, non ſemper eamdem quantitatem motus abſolutam conſervari; quod etiam oſtendit ex incurſu obliquo globorum; interim veram quantitatem motionis non determinat, nec dicit illam haberi ex ductu molis in quadratum velocitatis.

Altera Tua demonſtratio propoſitionis de ratione actionum motricium, quam in prioribus allegaſti, ingenioſe pariter ac prior &, ut dicis, magis ad formam excogitata mihi videtur, quamvis in fundo rei ambæ coincidant. Nihil etiam enim certius eſt, quam quod actiones motrices debeant menſurari per effectus ſuos immediatos; ſi itaque longitudines percurſæ, & velocitates [niſi quis obſtinate vellet velocitatem potius eſſe cauſam] ſint effectus actionis

Digitized by Google

nis immediati, & quidem ſoli, quorum unus ab altero non depen- 1696
det, vel in altero non includitur [ſecus ita ratiocinari non liceret; Jun.
ex eo enim quod duæ libræ auri occupant ſpatium duplo majus quam una libra auri, & inſuper duæ libræ ſunt duplo plures quam una libra, non ideo ſequitur duas iſtas libras fore quadruplo ſeu bis duplo graviores quam una libra, quia una ratio dupla in altera jam includitur, ideſt, poſita una, ponitur & altera] erunt actiones motrices neceſſario in ratione compoſita longitudinum & velocitatum; adeoque temporibus æqualibus in duplicata velocitatum; cæterum egregie admodum in iiſdem prioribus Tuis oſtendis inter hæc duo A, *facere duplum, tempore ſimplo*, itemque C, *facere ſimplum, tempore ſimplo*, cadere medium minus priore & majus poſteriore, ſcilicet B, *facere duplum tempore duplo.* Fateor B maſeſte [ex natura repetitionis perfecta] eſſe duplum ipſius C, & proinde demonſtrative ſequi, A eſſe plus-quam duplum ipſius C; ſed tamen ex eo nondum ſequitur illud præciſe quadruplo majus eſſe hoc; priuſquam demonſtratum ſit A eſſe duplum ipſius B: & hoc, meo judicio, demonſtratu non ita facile eſt; etenim inter *facere duplum, tempore ſimplo*, & inter *facere duplum, tempore duplo* talis repetitio non percipitur; quin-imo videtur primo intuitu illud hujus quadruplum eſſe; ſi enim A, tempore ſimplo, idem faciat quod B, tempore duplo; oportet ut A ſit duplo velocius quam B adeoque illius potentia quadrupla potentia ipſius C. Vides exinde hæc non ita procedere quaſi nullam amplius mereantur elucidationem.

Tametſi replicationem Domini Nieuwentitii non viderim, arguit tamen .... quod etiamnum in ſcirpo nodum quærat; utrumvis ſit, ejus Commercium litterarium, quod ipſi mecum ineundum ſuaſiſti, mihi non arridet. Nolim enim operam meam inutiliter collocare .... fruſtra illum admoneri facis, ut mihi quoque reſpondeat; vides ex ſilentio nihil habere quod reponat; Demonſtratio enim ſynthetica, qua reſponſionem meam ad ejus objectionem obfirmavi, adeo facilis, clara & ad veterum demonſtrandi modum accommodata eſt, ut ſe ſe riſui exponeret, ſi quid contra movere vellet, cum a quovis etiamnum

 Geo-

1696 Jun. Geometriæ Tyrone intelligi poſſit. Modus, quem Tibi propoſuiſti notandi calculos, omnino commodus eſt pro typis; optandum foret ut jam-diu introductus eſſet, revera enim hæc innotatio aliquid laboris faceſſet iis magis, qui veteri notationi aſſueti ſunt, quam iis qui recens Algebræ ſtudio animum applicant.

En adjecta hic marginalia Domini HUGENII, quæ Te tantum concernunt; videbis ex iis non tanti eſſe momenti, quanti forſan credideras. Non e re judicabis, ut etiam reliqua Tibi tranſcribam, quæ alios concernunt; ſi tamen illa deſideras, lubenter faciam, erit enim inter ſemiquadrantem horæ factum. Nondum nactus ſum reliquos *Actorum* tomos; eorum tamen per primam occaſionem mittendorum ſpem facit amicus. Memini quod mihi non ita pridem ultro promiſeris excerpta ex litteris Domini HUGENII ad Te datis, in quibus ipſum magnifice de noſtra methodo ſentire, ais. Gratiſſimum foret, ſi eorum me compotem redderes. Vellem etiam mihi locum indicares *Actorum* *; ubi de eadem re mentionem facit; Nil novi hic ad nos pervenit, quocirca plane ignarus ſum eorum quæ in Republica Litteraria peraguntur. *Acta Lipſienſia* non niſi annatim, vel ad plurimum ſingulis ſemeſtribus huc appellunt; loco quod illa *Baſilea* menſtruatim acceperam. Ideo rogavi Dominum MENCKENIUM, ut ſi quid in illis ſingulare prodiret, illius me per litteras redderet participem; quod & Te rogo, præſertim cum Dominus MENCKENIUS ad me non ſcribat niſi rariſſime, quando alia cauſa id poſtulat. Ante aliquod tempus ipſi miſi quædam *Actis* † inſerenda, ubi occaſionem arripui nonnihil attingendi de iis, quæ ultimo *Actorum* Novembri inſeruiſti, præcipue vero objiciendi modeſte unum & alterum iis, quæ Dominus TSCHIRNHAUS ibidem publicavit, ‡ ubi inter alia modum tradit abſcindendi ex curva parabolica portiones in data ratione, quod ego oſtendo fieri non poſſe, quin habeatur quadratura abſoluta Hyperbolæ,

* 1693. Octob. p. 496.

† *Supplementum Defectus Geometriæ* Carteſianæ, *circa inventionem locorum &c. Acta Erud.* 1696. Jun. pag. 264. Opp. Tom. I. N°. XXX. pag. 155.

‡ *Nova & ſingularis Geometriæ promotio circa Dimenſionem quantitatum Curvarum per D. T.* Act. Erud. 1691. prov. p 405. Joh. BERN. Opp. Tom. I. N°. XXVIII. pag. 149.

bolæ, & proinde extenſio curvæ parabolicæ. Rogavi ſimul Dominum Tschirnhausium, ut ſuam demonſtrationem publicare haud gravare velit; promiſi me ipſi pro lucro gloriam inventionis quadraturæ Hyperbolæ ceſſurum; Hiſce adjeci aliquod curioſum Problema, conceſſo toto quod currentis anni reſtat tempore; intra quod ſi nemo ſolutionem exhibeat, me meam exhibiturum dixi. *1696 Jun.*

Cum neſciam an jam prodierit in *Actis*, vel propemodum proditurum ſit, illud libenter hic repetam, cui per octium Te applicare, rogo, haud graveris. *Datis (Fig. 37.) in plano verticali* TAB. VII. *duobus punctis* A *&* B, *aſſignare viam* AMB, *per quam mobile* M, *a puncto* A *moveri incipiens, & propria gravitate deſcendens, breviſſimo tempore perveniat ad punctum* B.

Miror hoc Problema hactenus nemini in mentem veniſſe. Reſpicis quod ſit ex eorum numero, ubi ex lineis omnibus quæritur una præſtans aliquid in deſideratis minimum; cujuſmodi ſolutionem in Exemplo Catenariæ per Seriem inveſtigare inſtituiſti. * Interim quantumvis arduum hoc Problema videatur, illud tamen duplici modo, & quidem abſque Serie ſolvi, ubi egregias proprietates, quæ in alia materia ſuum uſum obtinent, obſervavi.......

. . . .

Groningæ 9. Junii 1696.

Amplitudinis Tuæ
ad officia paratiſſimus
J. Bernoulli.

* Epiſtol. X.

EPISTOLA XXVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De actione materiæ gravificæ. De æſtimatione virium a priori. *Diſſertatio Dynamica. De annotationibus* Hugenianis. *Quanti fecerit Calculum differentialem. Problematis Curvæ Trachyſtochronæ ſive Brachyſtochronæ ſolutio.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1696 Jun. NOn mirum eſt, ſi in iis nihil certe conſtitui inter nos poteſt, quæ demonſtratione definiri non poſſunt; quod uſu venit in cauſa gravitatis. Licet tamen in his quoque [ſi tanti videatur] deprehendere, quæ ſententia ſit ſimilior veri. Dominus *Frater* Tuus, in ſuis ad me litteris, ex meo modo explicandi æſtimationem virium per aliquot elaſtra, totam vim ſuam corpori alicui impendentia, conjecerat me credere, gravitatem tali elaſtrorum actione, ictibus repetitis vim in grave transferentium, oriri. Reſpondi me elaſtris tantum in exemplum uti. Optime tamen notas, tali modo oritura eſſe eadem phænomena, quæ in gravibus explicuit Galilæus; & manifeſta ſane res eſt attendenti; nam cum ſpatia, a gravi percurſa, ſint viribus a gravi acquiſitis vel amiſſis proportionalia; neceſſe eſt utique, ut æqualibus ſpatiis æquales vires acquirantur ac perdantur a gravi; perinde ac ſi a talibus elaſtris vis ipſis fuiſſet data vel ademta. An vero reapſe talis cauſa a ſpatiis petenda ſit altioris indaginis res eſt: Quanquam ſano ſenſu id ſemper dici poſſit, etiamſi explicatio per ventum, vel per vim centrifugam adhibeatur. Sane ſi fingeremus grave aſcendens, velut retia aranearum æquabiliter diffuſa perrumpere, explicari poſſet hæc æquabilis virium amiſſio; ſed activum aliquid ſic moderari, ad modum elaſtrorum, non æque facile puto; quod ſi poſ-

ſis

Digitized by Google

ſis invenire modum, qui naturæ conſentaneus videatur, applaudam lubentiſſime. Ais per Te licere mihi non agnoſcere pro vera ſententiam tuam, *ſi velim.* Ego vero rogo, ut Tibi perſuadeas me ab hac arbitraria judicandi ratione eſſe alieniſſimum, & propenſiſſimum eſſe ad audiendam vocem rationis. Verum eſt fieri poſſe, & ſæpe debere, ut materiæ gravificæ particula in corporis poris hæreat, & in iis etiam vim ſuam perdat; non tamen ideo vis illa in totum corpus transferetur, aut ad deſcenſum augendum ſerviet; ſed in partium motibus abſorbebitur. Ais: *cum materia gravifica ſit ſubtiliſſima & omnia ſint plena, procul-dubio unam continuum conſtituere & particulas non ſequi ex intervallo.* Ego vero putarim materiam gravificam, nec ſubtiliſſimam eſſe, nec omnia replere, nec unum continuum conſtituere, ſed tantum eſſe diſſeminatam in alia multo ſubtiliore.

Addis: *ſi hoc demus, tamen numerum ictuum ſpatio proportionalem fore*; verum quomodo id conſequatur, non oſtendis; & agnoſces, opinor, ventum in navem agere numero ictuum potius proportionali ad tempus, quam ad ſpatium. Cæterum diſputatio noſtra de hac quæſtione ex eo orta eſt, quod videbatur Tibi, communi explicandi ratione, non poſſe ſatisfieri cuidam objectioni contra virium æſtimationem noſtram: Et ideo factum eſt, ut hactenus neceſſarium putarem hanc ſerram tecum reciprocare. Sed nunc, opinor, agnoſcis alterutro explicandi modo idem prodire. Itaque ex noviſſimis litteris tuis demum, quis nunc ſit Tibi ſcopus intelligo; nec repugno; modo [ut dixi] diſtincte explicari poſſit, qua ratione fiat, quod dicis. Hæc tamen ſcribens incido in verba tua, quæ me adhuc turbant, ais nimirum, *incongruitates ſe ſe prodere ſtatuendo ictus procedere ſecundum tempuſcula*; quænam ſint illæ incongruitates, fateor me non videre; quod ſi adhuc objectionem illam in mente habes, quæ Tibi negotium faceſſerat, optarem ut eam diſtinctius proponas, & velut in forma. Sane ubi nuper reciprocatis cum Domino Papino litteris objectionem ipſius in formam redigi; deſeruit eam ipſe, & aliam novam jam fabricavit, cui nunc ſatisfacio, ſperoque, hac diſputandi forma inter illum & me

1696 Jun. me continuata, controverſiam terminatum iri; neque enim alter ab altero ſe non intelligi amplius quæritur.

Spero & de ictus quantitate me Tibi alias ſatisfacturum. De Pardiesio optime judicas: Ejus de motuum regulis Diſſertatio non magni momenti eſt: bene quidem vidit difficultatem de incurſu obliquo, ſed non reſolvit. Mea demonſtratio a priori, pro noſtra virium æſtimatione, nititur utique aliqua ſuppoſitione. Nempe: *Actionem quæ facit aliquid uniformiter, tempore ſimplo, eſſe duplam actionis facientis idem uniformiter, tempore duplo.* Hanc ſuppoſitionem concedere debent Catelanus, & alii, cum quibus diſputaveram, qui falſo ſibi perſuaſerant, negligi a me temporis æſtimationem, quæ a nemine melius adhibetur, quam a me. Nondum quidem inveni modum a priori hanc propoſitionem demonſtrandi per viam congruentiæ; imo, ne hanc quidem, quod *actio idem faciens, breviori tempore, ſit major*; a quo eſſet incipiendum. Verum hoc admiſſo, utique eo ipſo quod nulla amplius datur reſolutio, ſeu quod nihil medium interponi poteſt inter A & B, ut B interpoſitum fuerat inter A & C; aliud dici nequit, quam actiones eſſe ut celeritates, A erat *facere duplum, tempore ſimplo;* B *facere duplum, tempore duplo*, & C *facere ſimplum, tempore ſimplo*: Itaque actio A eſt major quam actio B, & quidem ita ut creſcat actio, manente effectu & tempore decreſcente. Itaque ex eo ipſo, quod nullum eſt principium aliquid ultra determinandi, ſequitur actiones eſſe reciproce ut tempora. Nimirum *ubicunque nulla reperiri poteſt ratio proportionis compoſita, neceſſe eſt ſimplicem locum habere.* Operæ tamen pretium eſt, ut Objectio tua, quam alicui occurrere poſſe optime notas, reſolvatur; quo facto, major [credo] lux accendetur, apparebitque diſcrimen inter potentiam & actionem. Objectio ita habet: A, tempore ſimplo, idem facit quod B, tempore duplo; Ergo A eſt duplo velocius quam B. Ergo potentia ipſius A eſt quadrupla potentiæ ipſius B. Reſpondeo concedendo totum argumentum, potentiam eſſe quadruplam, & tamen aio actionem tantum hic eſſe duplam. Quod Paradoxum ita oſtendo: nempe potentia ipſius A quadrupla eſt [hoc ipſum enim demonſtravimus ex hoc ipſo noſtro,] ſed actio eſt tantum

tantum dupla; quia Actio eſt in ratione compoſita potentiæ, quæ exercetur, & temporis in quo exercetur; itaque potentia ipſius A quadrupla, ſimplo tempore exercita, dat actionem duplam ejus, quam dat potentia ipſius B ſimpla, exercita tempore duplo; & quadruplam ejus quam dat potentia ipſius C ſimpla, exercita tempore ſimplo. Scilicet, in A potentia 4, tempus 1, dat actionem 4. In B potentia 1, tempus 2, dat actionem 2, denique in C potentia 1, tempus 1, dat actionem 1. Vides quam hæc pulchre quadrent, & quam parum diſtinctæ notiones de potentia, actione & ſimilibus vulgo habeantur. Complures jam anni ſunt, quod hæc explicui in Diſſertatione conſcripta in Itinere Italico, & *Florentiæ* apud amicum relicta, qui editionem in ſe receperat; ſed ego poſtea in mora fui, dum plura ſubnata ſunt, quæ me adjuncturum ſcripſi, necdum tamen præſtiti, non quod res deſint, ſed otium ordinandi. Cæterum, ut actionem nunc, compoſita ratione ſuorum principiorum, potentiæ & temporis, æſtimo; ita eam paulo ante æſtimaveram compoſita ratione eorum, quæ præſtat; effectus ſcilicet extenſivi ſeu materialis, nempe longitudinis [quam κατ' ἐξοχὴν effectum vocare ſoleo] & effectus intenſivi ſeu formalis. Deſideratum enim eſt, ut præſtetur multum & cito. Ambæ autem æſtimationes conſentiunt inter ſe, ut vides. . . . . 1696. Jun.

. . . .

Pro *Hugenianis* notationibus marginalibus ago gratias ſingulares, rogoque ut cæteras quoque omnes communices. Indicant neſcio quid moroſitatis, ne dicam malignitatis, ſed quibus eo facilius ignoſcendum, quod publice & per litteras æquiora dixit, præſertim de Analyſi noſtra. Nam in *Actis Eruditorum* 1693, p. 476 [ubi ſolutionem ſuam Problematis cujuſdam, Tui puto, occaſione Conſtructionis tractoriæ excogitati exhibet] diſerte commendat calculi differentialis [quo tunc feliciter uſus erat] inventionem, *abſque quo* [inquit] *vix eſt ut ad has ſubtilitates admitteremur.* Et in ſuis ad me litteris, biennio abhinc circiter ſcriptis, Calculum vocat admirabilem [*vôtre merveilleux calcul*]. Verba ipſa Tibi tranſcribam, ubi litteræ incident in manus: nunc enim ſe ſtatim non offerunt, & quærere non vacat.

Y 2 Poſtremo

1696 Jun. Poſtremo accedo ad Problema Tuum inveniendæ lineæ, quam vocare, opinor, liceat *Tachiſtoptotam*, ſeu celerrimi deſcenſus. Problema eſt profecto pulcherrimum, & me invitum ac reluctantem, pulchritudine ſua, ut pomum Evam, ad ſe traxit. Eſt enim ea mihi tentatio gravis & noxia, viribus affectis, & incumbente aliorum mole; ut non facile amplius audeam, quæ intenſiorem poſtulent laborem meditandi; itaque inpoſterum Problemata a Te deprecor, maloque ab alio, & præſertim a Te doceri ſolutiones, quam ex me ſperari, Tibique debilior videri, quam fieri mihi. Nam ſentio tali labore præſertim calculi [qui levis ſatis tibi videri poſſit] non parum atteri vires meas, & phlogoſes illas importunas excitari. Accipe interim quid tentarim, non per Seriem quidem, hæc enim tantum ſubſidialis eſt, ſi res ad triarios redierit; ſed ea ratione quæ ad æquationem differentialem ducat, quam & in iſtis ex viſceribus Problematis habere ſolemus. Aio igitur eam eſſe TAB. VII. naturam lineæ Tachyſtoptotæ AC (*Fig.* 38.) [in qua grave celerrime a puncto A ad punctum C deſcendit,] ut poſitis abciſſarum, ſeu altitudinum, incrementis conſtantibus, ſint elementa ordinatarum, ſeu latitudinum BC, in ratione compoſita ex directa Elementorum curvæ, & reciproca elementorum temporis verticalium. *Verticalia* voco *elementa* temporum, quibus grave deſcenderet in ipſa verticali AB. Unde ſequitur elementa curvæ itidem eſſe in ratione compoſita ex elementorum latitudinis directa ſimplice & ipſarum altitudinum reciproca ſubduplicata; itaque ſi AB ſit x, & BC ſit y, & aſſumatur conſtans quædam b, res reducitur ad quadraturas, & erit $dy : dx = \sqrt{x} : \sqrt{(b - x)}$. Sit $dy : dx = v : b = \sqrt{(2bx - xx)} : 2b - x$. Dico v, ipſis dy proportionales, eſſe ad meam Quadratricem, qua olim pro Tetragoniſmo meo Arithmetico ſum uſus; atque adeo curvam Tachyſtoptotam eſſe Quadratricem meæ Quadratricis, & proinde a circulari dimenſione TAB. VII. pendere. Nam ſi (*Fig.* 39.) centro G, radio AG, ſeu b, deſcribatur ſemicirculus AHM, & angulo AGH biſecto, ducta GT occurrat tangenti verticis in T, & ſit AB, x, adeoque ſit BH, $\sqrt{(2bx - xx)}$ tunc AT erit v, ſeu erit ad b, ſive AG, ut BH ſeu $\sqrt{(2bx - xx)}$ ad BM ſeu $2b - x$. Jam in BH [ſi opus producta]

producta] ſumatur BN æqualis AT, erit $\int v dx$, ſeu area ABNA æqualis duplo ſegmento circulari, cujus arcus AH. Itaque ſi area ABNA, vel duplum hoc ſegmentum applicetur ad rectam *b* [ut fiat $\int v dx : b$] prodibit *y*, ſeu BC, ordinata lineæ quæſitæ AC. Unde ſequitur Tachyſtoptotam AC eſſe lineam ſegmentorum [quæ ſcilicet ex eodem puncto, nempe vertice, abſcindantur] ſeu lineam, cujus ordinatæ ſint ſegmentis circularibus proportionales, quorum tetragoniſmo ſuppoſito facile curva per duo puncta data deſcribi poteſt. 1696 Jun.

Adjiciam Theorema, ut puto, non inelegans; facile quidem, ſi quis animum advertat, Tibi tamen fortaſſe non diſpliciturum, quia Tui Problematis occaſione mihi incidit. Nempe ſi (*Fig.* 40.) triangulum rectangulum Pythagoricum [ut quidam vocant] ſeu cujus latera ſunt, 3, 4, 5; ita ſtatuatur, ut perpendiculariter erectum ſit latus minus; grave deſcendens per AB verticalem, & deinde concepto impetu pergens per BC horizontalem, eodem tempore perveniet ab A ad C, per latera AB, BC, quo directe per ipſam hypothenuſam AC. In praxi autem, oportet angulum B nonnihil rotundari in portiunculam curvæ, cujus tangentes ſint AB, BC, ut grave ſine repercuſſione, aut impedimento, tranſeat ex AB in BC; proderit etiam angulum ABC eſſe tantillum obtuſum. Si AB minor ſit tribus quadrantibus ipſius BC, citius abſolvetur iter per latera, quam per hypothenuſam; ſin major ſit, directum iter præſtat. Et multa alia ejus generis conſtitui poſſunt, quibus immorari non vacat. TAB. VII.

Et jam finis litteris ſatis prolixis eſt imponendus; quærere tamen adhuc lubet, nihilne ex *Gallia* habeas a Dno. Hospitalio, aliiſque amicis? Quæ apud vos, vicinoſque *Batavos*, novitates Phyſico-Mathematicæ? ſuperioribus jam ſcriptis, litteras a Dno. Cluverio accepi cum incluſis ad Dominum *Fratrem* Tuum. Defendit ſemper quæ dixerat, contra Quadraturam Parabolæ Archimedis, & noſtra quoque. Reſpondebo; ſaltem nullam dari poſſe conſtructionem *Archimedea* meliorem. Puto

1696 Jun. habere eum meditationes profundas nec ſpernendas; ſed non opus erat, ut iis uteretur ad bene conſtituta evertenda. Vale.

Dabam *Hanoveræ*... Junii 1696.

Deditiſſimus
Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

P. S. . . . . *Acta Eruditorum* etiam ad me ſatis tarde perveniunt, negligentia Bibliopolæ, qui curare in ſe recipit; ut neſciam an Tuum Problema ſit in *Actis*, cum monitis de Domini TSCHIRNHAUSII ſectione Curvæ parabolicæ. Video eum ſæpe paulo promtius pronuntiare.

EPISTOLA XXIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Actione materiæ gravificæ. De æſtimatione virium a priori. *De Problemate brachyſtochronæ. Cyclois eſt linea ſegmentorum. De ſynchrona. De Trajectoriis orthogonalibus. De* HUGENII *Mſtis. De* CLUVERIO. WALLISII *Operum Editio.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1696 Jul. CUm nunc de mente mea Tibi conſtet, & quis mihi ſcopus ſit in explicatione actionis materiæ gravificæ intelligas, ei diutius non immorabor; liceat tamen paucis perſtringere ea quæ in poſtremis tuis hac ſuper re monuiſti. Promittis Te meo explicandi modo lubentiſſime applauſurum, ſi poſſim invenire viam naturæ conſentaneam, qua activum aliquid ſic moderari liceat ad modum Elaſtrorum; quemadmodum fingere poſſemus retia aranearum æquabiliter

biliter diffuſa, quibus perrumpendis grave aſcendens decrementa pateretur virium, ſpatiis proportionalia. Sane ſi mihi concedis poſſe ſaltem ſana ratione ſtatui particulam gravificam totam ſuam vim transferre in grave, jam habemus quod petis; particulæ enim gravificæ; ſi non continuum faciunt, ſaltem ſunt æquabiliter diſperſæ, & ſic quod in retibus aranearum fingis, paſſivum, hic revera ponitur activum; quippe cum quælibet particula totam ſuam vim transferat [per hypotheſim, quia id fieri poſſe jam in prioribus oſtendi]: & cum numerus ſit ſpatio proportionalis, patet utique virium accretionem fore æquabilem. Mentem meam clarius explicare non poſſum quam per aliquod ſimile. Pone navigium ferens hominem in puppi, quod primum ſit quieſcens in aqua ſtagnante nullius reſiſtentiæ, ipſum autem ſit ſolidiſſimum, ita ut ejus partes tremoris non ſint capaces, ſed vim impreſſam toti navigio impertiant, abſtracte etiam a materia ambiente. Nunc homo inſidens percutiat malleo puppim ſecundum directionem horizontalem, quo totum navigium moveri incipiat; repetat ictus æquales non ſingulis momentis, ſed ſingulis ſpatiolis per quæ navigium progreditur. Dico navigium eodem modo accelerari, quo grave deſcendens; recipit enim ſingulis ſpatiolis non ſolum ictus æquales [ſiquidem diſtinguis inter ictum & vim] ſed etiam vires æquales, eo quod mallei vis, quæ ſemper eadem ſupponitur tota ad navigium promovendum impenditur, ipſi enim nil remanet niſi quatenus pars eſt navigii; ſic etiam quia materia gravifica eſt infinite velox, poterit unica ejus particula conſiderari quaſi corpori gravi ſemper inſideret, ſuoſque inflictus ſingulis ſpatiolis reiteraret, loco quod ſingulis ſpatiolis nova advenit, unicumque faciat ictum. Ais me non oſtendere quomodo conſequatur numerum ſpatio proportionalem fore; ſed puto id ſatis oſtenſum eſſe ex eo ipſo, quod concedatur particulas gravificas æquabiliter diſſeminatas eſſe per totam altitudinem deſcenſus. Nam ſi numerus particularum percutientium ſit ſpatio proportionalis, ergo etiam numerus ictuum eidem erit proportionalis; quia tot ſunt ictus, quot ſunt particulæ quæ faciunt ictus. Haud dubie agnoſco ventum in navem agere numero ictuum proportionali ad tempus [ſuppoſito ventum incomparabiliter

1696 Jul.

1696 Jul. ter rapidiorem eſſe navi] ſed hoc minime evertit opinionem meam, imo maxime illam confirmat; eſt enim ſumma differentia inter utrumque agendi modum; & hinc non miror, quod cum nullam intereſſe credideris meæ opinioni hucuſque aſſentiri nolueris. Navis propellitur a particulis venti a tergo continue ſubſequentibus, & motum habentibus progreſſivum ſecundum directiones navis; hinc ſive quieſcat, ſive moveatur, ſemper novas & novas recipit impreſſiones, & quidem pro ratione venti allabentis, id eſt pro ratione temporis. Sed grave deſcendens non impellitur a materia quadam inſtar venti, quæ a circumferentia verſus centrum terræ fiat, ſed a particulis quidem rapidiſſimis, nullum tamen motum TAB. VII. progreſſivum verſus Terræ centrum habentibus; hinc niſi grave moveatur, nullas novas recipit impulſiones. Si globuli (*Fig.* 41.) in æquali diſtantia ſe ſe ſubſequentes 1, 2, 3, 4 &c. motu parallelo impingant in corpus A, erit numerus ictuum in ratione temporis. Sed ſi particulæ æquidiſtantes *a*, *b*, *c*, *d*, &c. moveantur rapidiſſime, veluti in vorticulis α, β, γ, δ, &c. primaque particula *a*, propellat corpus in vorticulum β, & particula *b*, in vorticulum γ, &c. tunc numerus ictuum erit in ratione ſpatii a Corpore B percurſi. Prior agendi modus eſt venti, poſterior eſt materiæ gravificæ, vel ſaltem analogus. Vides ſatis ex hac explicatione, quænam ſint illæ incongruitates, quæ ſe ſe produnt; ſtatuendo ictus procedere ſecundum tempuſcula; præter illam, quod in hac hypotheſi dicendum ſit, corpus jam in motu majorem virium gradum recipere a particula gravifica ut-ut incomparabiliter celeriori, cujus ſane reſpectu corpus quieſcere cenſendum, quam cum quieſcit; Hoc ſi non ſit incongruitas, ſaltem non eſt veritas adeo clara, quam adverſarius minime negare poſſit.

Optime diſtinguis inter Potentiam & Actionem; adeoque argumentum Tuum a priori oſtendit ſaltem actionem ipſius A eſſe quadruplam actionis ipſius C: Volebas autem id demonſtrare de potentia. Interim res plana fiet, dicendo actiones hic eſſe ut potentias quia æquali tempore peraguntur. Bene ſe habet quod agnoſcas nondum potuiſſe demonſtrari actionem A duplam eſſe actionis B: principium enim illud; *Ubicunque nulla reperiri poteſt ratio proportionis*

tionis compoſitæ neceſſe eſt ſimplicem locum habere; obſcurum mihi videtur, nec ſatis hic probat quod probandum eſt; propoſitionem vero alteram, quod *actio idem faciens breviori tempore ſit major*, a qua incipiendum dicis, ego pro axiomate aſſumerem. 1696 Jul.

Commercium meum parum ſibi proficuum credet, opinor Dominus Nieuwentiit, multoque minus indigebit mea ſcrupulorum ſuorum enodatione, ſive quod me huic operi non parem putet, ſive quod malit recurrere ad Te, tanquam ad fontem ex quo illos melius diluet; ultra tres ſeptimanas commoratus fui *Amſtelodami*, quod ipſe non poterat ignorare, ut amicus ejus Mackrelius mihi retulit; nec tamen eum videndi honorem habui: Interim non e re puto, nec mihi author eris, ut operam meam obtrudam ipſi nolenti forſan. En reliquas Hugenii notationes marginales, quas in memoratis Tomis reperi; cœteros nondum habeo.

Mitto hic ſolutionem meam Problematis mei de invenienda linea celerrimi deſcenſus, illis verbis conſcriptam, quibus illam ante acceptas Tuas conceperam, ut ſi digna videatur ſimul cum Tua *Actis* inſeri cures. Dederam lineæ nomen *Brachyſtochronæ*, ob rationem quam ibi videbis; ſed ſi magis arrideat nomen *Tachyſtoptotæ*, permitto ut hoc in illius locum ubicunque ſubſtituatur. Valdopere gaviſus ſum, cum intelligerem adeo Tibi placuiſſe hoc Problema, ut Te invitum & reluctantem, pulchritudine ſua, ut ais, ut pomum Evam ad ſe traheret, ſi modo ego non pro ſerpente illo maligno habear, qui hoc pomum obtulit; ſed gaudio meo multum acceſſit cum viderim Tibi jam repertam eſſe ſolutionem, a qua tamen omnes quibus illud proponebatur, longe abſunt, teſtibus litteris Varignonii [*De tous ceux* (inquit) *à qui j'ai annoncé vôtre Problême, je ne ſai encore perſonne qui l'ait reſolu; je l'ai tenté, mais la difficulté m'a tout auſſi-tot rebuté.*] Etiam ipſi Hospitalio minime diſplicuit Problema [*ce Problême*, mihi ſcribit, *me paroit des plus curieux & des plus jolis que l'on ait encore propoſé, & je ſerois bien aiſe de m'y appliquer; mais pour cela il ſeroit néceſſaire que vous me l'envoyaſſiez réduit à la Mathématique pure; car la Phyſique m'embaraſſe* &c.] Interim idem Tibi accidit, quod illis qui detegunt theſaurum, cujus tamen pre-

Digitized by Google

1696 Jul. tium nondum æſtimare poſſunt, quod etiamnum incluſus eſt ciſtis & capſis, quibus vero reſeratis, eum longe pretioſiorem deprehendunt quam ſperabant. Revera enim & Tu reperiſti ſolutionem Problematis, in quam autem, quantum in ſe contineat nondum introſpexiſti. Perſuaſus ſum totus, quod longe majorem capies voluptatem, ubi noveris curvam quæſitam eſſe Cycloïdem, quam cum illam inveniſſes anonymam: illa, inquam, eſt Cycloïs, de qua in ſimili materia HUGENIUS aliam inſignem proprietatem oſtendit, iſochroniſmum ſcilicet oſcillationum; quid, quæſo inexpectatius evenire potuiſſet? Ob hanc rationem puto ipſi nomen Brachyſtochronæ non male convenire, & ſic Tua ope novæ acceſſerunt proprietates Cycloïdis, cum oſtendas illam eſſe *Lineam ſegmentorum*, & Quadratricem tuæ Quadratricis. Sciendi cupidus ſum, qua via perveneris ad ſolutionem; prævideo Te alii alicui inſtitiſſe, quæ ab utraque mearum duarum diverſa erit. Alter meus ſolvendi modus quidem eſt indirectus, ſed quem directo præfero; quod una opera me deduxit ad ſolutionem Problematis Optici elegantiſſimi de curvatura radii in medio variante, ubi mirum conſenſum detexi inter duas iſtas curvas. Tuam vero ſententiam exopto, quid de utroque ſolvendi modo Tibi videatur; Conſtructionem etiam dedi curvæ, quam voco *ſynchronam*, quam ex occaſione prioris Problematis inveni; oſtendo ibi quod ſit curva, quæ omnibus Cycloïdibus ab eodem initio deſcriptis normaliter occurrit. Eſt ſane mirabilis curva; ejus enim conſtructionem, poſita extenſione arcus circularis, ex contemplatione præcedentis materiæ facile inveni: ſi vero illam in abſtracto conſideratam quærere velim, nequidem ad æquationem differentialem pervenire poſſum; In tantum ut, ſi hoc Problema ſeorſim, vel alio tempore, propoſuiſſem; invenire ſcilicet curvam omnibus Cycloïdibus perpendicularem; vix quiſquam ſolutionem dare potuiſſet; dum ego contra me eam ſolus poſſidere jactare potuiſſem: ſed magis publicæ utilitati, quam ſuæ gloriæ litandum cenſeo. Memini me Tibi olim † generaliter propoſuiſſe invenire curvam, quæ aliis poſitione datis occurrat normaliter, quod

† Epiſt. V.

quod ego in pluribus ſolveram. Modum quidem Tuum generalem tradebas *; ſed ſi reſumere placet, videbis illum plerumque locum non habere, quando curvæ poſitione datæ ſunt tranſcendentes, ut in hoc ipſo exemplo apparebit; alterius Exempli, quod in meo ſchediaſmate propono, de Logarithmicis per curvam normaliter ſecandis, nondum quidem conſtructionem, nec æquationem differentialem primi gradus inveni, ſed tamen ſeriem quamdam ſimpliciſſimam pro illa exhibere poſſum. Cœterum egregium eſt, quod obſervaſti de Triangulo rectangulo *Pythagorico*. Ego ſane etiam multa non contemnenda detexi ex occaſione mei Problematis; inter alia inſignem quamdam proprietatem Cycloïdis, quæ hæc eſt. Super recta CD (*Fig.* 42.) deſcriptæ ſemicycloïdes eædem AD, *ad*, *ad*, &c omnes normaliter ſecabuntur ab omnibus ſemicycloïdibus iiſdem C*b*, *cb*, *cb*, &c. ſuper parallela A*b*, deſcriptis: Unde neſcio quid peculiare accidit Cycloïdi; ejus enim evoluta eſt Cycloïs; ejus cauſtica eſt Cycloïs; nunc ejus normalis perpetua eſt itidem Cycloïs, & quidem eadem. Hæc vero omnia tria etiam conveniunt Logarithmicæ ſpirali, quam *Frater* meus vocat Spiram mirabilem, in qua ego primus inveni, quod pro evoluta habeat ſpiralem eamdem. En igitur mirabilem affinitatem inter duas iſtas curvas. Si quis profundius perſcrutari vellet, quæ dico in ſchediaſmate meo, amplam ſatis materiam pro hoc haberet. Curva noſtra Brachyſtochrona infinitos habet caſus particulares; ut ſi peteretur ex infinitis arcubus circularibus, qui per duo puncta data duci poſſunt, ille qui reſpectu reliquorum eſſet celerrimi deſcenſus, ideſt, ſi eodem momento a puncto dato demitterentur gravia per ſingulos arcus, quinam ille eſſet, per quem grave citiſſime ad alterum punctum datum veniret: vel, ſi loco arcuum circularium ſubſtituerentur arcus aliarum curvarum determinatarum; Vel etiam, ſi ſuper linea recta duo data puncta conjungente, erigantur infinita triangula iſoſcelia, vel triangula rectangula, vel aliæ figuræ rectilineares, ſemper poſſet quæri caſus citiſſimi deſcenſus: adeo ut tot Problemata particularia formari poſſent quot liberet, & ſic noſtrum

1696 Jul.

TAB. VII.

Z 2 Proble-

* Epiſt. VI.

1696 Jul. Problema generale conſiſtere dici poteſt in inventione minimi infinitorum minimorum. Sed tranſeo ad nova quæ ſciſcitaris.

Frater meus junior, nulla reperta ſtatione *Pariſiis*, reverſus eſt in Patriam; Dominus HOSPITALIUS illum oneravit 3, vel 4. Exemplaribus ſui Tractatus novi * de principiis calculi differentialis, quorum unum Tibi deſtinatur. . . . . Hactenus quidem nihil novi incidit de differentialibus ex analogia differentiarum & potentiarum, quia de eo de novo cogitare nondum vacavit: ſuperſunt tamen nonnulla quæ monebo, quando diſputatio noſtra fuerit finita.

Novitates Phyſico-Mathematicæ quæ ex *Batavis* ad me perveniunt, ſunt oppido ſteriles. Audio HUGENIUM, præter VOLDERUM, conſtituiſſe Curatorem Mſtorum ſuorum Dominum FULLENIUM Matheſeos Prof. *Franequeranum*, deſtinatis pro labore utrique mille florenis Holland. de bonis ſuis.

Serione loquitur, an jocatur CLUVERIUS? Quidquid ſit, non audiendus eſt; habeat meditationes quantumvis profundas, ſane magno conatu magnas nugas dicit *Act.* 1687. pag. 586, quæ nil conducunt, niſi ut matheſeos imperitis contemtum inſpirent contra ſcientias Mathematicas. Vereor ne ſit ex eorum numero, qui vellent aliquid videri, ſed cum nil habeant quod producant, in cortice miſere hærent, nec tamen deſinunt nucleum arrodere. Ego ſic judico, ex iis quæ hucuſque ab ipſo vidi: quam enim dedit in *Actis* anni 1686 ſeriem quadraturæ Circuli non valet examinare, qua lege progrediatur, & an ſit juſta; & ſi ſit, nil novi; nil rari dedit; ſed fallor, dedit utique aliquid inſoliti, quadravit enim Circulum ſaltem per ſeriem; Ergo per ſeriem, *ex data linea conſtruxit Mundum Divinæ menti analogum.* O Lepidum Creatorem! ſed joco id dixerim, animus non eſt offendere quemquam, forſan eſt Tuus amicus, forſan eſt Vir egregius; licet id nondum innoteſcat per ſcripta ſua; nihil tamen laudi ejus detraham, videtur ut dicam quod res eſt, eaſdem ſibi quæ NIEUWENTITIO minutias obſtaculo eſſe, quominus noſtra amplecti velit. Interim ex ejus ratio-

* *Analyſe des infiniment petits.* Paris 1696. 4°.

Digitized by Google

ratiocinio quo evertere conatur quadraturam Parabolæ, liquido *1696*
fluit, nec ipſum triangulum rectilineum habere rationem ſubduplam Jul.
ad rectangulum circumſcriptum. Quis ſanæ mentis Geometra, præter CLUVERIUM, id negabit? . . . .

. . . . Vale & ama Ampl. Tuæ

Groningæ 21. Julii 1696.

Cultorem perpetuum

J. BERNOULLI.

P. S. Noſtine jam, [quod aliquoties ſignificare volui] quod WALLISIUS Opera ſua univerſa duobus voluminibus contenta in folio cum argumentis de novo in lucem emiſerit? multa quidem habet, quæ Te concernunt; ſed Calculum differentialem non ita laudat, uti decet. Suos *Anglos*, pro more ſuo ſolito, mirum quantum extollit. Præ illis nil fere eſt quod alii fecerunt. . . . .

. . . .

Digitized by Google

EPISTOLA XXX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Problematis Brachyſtochronæ termino prorogando. De ejuſdem ſolutione directa celanda. Solutionis Leibnitianæ *fundamentum. De ſchediaſmate* Jac. BERNOULLI. *De* NIEUWENTIITIO. *De Tractione gravitatis & æſtimatione virium* a priori. *Varia.*

Vir Celeberrime, Fautor & Amice Honoratiſſime!

1696 Jul. JUcundum mihi fuit videre conſenſum noſtrarum Problematis a Te propoſiti ſolutionum, cum ejuſdem lineæ conſtructiones, licet diverſas, dederimus. Ego contentus fui reperiſſe, quomodo linea per tetragoniſmum circuli conſtrui poſſit, non immoratus Problemati, egregio licet, quod vix, ut aggrederer, a tempore meo impetrare poteram. Tu longius progreſſus Cycloïdem ipſam eſſe pulchre reperiſti. Quod editionem attinet, conſuluerim adhuc nonnihil expectari, ut appareat quid alii quoque præſtent, inprimis Dominus *Frater* tuus, imo & Dominus. De TSCHIRNHAUS, præſertim cum terminum, ni fallor, aſſignaveris. Cum Dominus *Marchio* HOSPITALIUS [a morbo gravi reſtitutus] etiam ad me nuper alia occaſione ſcripſerit, ſe ſe nunc a meditationibus ejuſmodi abſtinere debere, putem ipſi Solutionem poſſe communicari, ſi Tibi ita videtur, & poſſe inſeri Problematis propoſitionem in *Diarium Eruditorum Pariſinum*, ut Viri Docti excitentur. Idem etiam in *Italia* faciendum puto. Spero Tua Menſi *Junio* * inſerta eſſe, etſi nec verbulo ad me attigerit Dnus. MENCKENIUS. Necdum ego *Junium* accepi, negligentia Librarii noſtri, qui credo nundinas *Brunſwicenſes* mox inſtantes expectat. Interim monui Dnum. MENCKENIUM, ut ſi nondum factum, mature Tua edi curet.

Cæterum

* *Actorum Lipſiens.*

Cæterum, ubi ſolutionis comprobationem edere vel communicare placebit, ſuaſerim viam illam directam, quam vocas, ſeu poſteriorem, non edi; * cum prior ſufficiat ad demonſtrationem, & poſterior, præter neceſſitatem, aliis ante tempus viam aperiat. Præſtat enim, ut puto, nonnihil adhuc ſuſpenſos alios teneri, ut vel ipſi inveniant aliquid fortaſſe a noſtris diverſum, quod augebit ſcientiam; vel agnoſcant, non eſſe hæc tam facilia, ut quidem putant, eoque diligentius has methodos aliquando meditentur. Methodus mea nonnihil a Tua diverſa eſt, ſed tamen eodem duxit, quam ut æquum eſt, & ut Tuo candori pari ingenuitate reſpondeam, ſic paucis habeto. *1696 Jul.*

Concipiens ſcilicet pro curva Polygonum infinitangulum; video id fore omnium poſſibilium facillimi deſcenſus, ſi ſumtis in eo (*Fig.* 43.) tribus punctis vel angulis quibuſcunque A, B, C, ſit punctum B tale, ut omnium punctorum in recta DE horizontali, hoc unum det viam ab A ad C facillimam. Res ergo redit ad ſolutionem Problematis facilis: Datis duobus punctis A, & C, & recta horizontali inter ea cadente DE, invenire in hac recta punctum B tale, ut via ABC ſit facillima. Ubi prodeunt, quæ in noviſſimis Litteris notavi, circa elementa abſciſſarum, ordinatarum, & arcuum; ſi ſcilicet infinite parvum inter puncta A, B, C, ponatur intervallum. Nec opus eſt ut aliquid ultra apud Te addam, & tranſcribere calculum non vacat, nimis diſtracto. TAB.VII.

Mitto ecce quæ Dominus ***Frater*** tuus menſi ***Julio*** inſeri curavit circa Problema ***Beaunianum*** extenſum †, ut vocat, tranſmiſſa mihi a Dno. MENCKENIO, quia me tangunt. . . . . Vult in quibuſdam a me diſſentire, quorum aliqua non ſatis intelligo, tum quia figuræ abſunt in his quæ miſit Dnus. MENCKENIUS, tum etiam quia nondum poſſum rem conſiderare & prioribus conferre. Ut ego rem capio de punctis æquidiſtanter aſſumtibilibus non videtur eſſe difficultas. Quod deviationem Navis attinet, fateor,

* *Prodiit tantum* A°. 1718, *in* Act. Erud. Febr. pag. 86, & Mem. de l'Acad. pag. 136. *Vide etiam* Opp. Tom. II. N°. CIII. pag. 267

† Jac. B. *Problema* Beaunianum *univerſalius conceptum &c. Acta Erud.* 1696. Jul. pag. 332. *vel* Jac. BERNOULLI Opp. N°. 72. pag. 731.

1696 Jul. teor, ſi circumſtantias practicas negligamus, & rem rudius concipiamus, poſſe dici eamdem eſſe deviationem, quocunque vento; quanquam rem paulo accuratius adhuc examinare aliquando velim, ſed majore otio. Dominus *Frater* Tuus propoſuerat æquationem differentialem ſolvendam; eam redire ad aliam, quam non difficulter ſolvimus, notavi; & id nunc faſſus dat hujus ipſius ſolutionem præter neceſſitatem, cum mihi & Tibi quoque non poſſit eſſe ignota, & Domino *Marchioni* olim a me fuerit perſcripta. . . . .

Mitto & quæ Dominus NIEUWENTIIT petit *Actis* inſeri circa Problema *Beaunianum* a Te ſolutum, quibus Tibi reſpondet. Mihi videtur non eſſe tanti quæ dicit, cum Problema hoc ſit jam ſatis elaboratum, ut aliquid ultra addendum non videatur; & ſcripſi Dno. MENCKENIO, hortandum potius Dnum. NIEUWENTIIT, ut aliquid novum attingat, in quo ſuas vires experiri poſſit; præſertim cum Methodum, neſcio quam *Barrovianam*, vel ſuam jactet, cujus utile eſt ut meliora det ſpecimina. Miſi tamen Tibi, ut cum judicio Tuo, ſi placet, remittas. Mea mens non fuit ut Tu ad eum ſcriberes, ſed potius ut ille ad Te.

Gratias ago pro reliquis excerptis *Hugenianis*. Videtur interdum paulo rigidius judicare: Exempli gratia, cum de WEIGELIO, Viro docto & bene animato, contemtim adeo loquitur, Matheſeos imperitum dicere iniquum eſt, etſi non ſatis peritus ſit Artis analyticæ profundioris. Cum reliquos Tomos obtinebis, itidem excerpta rogabo.

Quod deſcenſum gravium attinet, nondum agnoſcere potui, quomodo fieri queat, ut materiæ gravificæ partes totam vim ſuam in grave transferant. Si homo malleo percutiat puppim, ſingulis æqualibus ſpatii intervallis, non tamen tota vis mallei poteſt in navem transferri. Et difficulter elici poteſt, ut quovis ſpatii intervallo fiat ictus per quem æqualis vis navi accedat. Poſita tamen tali hypotheſi omnia pulchre procedunt. Hoc dico, ut Tibi occaſionem dem perficiendi cogitata, præſertim cum mihi applicatio ad gravitatem difficilis videatur. Facile efficitur amiſſio virium æquabilis ſecundum ſpatium, acquiſitio non item.

Quod

Digitized by Google

Quod attinet a me aſſumta, fateor propoſitionem illam, quod *Actio faciens idem, brevi tempore, ſit major*; poſſe aſſumi ut Axioma; ſed ſcito apud me omnis Axiomatis adhibendi deſiderari demonſtrationem; alioqui imperfectam eſſe ſcientiam. Et qui hoc Axioma demonſtrabit, ſimul credo & ad illud alterum, cujus deſideratur demonſtratio, viam aperiet. Minime tamen improbo, ſi quis talia ſine demonſtratione aſſumat. Cæterum ſunt [opinor] quædam, quæ ſine illo principio altero non demonſtrabuntur. Obſcurum non puto, ſi recte intelligatur. Nobis tamen ſuffecerit aſſumtum a me pro æſtimanda actione adeoque & potentia, donec ejus quoque occurrat rigoroſa quædam demonſtratio. Semper diſtinxi actionem a potentia, ſed quomodo inferatur ab una ad aliam in noviſſimis expoſui, idque putavi Tibi placiturum. 1696 Jul.

Brachyſtochronæ appellatio magis mihi placet pro generali ſignificatione; *Tachyſtoptotæ* vero nomen poſſet ſpeciali accommodari, cum agitur de gravis deſcenſu, ſeu caſu. Perpulchra mihi videntur, quæ habes de linea radii in medio continue variante, & de linea alias infinitas normaliter ſecante; quod Problema excoli meretur.

. . . .

Walliſiana opera vidi, & quæ in illis *Newtoniana*, in quibus ſperabam reperire aliquid amplius pro Methodo tangentium inverſa; interim virum eſſe egregium fatendum eſt. WALLISIUS antiquum obtinet cum multis aliis *Anglis*, ut de rebus aliorum loquatur contemtius. *David* GREGORIUS, in libro quodam Optico * noviſſimo, ſecundum conſilium meum in *Actis* † datum, pro ſectionibus conicis ſubſtituit circulos oſculantes; videbo aliquando, ubi ipſum Librum videro, an ſit profeſſus per quem profecerit.

A Domino FULLENIO Profeſſore Matheſeos *Franequerano*, *Hugenianorum* Manuſcriptorum curatore, non memini aliquid me videre. Puto neminem nunc eſſe in *Batavis*, poſt HUGENII obitum,

* Catoptricæ & Dioptricæ ſphæricæ Elementa Oxon. 1675. 8°.
† 1686. Jun. pag. 291.

Digitized by Google

1696 Jul. tum, [HUDDENIO demto, ſed quem aliæ jam cogitationes tenent,] qui Tibi non cogatur ſubmittere faſces.......................

. . . .

Dominus *Frater* Tuus miſit mihi quamdam ſuam diſputationem *De ſeriebus infinitis ſummandis*; † ubi tamen nihil notavi, quod novum mihi videatur. Item quaſdam ſuas Notas in *Geometriam* CARTESII. * Item quoddam ſcriptum Domini HOLLANDERI §. Hæc omnia Tibi viſa puto. Miſit mihi etiam pauculas quaſdam Analyſes ſuas datorum in *Actis*, quæ poſſint aliquando ſervire additionibus, pro ea quam molior *ſcientia infiniti*. Sed a Te plura ejus generis ſpero. Vale, & has ſcientias præclaris ingenii Tui fœtibus ornare perge. Ita plurimum voluptatis capiet.

Hanoveræ 31. Jul. ſt. v. 1696.

Tuus totus

LEIBNITIUS.

† Jac. BERNOULLI Opp. N°. XXXV. pag. 375. N°. LIV. pag. 517. N°. LXXIV. pag. 745.

* Jac. BERNOULLI Op. N°. LXVII. pag. 667.

§ Tob. HOLLANDERI *amaltbaeum aſtronomicum*. Baſ. 1699. 4°.

EPIS-

EPISTOLA XXXI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Problemate Brachyſtochronæ. De Nieuwentiitio. *De actione gravitatis & æſtimatione virium* a priori. *Methodi fluxionum & Calculi differentialis identitas. De* Fullenio. *De* Hollanderi *amalthæo aſtronomico.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

IN eo eram, ut æſtivis hiſce feriis ad Te exſpatiando ipſe harum latorem agerem, quo viva converſatione tua jam a longo tempore mihi deſiderata ad ſatietatem frui potuiſſem; ſed iter grandiuſculum, œconomia nondum conſtituta, & ſanitas nondum reſtituta unici mei Filioli per aliquot jam menſes periculoſe ægrotantis, a propoſito me abduxerunt & in aliam occaſionem id differre me fecerunt. *1696 Auguſt.*

Cum Tibi tranſmitterem ſolutionem meam Problematis a me propoſiti, utique mens mea non fuit, ut illam ſtatim publicares, ſed expreſſe Te rogavi, ut quondam illam edas cum Tua; volui tamen in tempore Tibi mittere, ut ſi forte opus fuerit, teſtari poſſis, me non eum in finem propoſuiſſe Problema, ut aliorum Solutiones, ſi quæ apparituræ ſint, mihi ſub velata ſpecie arrogare poſſem. Optime ergo facis, ſi exſpectas terminum aſſignatum, nimirum Anni hujus finem. Non puto Dominum Tschirnhausium hic quicquam præſtiturum, cum nequidem in Catenaria aliquid præſtiterit; quia forſan ſua applicatione hæc non digna cenſet. . . . . Communicabo Domino *Marchioni* Hospitalio ſolutionem ſi illam petierit; Non diſplicet Problematis propoſitionem inſeri poſſe in *Diarium Pariſinum* & *Ita-*

Aa 2 *licum.*

1696 Auguſt. *licum*: Oportet autem ut Tute hoc cures; etenim cum *Italia* nihil mihi commercii eſt, Auctor vero *Diarii Pariſini* adeo noſtra vilipendit, [quod ſæpius expertus ſum] ut forſan terminus prius elaberetur, quam Problema lucem videret. Quod Dnus. MENCKENIUS nec ad Te nec ad me verbulo attigerit, dubito an menſi *Junio* mea inſerta ſint, licet illum iteratis vicibus inſtanter rogaverim, ne de brevitate termini pro ſolutione Problematis conceſſi conqueri liceat. Quod ſi finem hujus temporis expectaveris, non video quid impediat quominus altera mea ſolvendi via, quam directam voco, ſimul cum priori edatur; tunc enim aliis non amplius ante tempus viam aperiet, ſed bene lucem accendet pro aliis hujuſmodi inquiſitionibus inſtituendis, quibus *Maximarum* & *Minimarum* methodus mirifice extendi poteſt; ut ipſe agnoſces, ſi illam paulo penitius contemplari lubeat. Adde quod jam in propoſitione Problematis innuerim duobus diverſis modis me ad eamdem ſolutionem perveniſſe. Tuus ſolvendi modus nihil fere diverſus eſt a meo priori, concipiendo enim viam facillimam a puncto ad punctum per punctum quæſitum, jam involvis Problema *Fermatianum*, illudque de novo calculas, quod a FERMATIO, aliiſque, & a Te ipſo *Act.* 1682. p. 186. jam calculatum habemus, atque quod ego ſuppoſui.

Dicis Te mihi mittere, quæ *Frater* meus menſi *Julio* inſeri curavit, ſed non miſiſti; haud dubie Schedam Litteris includere oblitus es; rogo ut illa mittas cum proxime tuis futuris. Quam propoſuerat æquationem differentialem ſolvendam plane non æſtimo; quid enim facilius eſt quam infinitas hujuſmodi æquationes excogitare, quas ille qui illas propoſuit ſemper nullo labore ſolvet, eo quod ipſe illas per ſyntheſim ita formaverit, loco quod alii forſan per totam vitam fruſtra inſudarent. Non ſecus ac quivis in Algebra Tyro non difficulter æquationem, vel viginti dimenſionum, componere, iterumque ſolvere poteſt, quam tamen verſatiſſimus Algebriſta nequidem aggredi auderet.

En remitto ſchediaſma Dni. NIEUWENTITII, gratias ago pro communicatione; meum judicium ſcripſi ad marginem; ut ſi forte Dnus MENCKENIUS hoc ſchediaſma *Actis* inſerere velit, ſimul

Digitized by Google

ſimul reſponſionem quaſi ſuo nomine adjicere poſſit. Miror qui fieri poſſit, ut Dnus. Nieuwentiit in re adeo levicula hærere poſſit; concedit bonitatem Conſtructionis meæ, quam tamen in ſuis *Conſiderationibus* pag. 41. rite examinatam ad abſurdum deducere diſerte dicit. Sed omnis ipſius objectio in hoc conſiſtit, quod putet adhibendum eſſe $rdz = + zdy$, non autem $rdz = - zdy$; interim dormitans iſte Homerus confundendo dz affirmativum cum dz negativo; non conſideravit quod exiſtente dz ab una parte affirmativo, & ab altera negativo, $rdz = + zdy$, ſit idem quod $rdz = - zdy$. Cæterum magnam habet farraginem ſolutionum Problematis *Beauniani*, quarum operoſus calculus & tot litterarum confuſio non permiſerunt, ut illas examinarem. Quid tandem hæc omnia contra me, qui volui probitatem conſtructionis meæ unice defendere? Hoc autem feci & ille factum agnoſcit: ergo nil amplius rei mihi eſt cum illo. Si quid ſcrupuli invenit in Calculo differentiali, id jam Te illius Auctorem concernit; Deſero ego palæſtram. 1695 Auguſt.

Potitus ſum tandem reliquis *Actorum* Tomis, ſed marginalia *Hugeniana* exſcribere nondum vacavit, ea Tibi prima ſcribendi occaſione tranſmittam.

Cum nihil dicas de modo meo diſtinguendi inter actionem venti & illam materiæ gravificæ, puto ex ſilentio Te conſentire, quod numerus ictuum ſit ſpatio proportionalis. Quod de homine puppim malleo percutiente dixeram, mihi negare non debes, erat enim tantum hypotheſis. Revera tamen neceſſe eſt, ut malleus totam ſuam vim in navem transferat, ſi dum percutit, incomparabiliter celerius moveatur quam ipſa navis, id quod facile poſſum demonſtrare; nam poſt ictum malleus eam ſaltem retinet celeritatem quam navis jam habet; id eſt infiniteſimam partem celeritatis quam malleus in navem impingit; ergo retinebit etiam tantum infiniteſimam partem ſuæ vis quam ante ictum habebat; & proinde tota mallei vis, demta infiniteſima parte, id eſt, nihilo, tranſlata eſt in navem; abſtraho enim hic a materia ambiente, in qua aliqua pars vis abſorberi poteſt; & ſuppono navem eſſe ſolidiſſimam, & omnis tremoris expertem; Hinc, ni fallor, ſatis percipitur, quod etiam

1696 Auguſt. particula materiæ gravificæ totam ſuam vim in grave transferre debeat, ſi modo concedatur poſt ictum non ſtatim repercuti, quod & ipſe jam conceſſiſti.

Oportet ut definias quid per actionem intelligas; alias nihil unquam demonſtrari poterit. Omnis veritas, aut eſt Axioma, aut ex Axiomatibus derivata; Oportet ergo ut ad demonſtrandam illam in aliquo Axiomate ſubſiſtas, ne in infinitum progredi cogaris; miror itaque quod dicis, *Te omnis Axiomatis adhibendi deſiderari demonſtrationem.* Quidni & in dubium vocas, an Totum ſit majus ſua parte? ſed ut ad actionem redeam, da mihi definitionem nominis, & facile difficultatem diluam. Si enim per actionem intelligas ſolum effectum, non conſiderato quanto tempore ſit productus, tunc utique actio A faciens idem brevi tempore, non erit major, ſed æqualis actioni B facienti idem longo tempore, quia effectus producti ſunt æquales; ſi vero per actionem intelligas compoſitum ex effectu producto & tempore, tunc Actio A major erit quam actio B. Hæc, ni fallor, nituntur ſenſu communi, aut forſan mentem Tuam non ſatis aſſequor.

Cum meam curvam appellarem *Brachyſtocronam*, id feci ex conſideratione *Iſochronæ Hugenianæ*, ut cum eidem curvæ competant, habeant etiam nomina quam-maxime affinia. Nihil dicis de curva quam appello *Synchronam*, quamque adeo ſimpliciter conſtruo, etiamſi pro illa nullam invenerim æquationem differentialem, nedum aliquam inveniendi viam perſpiciam: vellem ut novæ huic ſpeculationi otioſa aliquot momenta tribueres, ut & alteri illi exemplo, quod propoſui de invenienda curva omnibus Logarithmicis communis axis & ex eodem puncto deſcriptis normali. Scire Te velim hujus mihi ſolutionem eſſe repertam, paulo poſt ultimas meas ad Te curſori traditas. Inveni quod ſit curva ex percurrentium genere, ut voco, quam proinde ope ipſius Logarithmicæ facillime conſtruo. Eſt ſane Exemplum, ubi Calculi percurrentis uſus inſigniter elucet.

Vallisius Newtoni Methodum paucis quidem explicat; ex illis paucis tamen video, quod in re neutiquam differat a Calculo differentiali, ut ipſe Newtonus fatetur in ſuis *Princ. nat.* pag.

Digitized by Google

pag. 254. Quod in hoc dicitur ***Differentiale***, ibi eſt ***Fluxio***, & quod in hoc ***Summa***, ibi ***Fluens***. Et Nervus hujus Methodi, ut & calculi differentialis ad duo hæc Problemata redit. ***Datis quantitatibus fluentibus, invenire earum fluxiones***; & viciſſim, ***Datis fluxionibus, invenire earum fluentes***. Loco Litteræ *d* ad deſignandam differentialem primam, vel fluxionem, utitur puncto ſupra ſcripto; pro differentiali ſecunda denotanda utitur duobus punctis, & ita porro. Sic dx eſt $\dot{x}$, ddx eſt $\ddot{x}$, $dddx$ eſt $\dddot{x}$, &c. Cæterum proceſſus ipſe operationis eſt utrobique idem, adeo ut neſciam annon Newtonus, Tuo calculo viſo, ſuam demum Methodum fabricaverit; præſertim cum ex loco citato videam Te ipſi tuum Calculum communicaſſe, antequam ipſe ſuam edidiſſet Methodum. De cætero Wallisius Tom. II. pag. 394, modum explicat, quo utitur Newtonus ad radicem extrahendam ex æquatione fluxionem radicis involvente, & quidem per ſeriem. Sed univerſali meæ Seriei palmam non præripiet: Eſt enim ille modus ***Newtonianus*** admodum operoſus, & fere idem cum Tuo, quem vero longe ſuccinctiorem & ad praxin aptiorem reddidiſti in *Act.* 1693. pag. 178. . . . . 1696 Auguſt.

Dominum Fullenium in *Carteſiana* quidem ſatis, ſed non item in interiori Geometria verſatum puto. Memini quod ante quindecim circiter annos, cum in utraque adhuc hoſpes eſſem, ***Frater*** meus Dominum Fullenium crebro conſulebat per Litteras, ſuper ea, quæ tunc-temporis non probe intelligebat in Carteſii ***Geometria***; me etiam non defugit, quod Dominus Fullenius ipſi roganti omnia fideliter, & [quod miror] patienter explicabat: neſcio unde hoc commercium ortum ſuum traxerat; forte cum ***Frater*** paulo ante in ***Batavis*** eſſet, & neſcio item quo facto iterum intercidit.

Quid tibi videtur de ſcripto Hollanderi, † habet multa Aſtronomica, quæ certis regulis coërcet, quæ tamen humanitus pene fortuita videntur. Exempli gratia, Regula ejus prima de invenienda obliquitate Eclipticæ Terræ, aut non eſt exacta & obſervationibus non reſpondet, aut debet *a priori* poſſe demonſtrari, ex Legibus

† Vide Epiſt. XXX. ſub fine.

Digitized by Google

1696 Auguſt. Legibus Naturæ. Conditorem Mundi non potuiſſe aliam obliquitatem Eclypticæ Terræ efficere, quam quæ ita ſit, ut Secans complementi ſit exactiſſimè media proportionalis inter radium & peripheriam. Verum talia demonſtrari poſſe geometrice ab humano ingenio non puto. Reſtat itaque, ut dicamus Dominum HOLLANDERUM *a poſteriori* rem aggreſſum eſſe, & tentando plures Regulas tandem in aliquam incidiſſe, quæ cum obſervationibus quamproxime conſentit. Sed ſi hoc eſt, quis genius illum duxit ad ſumendum medium proportionale inter radium & peripheriam, ad habendam ſecantem complementi obliquitatis quæſitæ? Cur non potius in alias incidit Regulas, quæ forte magis obviæ fuiſſent? Et ita in aliis.

Dominus *Marchio* HOSPITALIUS mihi ſcripſit, ſe a Te intellexiſſe, me in Tuas partes tranſiiſſe circa æſtimationem virium: an verum ſit? ſe enim non poſſe credere, quod communem ſententiam deſeruerim. Reſcripſi, imo maxime verum eſſe, & obtuli ipſi, ſi velit, excerpta quædam ex mutuis noſtris litteris, ut plene videat rationes quæ me eo adigerunt: me non dubitare, quin ſi illas ſerio ſit perpenſurus, mecum fiat transfuga, & erroneam partem relinquat. Hiſce, Vale & Fave,

Ampl. Tuæ

Groningæ 15. Auguſt. 1696.

Ded. J. BERNOULLI.

EPIS-

EPISTOLA XXXII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Problemate Brachyſtochronæ. De Synchrona & Trajectoriis Orthogonalibus. De NEWTONO. *De* GREGORII *Elementis Dioptricæ & Catoptricæ. De Axiomatibus demonſtrandis. De* HOLLANDERI *Amalthæo aſtronomico.*

Vir Celeberrime, Fautor & Amice Honoratiſſime.

EX Tuis noviſſimis video me oblitum addere meis fragmentum Menſis *Julii Lipſienſis*; id ergo nunc mitto, & vel ideo reſpondere feſtino. Fragmentum hoc retinere potes, cum totum interim *Julium*, una cum *Junio*, in nundinis acceperim, & quia ſuſpicor *Junium* nondum ad Te perveniſſe, mittam plagulam ad Mathematica ſpectantem, ubi *Hanoveram* reverſus fuero; nam inter ſchedas mecum huc allatas, præter ſpem, non reperio: videbis Dominum MENCKENIUM, deſiderio tuo ſatisfeciſſe. *1696 Auguſt.*

Ubi primum Problema Tuum acceperam, aliquam ejus mentionem injeceram in Litteris ad amicos *Italos* eo ipſo tempore miſſis; ſed poſtea rem diſtinctius illis expoſui, addidique recte facturos, ſi in *Diario* ſuo mentionem ejus fieri curarent. Idem apud *Gallos* faciam, quia probas. Video ex *Junio* Te pariter, & Dominum *Fratrem* Tuum * quædam in nuperis TSCHIRNHAUSIANIS notaſſe, & *Fratrem* quidem, ita ut eum etiam provocare videatur; non tamen ſine aliqua verborum humanitate.

De ambabus ſolutionibus Tuis edendis ſtatues quod e re videbitur;

* Jac. BERN. *Obſervatiuncula ad ea, quæ nupero Menſe Novembri de dimenſionibus curvarum publicata leguntur, Auctore D. T.* Act. Er. 1696. Jun. p. 260. Opp. N°. 69. p. 722.

Digitized by Google

1696 Auguſt. bitur; nolim enim conſilii mei rationem habeas, ultra quam Tibi commodum erit. Meritiſſimis laudibus Tuis ego nunquam intercedam, ſed præco ſemper ero maximus. Methodum illam poſteriorem diſtuliſſem adhuc nonnihil, ſi Tuo eſſem loco; vel ideo, quia latius patet, ne ſcilicet ſtatim fontes illis indicentur, qui poſtea ſupprimunt indicatos, aut in rivos ſuos avertunt. Ego mea ſolutione paucis verbis defungar; tantum enim dicam, inſigni veritatis indicio nos eamdem reperiſſe lineam, etſi ego conſtructionem ejus aliquam reperiſſe contentus, primariam a qua denominatur non animadverterim, quæ laus in ſolidum Tua eſt; quanquam ſi vidiſſem ego Problematis Tui propoſitionem, qualis *Junio* fuit inſerta, fuiſſem haud dubie ulterius progreſſurus, & fortaſſe etiam receptum nomen deprehenſurus. Habebam eamdem, quam Tu ponis, æquationem differentialem, quam revocare poteram ad eam quam in *Actis* aſſignaveram olim Cycloïdi; ſed talia nunc animo minus obverſantur. Commune quidem hoc videbam Optico & noſtro Problemati, quod utrobique quæritur via facillima, ſed cum in Optico motus uniformis per ſe a medio variationem acciperet, hic acceleratus eſſet; ego, alioqui nihil aliud quam utcunque defungi cupiens, non ultra contuli. Cæterum, calculum faciens, ordine nactus ſum eas proprietates, quas Tibi tranſcripſi; & putem ſimilem viam & in aliis circa maxima profore.

Non memini amplius, quid Tibi ſcripſerim olim * de Methodo mea, pro invenienda perpendiculari ad curvas ordinatim poſitione datas; quam pro tranſcendentibus valere negas; rogoque ut indices, in quo conſiſtat. Saltem accommodari poterit ad tranſcendentes curvas æquatione exponentialiter percurrente datas. Et ſane has earum expreſſiones ſemper pro perfectiſſimis habui. Expreſſiones *percurrentes* apud me ſunt ut genus; *exponentiales* vero ſunt perfectiſſimæ earum ſpecies.

Ad ſynchronam Tuam, & ad omnibus Logarithmicis perpendicularem non eſt quod me voces: perpulchras eſſe non nego, & Te dignas ſpeculationes, ſed cogor eas a Te potius quam a me ſperare.

* Epiſt. VI.

Digitized by Google

rare. Scis me, nonniſi vi quadam pellaci, Problematis Tui prioris coactum, ad ejus Solutionem tentandam acceſſiſſe; ſed ſæpe hoc facere non poſſum: quod agnoſceres, credo, ſi coram videres, quæ mihi ſunt agenda toto Cælo diverſa ab iſtis. Et nunc etiam plura acceſſere, ex quo Sereniſſimus Elector me inter Conſiliarios ſtatus, quos vocant *Conſeillers privés*, recipi juſſit; quia ſæpe ad me deferuntur quæ pertinent ad jura domus, aliaque publica negotia. 1696 Auguſt.

De Nieuwentitio ex vero opinor judicas, melius facturum, ſi agnoſcat candide in quo peccavit, quam ſi palliando errorem utriuſque laudis jacturam faciat, recti judicii & animi boni. Sperabam de eo meliora; eo enim ſum ingenio, ut de omnibus, qua licet, optima ſentiam. . . . .

Quoniam ſpem excurrendi ad nos facis, ſpero nos aliquando coram facilius defuncturos toto illo negotio de explicanda gravium acceleratione; id enim per litteras præſtare laborioſius eſſe video, dum ſæpe ad priora recurrere neceſſe eſt; & ſubinde alter ab alterius ſenſu aberrat, ut ſolet fieri in talibus, ubi nondum ſatis ſtabilitas habemus formulas loquendi. Summæ mihi voluptati erit Tuus ad nos acceſſus; nec magnum adeo locorum intervallum eſt. Illud peto, ut antea conſilii Tui certiorem me facias; ne tunc forte domo abſim; ſæpe enim cogor excurrere, in vicinas præſertim aulas, *Cellenſem* & *Guelferbytanam*; cum ſubinde agenda ſunt mihi, quæ ad totam Domum *Brunſwicenſem* pertinent. Quod ſi præmonitus ſim, nihil conſpectu Tuo antiquius habebo.

Quædam in Vallisio a Te notata non animadverteram, cum omnia attente ſatis legere non vacarit. Verum eſt me Domino Newtono, ante viginti annos, meæ Methodi differentialis fundamenta communicaſſe, antequam ille mihi quicquam de ſuis huc ſpectantibus. An nonnihil inde profecerit haud ſatis ſcio: neque ideo dicere auſim: Interea præclara illum jam tum habuiſſe facile crediderim, procedente tempore, ut fieri ſolet, magis expolita.

Grata ſunt quæ de Domino Fullenio indicas; unde judicare licet, Virum eſſe non tantum doctum, ſed & bonum........

Digitized by Google

1696 Auguſt. Tractatum *Davidis* GREGORII Catoptrico-Dioptricum † accepi; totus innititur principio a me indicato de circulis oſculantibus in locum curvarum, ut ita dicam, appropriatarum ſubſtituendis. Et tamen vel mei, ea in re, vel etiam circulorum oſculantium mentionem nullam fecit. Id moneri aliquando in *Actis* non inutile erit, ſine ulla tamen diſplicentiæ ſignificatione, & malim ab alio fieri, quam a me ipſo.

Quod dixi, omnis Axiomatis a me demonſtrationem deſiderari, non temere dictum eſt; idque animadvertes opinor; ſi quando vacabit inſpicere meditationes quaſdam meas de ideis, quæ extant in *Lipſienſium Actis*. * Excipio tamen Axiomata illa, quæ ſunt indemonſtrabilia, ipſas ſcilicet identicas propoſitiones. Cætera omnia, quæ ſcilicet poſſunt demonſtrari, etiam utile eſt demonſtrari, cum aliqua magni momenti Theoremata in iis fundantur. Idque etiam Veteres viderunt. Unde APOLLONIUS [in ſcriptis deperditis,] & PROCLUS, & alii Axiomata ab EUCLIDE aſſumta demonſtrare ſunt conati. Eamque rem fructu non carere facile opinor concedes, quem tamen non vident, qui ſcientiarum utilitatem vulgari modulo metiuntur. Interim vides, ea limitatione, quam addidi & quam addendam eſſe præviderі poterat, non eſſe cur progreſſum in infinitum vereare in demonſtrando.

Unum addo multum apud me intereſſe inter hæc duo, in dubium vocare propoſitionem, & demonſtrationem ejus expetere; quod dum a Te hic pro eodem habetur, hinc jam video, cur quæ dixeram de Axiomatibus demonſtrandis mira Tibi ſint viſa. Si CARTESIUS hoc tantum voluiſſet, cum de omnibus dubitandum dixit, quod ego deſidero, nullo jure reprehenderetur; ſed ille dupliciter peccavit, nimis dubitando, & nimis facile a dubitatione diſcedendo. Illud ipſum, quod objicis Axioma, *Totum eſſe majus parte*, opportune a Te affertur. Id certe nunquam in dubium vocavi, & tamen aliquando demonſtrationem ejus expetii, imo inveni, uno ſyllogiſmo comprehenſam, innixo definitioni minoris & majoris & Axio-

† Catoptricæ & Dioptricæ ſphæricæ Elementa. Auct. *Davide* GREGORIO M.D. Aſtron. Prof. Saviliano Oxoniæ, & S. R. S. *Oxon.* 1695. 8°.

* *Meditationes de Cognitione, Veritate, & Ideis*, per G. G. L. Act. Erud. 1684. Nov. pag. 537.

Axiomati identico: *Minus* enim definio, quod alterius [*majoris*] parti æquale eſt. Axioma autem identicum quod adhibeo eſt, *Unumquodque æquale eſſe ſibi ipſi*, ſeu $a = a$. Hoc enim tanquam indemonſtrabile ſumo. Sic ergo argumentor in ſyllogiſmo primæ figuræ. 1696 Auguſt.

Quidquid eſt æquale parti totius, id toto minus eſt,

per Definitionem Minoris.

Pars totius eſt æqualis parti totius,

nempe ſibi ipſi, per Axioma identicum,

Ergo pars totius toto minor eſt. *Quod erat demonſtrandum.*

Ita vides, quomodo omnium demonſtrationum a priori duo ſint principia ultima, definitiones, & Propoſitiones indenticæ; quod etiam alibi a me notatum eſt. Atque hæc paulo latius deducere operæ pretium putavi, ut pro æquitate Tua facilius me abſolvas in poſterum, ſi qua forte dicam obiter, quæ primo aſpectu inſubidiora videbuntur, aut ſpeciem ſubterfugii habebunt, cum nihil ſint minus.

Dnum. Hollanderum, [vel ut Dominus *Frater* tuus ſuſpicatur Dnum. Spleissium] a poſteriori ut vocant, illum mirabilem obliquitatis Eclypticæ Terræ cum tetragoniſmo conſenſum animadvertiſſe nullus dubito. Si idem eſſet in cæteris Planetis, major ſpes foret rationis aliquando deprehendendæ. Interim pulcherrima illa, &, ut ſic dicam, fortunata animadverſio eſt. Nam quantacunque ſagacitas, niſi a fortuna adjuta, hoc non dediſſet. Puto numeros varios tractantem caſu aliquando conſenſum inter hæc tam remota notaſſe.

Problematis circa æquationem differentialem, a Domino *Fratre* tuo propoſiti Solutionem ſtatim dedi, & Te quoque poſſe non dubito, ſi, quod inutile eſt, actum agere velis.

Perplacet, quod Dno. *Marchioni* Hospitalio reſpondiſti, Te, caſtris receptæ in Dynamicis ſententiæ deſertis, ad meam tranſiiſſe. Ea enim res ipſius curioſitatem haud dubie excitabit; præſertim cum ἀκρίβειαν Tuam in aliis jam ſit expertus: in Tua etiam poteſtate eſt communicare ipſi, ex noſtris amœbeis, quæ voles....

Si vis ut *Italis Galliſ*que aliquod ſpatium relinquatur examinandi

1696 Auguſt. Problematis Tui, ne anſam habeant excuſandi ſe ſe, prorogandus nonnihil terminus erit. Nam in *Gallia*, vix ante Novembrem Problema inſeri *Diario* poterit, quia nunc ſunt *Vacantiæ*, quas vocant, ſive Feriæ Vindemiales. Quid ergo, ſi expectes uſque ad finem Anni a prima publicatione *Lipſienſi* computati, id eſt ad Junium Anni ſequentis? Ego interim a Domino *Fratre* Tuo petam, ut ſi forte inveniat, nonniſi nobiſcum publicet, ut appareat quid aliorum Methodi poſſint.

23. Auguſt. 1696.

Deditiſſimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

EPISTOLA XXXIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Solutio Problematis Fraterni.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime Fautor Honoratiſſime.

1696 Auguſt. EX quo nuperas [ad quas reſponſionem exſpecto] ad Te dedi, venerunt mihi poſteriores Actorum menſes, uſque ad *Junium* incluſive, a Domino MENCKENIO tranſmiſſi. Luſtrando occurrerunt & Tua † & *Fratris*............................ Cum videam Te ipſum non dedignatum fuiſſe Fraterno Problemati vacare, effecit ut & ego tentarem quid humeri valerent, & ecce intra ſemiquadrantem horæ nodum hunc Gordium ſolvi, ...
&

† G. G. L. *Notatiuncula ad* Acta Decemb. 1695. & *Acta Erud.* 1696. Mart pag. 145. vel Jac. BERN. Opp. N°. 72. pag. 728.

& quidem illico perveni ad formulam Tuam, ad quam æquationem propoſitam Te reduxiſſe ais in Menſe *Maio*. Ut enim poteſtas n deprimatur, ponendum eſt $y^n = v^{n:(1-n)}$, unde propoſita $ady = ypdx + by^n qdx$, mutatur in hanc $\frac{1}{1-n} adv = vpdx + bqdx$, quæ Tuæ formulæ omnino reſpondet, & quæ adhuc reſolvenda eſt. Interim hac depreſſione poteſtatis non opus habeo: immediate enim attingo ſcopum; ponendo $y = mz$, ideoque $dy = mdz + zdm$, quibus ſubſtitutis in æquatione propoſita habebitur $azdm + amdz = mzpdx + bm^n z^n qdx$. Nunc ut hæc æquatio quatuor terminorum ad duos redigatur, pono $amdz = mzpdx$, id eſt $adz : z = pdx$; unde poteſt haberi z per x, aut algebraïce aut ſaltem tranſcendenter, eſto itaque $z = X$, per majuſcula X, $[X]$, &c. intelligo quantitates diverſas utcunque datas per indeterminatam x, & conſtantes. Quoniam vero deſtructis $amdz$ & $mzpdx$, in æquatione tranſmutata, remanet $azdm = bm^n z^n qdx$, ſeu ſubrogato valore ipſius z, $a\overset{1}{X}dm = bm^n \overset{4}{X}{}^n qdx$, ideſt, $m^{-n} dm = \frac{b}{a} X^{n-1} qdx$, unde etiam habetur m, per x, nimirum $\frac{1}{-n+1} m^{-n+1} = \frac{b}{a} \int X^{n-1} qdx$. Sit igitur $m = [X]$, adeoque $y(zm) = X[X]$, & ſic habetur y, vel algebraïce, vel tranſcendenter per x. Sunt enim X, $[X]$, quantitates pure dependentes ab x & conſtantibus. *Q. E. I.* 1696 Auguſt.

En totius arcani ſolutionem; neſcio quidem quouſque cum Fraterna conſpiret, ideoque ſchediaſma illud, quod jam in ultimis tuis mihi debebat eſſe tranſmiſſum avide exſpecto. Optarim, ut excerpta ex his litteris cum Tuis, quæ forte edenda habes *Lipſiam* mittas *Actis* inſerenda. . . . .

Super alia, quæ in hiſce *Actorum* Menſibus obſervavi, proxime

me ſcribam, nunc plura adjicere non vacat, niſi ut Te valere jubeam quam optime & amare quem noſti ex mente & manu,

Amplitudinis Tuæ

Groningæ raptim 25. Aug. 1696.

Devotiſſimum

J. Bernoulli.

EPISTOLA XXXIV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad Epist. XXXII.

Gratulatio ob Conſiliarii munus. Quales curvæ in ſe redeuntes poſſint rectificari. Error Tschirnhausii. *De progreſſionis harmonicæ ſummatione compendiaria. De annotationibus* Hugenianis *ad* Acta Erud. *De Probl. Brachyſtochronæ & Trajectoriis Orthogonalibus.* Gregorii *Tractatus Catoptrico-Dioptricus. De Axiomatum demonſtratione.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1696 Septemb. UNde melius exordiar quam ſtatim a limine tibi gratulando inſignem, qua mactaris à Sereniſſimo Tuo Electore dignitatem, quaque altius contendere nequis? ita tamen ut Te moneam noſtrorum Mathematum non penitus obliviſci, ut fere in poſtremis Tuis inſinuare videris, ne nobis anſam præbeas indolendi magis quam Tecum lætandi. Non nego, licet non coram videns, multorum & gravium Te ſubiiſſe negotiorum jugum, in quorum minimo plus ſitum eſt quam in ſolutione omnium Problematum Catenariorum, Iſochronorum, Tachyſtoptotorum &c. ſed quid eſt, quod magis recreabit animum, ſeriis occupationibus & innumerarum rerum agendarum

darum moleſtiis tantum non ſuccumbentem, quam jucundæ meditationes mathematicæ. Siſte Tibi ipſius Julii Cæsaris exemplum, quem *media inter prælia ſemper Stellarum cælique plagis ſuperis vacaſſe.* 1696 Septemb.

Lucanus refert. Gratias ago pro tranſmiſſo Fragmento *Julii Actor. Lipſ.* Litteræ Tuæ, quod miror, cum illas acciperem, erant vetuſtæ 12 dies. Non eſt quod mittas mihi plagulam ex *Junio*; accepi enim hunc menſem ut videris ex ultimis meis, in quibus mittebam ſolutionem meam Problematis fraterni..............................
Optime ipſi objeciſti * dari curvas in ſe redeuntes algebraïcas, quæ rectificationem admittunt, & præter illas ex Cycloïdalium genere reperio ego infinitas alias; exempli gratia, omnes cauſticæ & omnes evolutæ curvarum algebraïcarum in ſe redeuntium, & ipſæ ſemper ſunt algebraïcæ in ſe redeuntes, & ſimul rectificabiles. Putat quidem *Frater* ſe cauſam ſui erroris detexiſſe, ſed minime. Ego quidem me determinare poſſe credo, quando poſſunt eſſe rectificabiles & quando non poſſunt; puto enim curvas illas in ſe redeuntes, quæ nullum habent punctum, quod ego voco reflexus, [*point de rebrouſſement*] non eſſe rectificabiles, ut curvas (*Fig.* 44.) A; TAB. VIII. illas vero quæ habent unum plurave puncta reflexus poſſe interdum rectificari, ut B; Ratio prioris eſt, quia evolvendo lineam A progeneratur ſpiralis infinitorum circuituum, quæ quia à linea recta in infinitis punctis ſecari poteſt, ſemper erit tranſcendens, & proinde ipſa linea A non poterit rectificari; alias Spiralis illa, quæ ex evolutione deſcribitur, foret algebraïca, quod eſt impoſſibile; Ratio vero poſterioris eſt, quia, licet curva B ſit etiam in ſe rediens, curva tamen, quæ ex evolutione provenit, non eſt ſpiralis, ſed ob punctum reflexus, etiam in ſe redit; hinc cum nihil impediat, quominus hæc poſſit eſſe Algebraïca, etiam nihil impedit quominus curva B poſſit eſſe rectificabilis. Et revera hoc ita ſe ſe habere in Circulo & Epycycloïde per ſe patet; illum enim evolvendo deſcribitur Spiralis infinitorum gyrorum; hæc autem ſui evolutione dat aliam Epicycloïdem, ſed inverſam; quod utrumque hic per curvas punctatas notavi: Et ob hanc rationem puto, cur Circulus, aliæque

* Act. Erud. 1696. p. 146. vel Jac. Bern. Opp. N°. 71. pag. 729.

1696 Septemb. aliæque curvæ in ſe redeuntes, quæ nullum habent reflexum, non ſint *indefinite* rectificabiles; Dic quæſo an aliquid in contrarium habeas. Addo *indefinite*, nam ut ipſe contra Dominum Tschirnhausium perbene notaſti, dari aliquas figuras quoad certas partes quadrabiles, indefinite tamen inquadrabiles; idem & ego de rectificatione curvarum ſtatuo. Animadvertit quidem Dominus Tschirnhausius, † & quidem recte in exemplo, quod ipſi in eam rem propoſueras, * præter illam figuræ partem, quam Tu obſervaveras quadrabilem, infinitas alias eſſe partes, quæ admittunt Quadraturam; ſed ut ipſe fatetur, infinitum non eſt indefinitum; habet enim infinitas partes quadrabiles, ſed etiam infinitas non quadrabiles. Miror autem, quod exinde inferre voluerit Dominus Tschirnhausius, omnes figuras algebraïcas, aut nullam, aut infinitas habere partes quadrabiles; omnes figuras autem tranſcendentes, aut nullam, aut duas, aut tres &c. non vero infinitas [niſi ipſa ſit indefinite quadrabilis] habere partes quadrabiles; quod utrumque veritati adverſatur; poſſum enim exhibere curvas algebraïcas, in quibus oſtendo, præter unicam quadrabilem partem, nullam aliam eſſe; & contra habeo curvas tranſcendentes, quæ ut ut indefinite non quadrabiles, infinitas tamen habent partes quadraturam admittentes: in quarum cenſu eſt ipſa Cycloïs primaria, quam ille in Exemplum adhibuit; in qua methodum habeo determinandi infinitas partes, meris rectis & portionibus curvæ cycloïdalis comprehenſas, quadrabiles; id quod hactenus nemo præſtitit. Duæ enim hactenus tantum innotuerunt, una *Hugeniana*, quæ æqualis eſt ſemihexagono circulo genitori inſcriptæ; & altera, neſcio a quo inventa, quæ æquatur ſemiquadrato radii. . . . .

Quod Tu menſe *Martio* agnoſcis, Navem quieſcentem ab eodem vento fortius impelli quam procedentem, & ego agnoſco, ſi venti celeritas finitam habeat rationem ad celeritatem navis; alias ſi ratio ſtatuatur infinita, dico ego ſemper æque fortiter navem impelli; ſed, ſecundum Tuum materiæ gravificæ actionem explicandi modum, procedens Navis fortius impellitur quam quieſcens. Mitto

† Act. Erud. 1687. Sept. pag. 526.
* Act. Erud. 1684. Mai. pag. 235, & Dec. p. 865, *nec non* 1686. Jun. p. 293.

Mitto ego Notas *Hugenianas*, quas in reliquis *Actorum* Tomis reperi: videbis ab initio Hugenium idem quod olim a Te petebam ſciſcitari, compendium ſcilicet ſummandi progreſſionem harmonicam terminorum numero finitorum; mihi quidem roganti reſcripſeras nec Tibi hoc compendium notum eſſe; quia autem tum temporis hujus loci in *Actis* non recordabar, nunc commode incidit, ut inſtantiam faciam, quomodo ergo interpretanda ſint hæc tua verba, *quotcunque terminorum numero finitorum progreſſionis harmonicæ ſumma compendio aliquo iniri poteſt.* Occurrerunt quædam partim plumbagine confuſe ſcripta, partim a Bibliopega a margine reſecta, quæ non probe legere poteram. Nonnunquam alios reprehendens ipſe maxime fallitur; exempli gratia, cum contra D. T. aſſerit non ſolum infinitarum, ſed omnium Lunulæ *Hippocraticæ* partium haberi quadraturas; falſiſſimum eſt: haberetur enim quadratura ipſius Circuli, ſi omnes partes Lunulæ eſſent quadrabiles. Videbis etiam, quem in Tuis caſtris totum putabas, quouſque novæ opinioni de æſtimatione virium aſtipulatus fuerit: tunc tantum ſcilicet, quando agebatur de viribus, ut vocat, aſcenſionalibus: ſed quis tam abſonam limitationem à tanto Viro profectam putet. 1696 Septemb.

Verum eſt *Fratrem*, & me, eadem fere in *Tſchirnauſianis* notaſſe; non tamen animadvertit quod ego; quod ſcilicet modus abſcindendi portiones a curva parabolica in data ratione dependeat a rectificatione ipſius curvæ parabolicæ. . . . . Quid Tibi videtur de curvis illis, quas neque per *Carteſianam*, neque per infinitorum Geometriam determinari poſſe oſtendo §: Habebunt hic vulgaris Geometriæ amatores novam ſpeculandi materiam.

Recte ſentis, poſterior mea Methodus Brachyſtochronam ſolvendi, quam late patere dicis, non ſtatim vulganda eſt; donec Mathematici ſuas ſolutiones exhibuerint, aut hæc non adeo levia eſſe ingenue profeſſi fuerint. Non dubito, quin ſi vidiſſes Problematis mei propoſitionem, ut in *Actis* extat, ſtatim fuiſſes nomen curvæ deprehenſurus; quod enim dixi eſſe curvam Geometris notiſſimam,

 hoc

§ Act. Erud. 1696. Jun. p. 264. & ſeq. *vel* Opp. Tom. I. N°. XXX. p. 155.

Digitized by Google

1696 Septemb. hoc illi, qui ſolverit Problema, quod Tu ſolviſti, anſam præbebit ulterius inquirere in nomen curvæ. Non ita mihi ſum ignotus, ut non intelligam aliena maxime & diverſiſſima Tibi agenda eſſe, quæ prohibeant, quominus Problematibus meis vacare poſſis; ſed nec adeo iniquus ſum, ut id a Te exigam, niſi vacuo omnibus negotiis gravioribus.

En, quia petis, propria verba, quæ mihi olim ſcripſeras de methodo pro invenienda perpendiculari ad curvas ordinatim poſitione datas; Tenta an quid faciant pro ſynchrona, & omnibus Logarithmicis perpendiculari D. $\frac{6}{19}$ 10*bris* 1694. „ Pene exciderat problema inveniendi curvam, quæ ordinatim poſitione datis occurrat ad angulos rectos. Cujus methodus, meo judicio, conſiſtit in duabus æquationibus, una continente relationem inter x & y, & conſtantem quamdam in curva poſitione data, ſed pro diverſis talibus ordinatim datis variabilem b; altera continente valorem ipſius $dy : dx$ in curva quæſita, expreſſam ex proprietate perpendicularium in curva poſitione data; cujus æquationis ope datur ipſius b valor per dy, dx, y, x, pro re nata; quarum duarum æquationum ope tollendo b, habetur æquatio differentialis primi gradus pro reliquis inter x & y “.

. . . .

Lubentiſſime in me ſuſcipiam quod moneri velles in *Actis* circa Tractatum *Davidis* GREGORII Catoptrico-Dioptricum: ſed cum Tractatum hunc non viderim, nec forte videre contingat; explicari mihi vellem principium illud a Te indicatum de circulis oſculantibus in locum curvarum appropriatarum ſubſtituendis, & quid proprie monitum cuperes; facit utique mentionem circulorum oſculantium, ut videre eſt ex excerptis, quorum portio quædam extat ad finem Schediaſmatis Fraterni mihi tranſmiſſi.

Et ego ita putavi Dominum HOLLANDERUM, Virum ſane eruditum & generoſum, a poſteriori incidiſſe varios numeros tractantem in conſenſum circuli tetragoniſmi & obliquitatis Eclypticæ. ſed hoc non unicum eſt: complura hujus modi alia habet, quæ omnia forte fortuna tantum detexiſſe, vix eſt ut dici poſſit.

Jure

Digitized by Google

Jure diſtinguis inter in dubium vocare propoſitionem & demonſtrationem ejus expetere. Credo & Cartesii ſenſum ita fuiſſe, quamvis non ita expreſſerit: non enim dubitavit de Dei exiſtentia, ſed ſuppoſuit non exiſtere. Specioſe quidem Axioma, *Totum majus eſſe ſua parte*, demonſtrare conaris; ſed annon & aliquis ſyllogiſmi, quo uteris, primæ figuræ probitatem eſſe demonſtrandam urgere poſſet? Omnes enim ſyllogiſmi recte concludentes eo nituntur principio, ut minor terminus alligetur, vel ſeparetur a majori, ope medii termini ad minimum ſemel univerſaliter ſumti. Unde tritum illud, *Quæ eidem tertio conveniunt, illa inter ſe conveniunt*, quod idem eſt, quam illud apud Geometras uſitatum, *Quæ eidem ſunt æqualia, illa inter ſe ſunt æqualia*: Hoc ergo Axioma, vel huic affine ſupponendum eſt, ut ſyllogiſmus recte concludere dicatur. Quæro autem an hoc clarius ſit, quam illud quod demonſtrandum ſuſcipis. 1696 Sept.

Ecce quid ad oblationem meam Dominus *Marchio* Hospitalius reſponderit, in litteris heſterno curſore acceptis. *Je vous ſuis obligé de l'offre que vous me faites de me donner part de vos Objections au ſyſtème de Monſieur* Leibnitz, *pour l'eſtime de la force & de ſes réponſes; cependant je vous prie de reſerver cette bonne volonté pour un autre tems, lorſque j'examinerai cette matiére à fond, qui me paroit des plus importantes pour la Phyſique.......* Conſentio ut proroges Terminum pro ſolutione Problematis mei conceſſum ad finem ſequentis ſemeſtris...... Vale & fave,

Ampl. Tuæ

Devotiſſimo
J. Bernoulli.

EPISTOLA XXXV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De notis Hugenianis. *De curvis rectificabilibus & quadrabilibus. De Curvis ex plurium punctorum relatione determinandis. Varia.*

Vir Nobiliſſime & Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1696 Octob. PRo communicatis reliquis *Hugenianis* maximas ago gratias. Non is ſum qui negem mea aliquando poſſe emendari. Interim, ni fallor, interdum judicavit feſtinantius. Quæ ipſi diſplicuit demonſtratio meæ Iſochronæ, * ejus me eo minus pœnitet, quod, quantum ex Domini *Fratris* Tui ſchediaſmatis intelligo, ejus occaſione Calculi differentialis verum uſum perſpexiſtis. Et ipſe, ſtudio, Analyſeos filo accommodaveram. Etiam amicus quidam *Florentinus* ejus auxilio nonnihil in noſtra penetravit. Quia approbas, ſcripſi ad *Italos* & *Gallos*, ut Paſcha proximum pro termino ſolutionum ſtatuatur.

. . . .

Vellem Methodum tractoriam applicari potius ad inverſa tangentium, quam ad Quadraturas, ubi jam habemus.

Non diſplicet limitatio Tua, † & in univerſum videtur dici poſſe, omnem lineam quæ a linea algebraïca in infinitis punctis ſecari poteſt non eſſe algebraïcam.

Exemplum, quod Domino Tschyrnhausio propoſueram pro inſtantia, § ſumpſeram ex Lunula Hippocratis, ordinatis ejus ad

* G. G. L. *De linea Iſochrona in qua grave ſine acceleratione deſcendit.* Act. Erud. 1689. apr. pag. 195.

† *De curvis in ſe redeuntibus & tamen rectificabilibus.*

§ Act. Erud. 1684, Mai. pag. 231, & Dec. pag. 865. nec non. 1686. Jun. pag. 293.

Digitized by Google

ad axem applicatis, ubi prodibit curva, cujus æquationem notaveram. Hæſit diu, donec multo poſt tempore Lunulam forte tractans, ut apparet ex ejus ſchediaſmate, * rem deprehendit; ex Analyſi credo non facile detecturus. Illud manifeſtum puto, nondum nos, ex eo quod curvæ algebraïcæ ſegmentum vel ſemiſegmentum [id eſt, portio curvæ arcu uno & recta, vel rectis comprehenſa] quadrari poteſt, concludere poſſe, quod curva indefinite quadrari poteſt. Imo ne illud quidem confectum puto, quod Dominus Tschirnhausius ſui excuſandi cauſa attulit, ubi datur una talis quadratura dari infinitas. Et fortaſſe excogitari poſſent inſtantiæ, ubi ſudandum eſſet pro tali infinitorum ſegmentorum quadratura inveniendâ. *1696 Octob.*

Circa ſummam progreſſionis harmonicæ vereor ne ſim deceptus.

Quod illas attinet curvas, quæ ex plurium punctorum curvæ inter ſe relatione determinantur, notavi ex Cartesii litteris idem etiam moviſſe Fermatium; ſed Cartesium in reſponſione rem non attigiſſe. Ego nonnihil de talibus, ſed alio quodam modo cogitavi, de quibus alias; nunc feſtinantiſſimus iſta ſcribo, currumque inſcenſurus. Nolui autem differre hanc ſcriptionem, ut *Menckenianam* mature exciperes. Neſcio an curvam determinaveris, quam aliis relinquis determinandam.

Placet, quod ſcribis Dominum Hollanderum eo eſſe ingenio, ut illa pulchra inventa ab ipſomet profecta cenſeri poſſint.

Syllogiſmi primæ figuræ probitas demonſtrari omnino poteſt, independenter a veritate hujus Axiomatis, quod Totum ſit majus ſua parte; ut in ea re nullus ſit circulus timendus.

Domini *Marchionis* Hospitalii Opus expecto, ſed a Te, *Lipſienſibus* credo nundinis, demum habebo. Nunc vale & litteris deproperatis ignoſce.

Dabam *Hanoveræ* 6°. 8br. 1696.

Deditiſſimus
G. G. Leibnitius.

* Acta Erud. 1687. Sept. pag. 526.

EPIS-

Digitized by Google

EPISTOLA XXXVI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De HUGENII *annotationibus ad* NEWTONUM. *De quadraturis. De Trajectoria orthogonali logarithmicarum.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1696 Octob. NOn eſt cur Te moveat HUGENII feſtinatum judicium; non enim ſtatim emendanda ſunt, quæ ipſi diſplicuerunt; ipſe potius multa multis in locis habet, quæ correctionem admitterent. Nuper hac tranſiens *Wiſmarienſis* quidam promiſit, ſe mihi miſſurum aliquod Manuſcriptum HUGENII, in auctione ipſius librorum coëmptum, cum NEWTONI Tractatu, cui Manuſcripto titulus eſſet NEWTONI *Errores*; quod ſi obtinuero, Tibi, ſi illud deſideras, tranſcribi curabo, aut ſi nimis fuerit prolixum, principaliora mittam excerpta.

Quod ad *Italos* & *Gallos* ſcripſeris propter Problema meum, gratias ago magnas; per haſce incluſas rogo Dominum MENCKENIUM, ut prorogationem termini etiam in *Actis* publicet, niſi, Te monente, id jam fecerit. Scire percuperem, quid *Frater* meus de hoc Problemate ſtatuat, & an illud ſolverit. Dominus MENCKENIUS ſcribit, ſe quid in *Actis* inſerendum ab ipſo accepiſſe, de complanatione ſuperficierum conoidæarum & ſphæroidearum, conferendum cum meis nupero *Junio* exhibitis, * gratum eſſet mature intelligere quid id ſit; ſaltem nec ipſe, nec alius, Problematis mei ſolutionem hactenus MENCKENIO miſit. Nihil attigiſti in noviſſimis Tuis, an penultimas meas acceperis, per quas Tibi miſeram ſolutionem æquationis differentialis à *Fratre* propoſitæ. Miror

* Jac. BERNOULLI *Complanatio ſuperficierum Conoidæarum & Sphæroidicarum.* Acta Erud. 1696. Oct. p. 479. & Opp. N°. 73. p. 739.

Miror Dominum TSCHIRNHAUSIUM diu hæſiſſe in ſolvendo 1696
exemplo, quod ipſi pro inſtantia propoſueras; cum tamen olim Octob.
Pariſiis ego ſemi-hora, poſtquam illud mihi propoſuiſſet Dominus *Marchio* HOSPITALIUS, eodem præſente, Quadraturam principalem, cœterasque poſſibiles ex Analyſi determinaverim, idque ſine interventu Lunulæ HIPPOCRATIS, de qua ne cogitabam quidem, atque illa occaſione jam tum reperi, quod in ultimis meis ad Te notavi, dari curvas, in quibus TSCHIRNHAUSII excuſatio plane nullum locum obtinet, utpote in quibus, præter unicum ſpatium quadrabile, nullum aliud eſſe demonſtro. Et ſic jam excogitavi inſtantias, quas excogitari poſſe dicis.

Non animadverti locum in *Epiſtolis* CARTESII, ubi FERMATIUM de curvis illis, quæ ex relatione punctorum in curvâ determinantur, aliquid habere, dicis. Rogo ut mihi indices hunc locum. Si id mihi innotuiſſet, procul-dubio mentionem injeciſſem, eoque magis quod, ut ais, CARTESIUS in reſponſione rem non attigerit; unde ipſius methodi infirmitas luculentius conſtitiſſet: Gratiſſimum erit Tua quondam cogitata de hiſce percipere. Curvæ, quam aliis determinandam relinquo, memet ipſum nondum ſatis applicui; ſi non æquationem finitam, ſaltem Seriem pro illa me exhibere poſſe puto.

Cum Te continuis negotiis obrutum videam, quæ impediunt quominus vacare poſſis Problemati de invenienda curva omnibus Logarithmicis normali, lubens nunc te hoc labore levabo. Eſto (*Fig.* 45.) AB axis communis omnium logarithmicarum CD, Cd, TAB. VIII.
ex puncto C eductarum; determinanda eſt curva Dd omnibus CD, Cd normalis. Poſitis coordinatis AB, BD, x, y, & CA, a. Concipiatur ad lubitum determinata quædam logarithmica CE ad quam cæteræ referendæ ſunt. Sit illa, facilioris calculi gratia talis, ut ipſius ſubtangens ſit æqualis ipſi CA, ſeu a. Jam ex puncto quovis curvæ quæſitæ D, ductam intellige DE, parallelam BA; quæ ſecet aſſumptam logarithmicam in E; ex quo ſi ducatur EF, deſignabit AF Logarithmum ipſius EF, ſeu DB, ſeu y. Nunc ob normalitatem Dd, ad CD, erit generaliter $dx : -dy :: BD : BG$, ſub-

1696 Octob. perpendicularem curvæ Dd, ideoque BG $= \frac{-ydy}{dx}$. Eſt autem ex proprietate Logarithmicarum ſubtangens Logarithmicæ CE ad ſubtangentem Logarithmicæ CD, id eſt, CA ad BG, ut AF ad AB, quod hanc ſuppeditat propoſitionem $a : \frac{-ydy}{dx} = ly : x$, unde habetur $axdx = -yly.dy$. Poteſt autem, ſi meminiſti eorum quæ olim ad te ſcripſi, $yly.dy$ ſummari hoc pacto $-yly.dy = -yly.dy - \frac{1}{2}yyddy + \frac{1}{2}aydy$ [quia $dly = \frac{ady}{y}$] ſumtis itaque ſummis per partes, erit $\int -yly.dy = -\frac{1}{2}yyly + \frac{1}{4}ayy$ & per conſequens $= \frac{1}{2}axx$ id eſt $x = y\sqrt{\frac{a-2ly}{2a}}$, vel, ſi mavis æquationem percurrentem, ſit b numerus ipſius a, ſeu $lb = a$, tunc erit $2yyly = yylb - 2xxbb$, adeoque $y^{2yy} = \frac{b^{yy}}{b^{2xx}} = b^{yy} - 2xx$ vel etiam $b^{2xx}y^{2yy} = b^{yy}$.

Si limitatio mea non diſplicet, pro demonſtratione legitima valebit, Circulum, Ellipſes, aliaſque curvas in ſe redeuntes, nullumque punctum reflexus habentes, neque rectificari, neque quadrari poſſe indefinite. Plura ſcribendi impræſentiarum Tuæ præter ſolitum ſteriles non ſuggerunt occaſionem. Hiſce igitur, Vale & Fave,

Amplitudinis Tuæ

Groningæ 27. 8[bris] 1696.

Devotiſſimo
BERNOULLI.

EPIS-

Digitized by Google

EPISTOLA XXXVII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem

De Analyſi infinite parvorum HOSPITALII. *De tangentibus curvarum per Focos deſcriptarum. De curvis ex plurium punctorum proprietate determinandis. De Serie quadratorum reciproca. Varia.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

Litteras ad Dominum MENCKENIUM Tuas rite curavi; ſi quid ipſi ſignificas novum in Republica litteraria, fac, quæſo, ut nec a me ignoretur. *1696* Nov.

Gratiſſimæ erunt cenſuræ HUGENII in Opus NEWTONI, rogoque, ut ſi obtinere potes, totum mihi cures deſcribi. Et hos & cæteros pro me ſumtus reddam lubens merito.

Putabam me, in reſpondendo, etiam illa Tua attigiſſe, in quibus Problema ſolveras a Domino *Fratre* Tuo propoſitum. Non eſt quod quæras qui ſatisfaciat; nunquam enim credidi, quod mihi facile ſucceſſit in hoc genere, Tibi negotium magnum faceſſere poſſe, idque ſtatim ſignificaveram.

Accepi Librum Domini *Marchionis* HOSPITALII * & prima quaque die ipſi gratias agam. Multa illic præclara reperio, etſi nondum licuerit meditari attentius. Pulcherrima inprimis ratio eſt, qua † ex Focis determinat tangentes, dum obſervat, punctorum, in quibus Circulus aſſumtus ſecat rectas ex Focis ad curvæ punctum ductas, diſtantias a normali ad curvam, eſſe ipſis rectarum differentiis proportionales, atque adeo ipſam normalem tranſi-

Dd 2 re

* *Analyſe des infiniment petits &c.* Paris 1696. 4°.
† Art. 32. & ſeq.

Digitized by Google

1696 Novemb. re per centrum gravitatis, ſi puncta in ratione, quam exhibet differentialis æquatio, onerata intelligantur. Quæ Dominus FATIUS † & ego * dedimus, nonniſi initia quædam fuere. In meo id peculiare eſt, quod ex ipſa tenſionis, ſeu compoſitionis motuum natura, deduxi tranſitum per centrum gravitatis. Vellem autem hanc motuum rationem huc applicari, remque ad fila deduci poſſe, tunc quoque, cum ad emiſſarum ex Focis verſus punctum curvæ potentias aſcenditur; ut ſcilicet parallelismus ille elegans Mechanicæ & Calculi continuaretur. Dominus TSCHIRNHAUS in prima editione ſuæ *Medicinæ mentis* lapſus erat, idque ipſe ei ſubindicaveram per litteras, ante Italicum iter, & innueram eſſe mihi viam corrigendi: Sed a Domino FATIO in edendo ſum præventus. Ipſe Dominus TSCHIRNHAUS correxit ſua in ſecunda editione *Medicinæ mentis*, ſed quæ exhibet Theoremata nullo modo accedunt ad pulchritudinem & generalitatem Methodi *Hoſpitalianæ*. Interim ipſe nuper inſpecto Domini *Marchionis* HOSPITALII Libro ad me ſcribit, tametſi parum temporis ſibi in Nundinis ſuperfuerit ad ejus lectionem, credere tamen pauca in eo fore, quæ ſibi non ſint nota. Nec dubito, quin inſpexerit, quæ hoc negotium concernunt, quod ipſum potiſſimum tangit. Quod ſi hæc jam tum noverat, vellem in Operis ſui editione noviſſima non diſſimulaſſet rem tam utilem & elegantem.

Mitto hic ex *Actis Lipſienſibus* menſis *Octobris*, quæ Dominus *Frater* Tuus de ſuperficiebus Conoidum dixit. § Mihi nondum vacavit reſpondere iis quæ in *Actis* ad me pertinentia dixit; faciam tamen primo otio, eaque occaſione, etiam candori Tuo atque inventis, quanquam non neceſſarium teſtimonium perhibebo.

Tranſcribo hic verba FERMATII, in appendice ad Epiſtolam MERSENNI, quæ eſt 67ª in Tomo Tertio *Carteſianorum*. §§ *Je puis*, dit-il, *donner la réſolution de cette queſtion: Trouver autant*

* *Bibliotheque univerſelle.*

† *Journal des Sçavans*, 1693. 36e. Journal du 14. Sept.

§ Jac. BERN. *Complanatio ſuperficierum Conoidicarum & Sphæroidicarum. Act. Erud.* 1696. Oct. p. 479. vel Opp. Nº. 73. p. 739.

§§ *Ea eſt 59a. in Edit. latina quæ prodiit* Lewardiæ. Aº. 1711.

tant de lignes courbes qu'on voudra, en chacune desquelles, prenant tels nombres des points qu'on voudra, tous ces points enſemble produiſent un même effet. 1696 Nov.

Non invenio Cartesium, Mersenno hæc mittenti reſpondentem, hunc locum attigiſſe.

Fac quæſo ut ſciam quis ille *Wiſmarienſis*, quorſum ierit, & an noſtris ſe ſe ſtudiis cum ſucceſſu applicuerit, ut Tuæ litteræ innuere videntur.

Gratias ago pro Tua communicatione lineæ ad Logarithmicas ordinatim datas normalis. Fateor me ita diſtractum, ut talia attentare vix amplius auſim: nolim tamen hoc ita accipias, quaſi eo prætextu velim me, ſi potuiſſem aggredi, ſtatim fuiſſe præſtiturum.

Circa ſummam harmonicorum nondum mihi ſatisfeci, & vereor ne ſim deceptus. Interim circa cognata proponam quæ olim in mentem venere, ubi & judicium Tuum & auxilium deſidero.

Quæritur ſumma horum numerorum $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ + &c.? Fingo eſſe caſum ſpecialem hujus $\frac{1}{1}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{16}x^5 + \&c. = y$, cum ſcilicet ſit $x = 1$. Quod ſi ergo ſemper haberi poſſet y, haberetur & ſumma quæſita. Ergo fiet $\frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \&c. = dy : dx = \log. (1 - x)$, ſeu $ddy : dx = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \&c. = 1 : (1 - x)$ ſeu $y = \int(dx \int(dx : (1 - x)))$.

Res ergo pendet a Quadratura figuræ logarithmicæ, quæ datur. Eademque methodus ad alia idgenus porrigitur, ad quæ non alius facile aditus patet. Quare cogita quæſo de perfectione & proſecutione.

. . . .

Vale & fave,

Dabam *Hanoveræ* Novembr. 1696.

Deditiſſimo
G. G. Leibnitio.

1696 Nov. P. S. Grata erit inſtantia curvæ ordinariæ in qua Domini Tschirnhausii excuſatio non habeat locum. Memini in aliqua præcedentium * Te quadraturam obliqui Cycloïdis ſegmenti tribuere neſcio cui : ſcito eum quem neſcieras , me eſſe. Multi ſunt anni quod curavi inſeri *Diario Pariſino.* † Nonnihil adhuc ſcrupuli mihi ſubeſt circa demonſtrationem irrectificabilitatis ovalium puncto reverſionis carentium, de quo alias amplius; nunc enim tempore meditandi excludor.

* Supra Epiſt. XXXIV.
† *Journal des Sçavans* 1678. 23. Mai.

EPISTOLA XXXVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De Serie quadratorum reciproca & ſummandis quantitatibus Logarithmicalibus.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime !

1696 Nov. Litteris ad Te dimiſſis mox in mentem venit oportere, ut error in illis admiſſus fuerit. Nam area illa, quam æqualem feceram ſeriei de qua agebatur infinita eſt. Re ergo reſumta vidi ſic procedendum : $\frac{1}{1} + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 +$ &c. $= dy$. Unde $\frac{1}{1}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 +$ &c. $= y$; ergo $dy =$ log. $(1 - x)\, dx : x$, ſeu $y = \int($log. $(1 - x)\, dx : x)$. Sed cum log. $(1 - x)$ ſit infinitus, eo caſu quo $x = 1$, ideo putavi commodius rei accedi poſſe, ſi adhibeamus $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} +$ &c. Nam reperio hac ſumma data, etiam haberi ſummam

niam $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ &c. itaque aſſumo $\frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ 1696 Nov.
$x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 +$ &c. $= dy$. Unde $\frac{1}{1}x - \frac{1}{4}x^2 +$
$\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{16}x^4 +$ &c. $= y$ cumque $\frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$
$- \frac{1}{4}x^4$ &c. ſit log. $(1+x)$ utique patet fore $dy =$ log. $(1+x)$
$dx : x$ ſeu $y = \int($log. $(1+x)\, dx : x)$ Reperio autem generaliter eſſe
$\int(x^e$ log. $(1+x)\,dx) = \frac{1}{e+1}\, x^{e+1}\, l\,(1+x) - \frac{1}{e+1}$
$\int(x^{e+1}\, dx : (1+x))$; & tamen ſingulari naturæ cautione accidit, ut in unico noſtro caſu res non ſuccedat, cum ſcilicet ſit $e = -1$, tunc enim $\frac{1}{e+1} = \frac{1}{0}$ quæ eſt quantitas infinita; unde ſubſidia ſummationis evaneſcunt.

Nondum hactenus occurrit mihi alia ratio quæſitam y inveniendi. An aliunde pateat aditus, Tu optime diſpexeris.

Si ſumma hæc dividatur per x, & quod provenit rurſus ſummetur, prodit ſumma cuborum; & ſi cum hac procedatur eodem modo, prodit ſumma biquadraticorum & ita porro. Habemus ergo reductionem ſerierum ad ſuas quadraturas: ſed ipſæ hoc loco quadraturæ adhuc deſiderantur. Interim ipſam methodum aggrediendi ſeries non diſplicituram puto, cum ſæpe res ad quadraturas quæ in poteſtate ſunt reduci poſſit. Exempli cauſa ſeries $\frac{1}{1+e} - \frac{1}{2.(1+e)} + \frac{1}{3.(2+e)} - \frac{1}{4.(3+e)}$ &c., ſemper haberi poteſt, modo e ſit numerus major unitate, quod ex præcedentibus patet, quia ſit $\int(x^{e-2}.\, l(1+x)\, dx = \frac{x^e}{1.e} - \frac{x^{e+1}}{2.(e+1)}$ $+ \frac{x^{e+2}}{3.(e+2)} - \frac{x^{e+3}}{4.(e+3)}$ &c. quod ſemper haberi poteſt, excepto caſu quo $e = 1$. Quanquam fortaſſe & in hoc caſu habebitur, Tua ope accedente. Hæc raptim prioribus ſubmittere volui, ne Tibi

1696 Nov. Tibi error calculi a me dormitante neſcio quomodo commiſſus fruſtra negotium faceſſeret. Vale,

Dabam *Hanoveræ* 9. Novembr. 1696.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

P. S. Cum reperiam ſemper eſſe $\int (l(1+x)^n x^e dx) = l(1+x)^n (1+x) x^e - n\int (l(1+x)^{n-1} x^e dx - e\int (l(1+x)^n x^{e-1} dx$, hinc patet potentias ſuperiores reduci ad inferiores, x^e ad x^{e-1}, ſi e ſit affirmativus numerus, vel contra x^{e-1} ad x^e, ſi e ſit numerus negativus; idemque eſt de $l(1+x)^n$ & $l(1+x)^{n-1}$. Unde poſſent haberi hæc omnia, niſi obſtarent illi caſus, ubi ob o, vel infinitum, evaneſcunt ſubſidia. Speciatim reperio $(l(1+x)^2 . (1+x)) : x = 2\int (l(1+x) dx : x) - \int (l(1+x)^2 dx : xx)$. Fortaſſe ſi omnia ordine examinare liceret, lux aliqua affulgeret.

EPIS-

Digitized by Google

EPISTOLA XXXIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad praecedentes.

De ſummis Serierum ad quadraturas & æquationes differentiales reducendis, & de ipſis in partes datam rationem habentes diſpeſcendis. De Groningio. *Curva unicum ſpatium habens quadrabile. De* Nieuwentiitii *ſcripto.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

UTraſque Tuas uno eodemque Curſore accepi; in poſterioribus recte correxiſti, quem in prioribus admiſeras lapſum. Olim eram, Te non invito id dixerim, in ſimilibus fere ſpeculationibus: hanc autem materiam jam a longo tempore deſerui, ut pene exciderit, quid ſuper ea præſtiterim. Adverſaria mea diſcutiens hoc reperio. In Hyperbola (*Fig. 46.*) ABCD, ſi $AB = BC = Ba = 1$ fiat $EM =$ ſpatio hyperb. EBCF diviſ. per BE & ſic ubique; em vero $=$ ſpatio hyperbol. $eBCf$ diviſ. per Be, & ſic ubique: erit ſpatium $ABLN = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ &c. ſpatium vero $aBLn$ erit $= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ &c. Præterea ſpatium ABLN erit duplum ſpatii $aBLn$, & per conſequens, quod probe notaſti, data ſumma $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$, &c. habetur etiam ſumma $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$, &c. hæc enim illius dupla eſt. Quod ſi ulterius ſpatia BLME & $BLme$ applicentur ad BE, & Be; prodibunt nova ſpatia pro cubis $\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64}$ &c. & $\frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64}$, &c., & ita

1696 Decemb.

TAB. VIII.

1696 Dec. ita porro pro biquadratricis. Quamvis autem omnes iſtæ Series ſint inſummabiles, poſſum tamen, non ineleganti quodam artificio, illas diſpeſcere in partes datam habentes rationem; ſic Series generalis poteſtatis numeri n eſt hæc $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}$ &c. & multiplicatis numeratoribus & denominatoribus, per datum numerum ad n elevatum, exempli gratia per 2^n, erit $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}$ + &c. $= \frac{2^n}{2^n} + \frac{2^n}{4^n} + \frac{2^n}{6^n} + \frac{2^n}{8^n} +$ &c. $= 2^n \times (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n}$ &c.). Eſt ergo ſumma terminorum imparium $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n}$ &c. ad ſummam parium $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n}$ &c. ut $2^n - 1$ ad 1: & proinde $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}$ + &c. ad $\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}$ &c., ut 2^n ad $2^n - 2$. Hinc patet quod ſupra innui (exiſtente ſcilicet $n = 2$) ſummam $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ &c. eſſe duplam ſummæ $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ &c. hinc etiam ultro ſequitur ſummam harmonicorum eſſe infinitam; eſt enim eo in caſu $n = 1$, & proinde 2^n ad $2^n - 2$. ut 2 ad 0, id eſt, ſumma $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ &c. infinities major eſt ſumma $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ &c. quod obiter dictum velim; ideo præcipue quod memini Fratrem olim id ipſum longa & operoſa via apodictice demonſtrare inſtituiſſe, poſtquam ego antea illud apodictice demonſtraſſem, ut videre poteris ex ejus Diſſertationibus de Seriebus. Jam ſi facimus $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} +$

1

$\frac{1}{4^n} + \&c. = \frac{3^n}{3^n} + \frac{3^n}{6^n} + \frac{3^n}{9^n} + \frac{3^n}{12^n} \&c. = 3^n \cdot \times (\frac{1}{3^n} +$ 1696 Decemb.
$\frac{1}{6^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{12^n} + \&c.)$, habebitur ratio quam habet Series tota ad terminos ſuos omnes tertianos; pari modo invenire licet rationem inter Seriem & ſuos terminos quartanos, & ita porro. Atque adeo ſumma, licet ignota, habet tamen partes cognitæ rationis; quemadmodum & Circulus & Hyperbola ſunt inquadrabiles, poſſunt tamen ſecari in ratione data, quod hic idem in Serie annotaſſe non injucundum erit.

Quantum vero ad reductionem Serierum ad quadraturas, vides ex iis quæ ſupra de ſpatiis ABLN & αBLn, protuli, me jam diu talia meditatum fuiſſe: Omnes quidem quadraturæ facile ad Series revocantur, ſed viciſſim Series ad quadraturas reducere artis foret non mediocris. Ex occaſione eorum quæ perſcripſiſti, negotium reſumſi, & quantum per otium licuit unum alterumve Tibi forte non ingratum annotavi. Primo ſtatim animadverti, Te præcipue eo attendiſſe, ut Series tuas ope differentiationis reduceres ad Seriem harmonicorum, quæ utique quantitate finita logarithmica exprimi poteſt. Ego exinde cogitare cœpi, annon ſeries propoſita per differentiationem bis, ter pluriesve repetitam eamque multiplicando vel dividendo per x, xx, &c. prout res id poſtulat, tandem reduci poſſet ad ſeriem identicam, unde prodiret æquatio differentialis primi, ſecundi, altioriſve gradus, quæ explicaret ſummam Seriei. Et quidem ſpe concepta non omnino excidi: in nonnullis enim quas hic apponam, talis ſummandi modus commode ſuccedit. Quæritur ſumma hujus ſeriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.\,2.\,3} + \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4}$ &c. Scio equidem aliunde, ſi unitas eſt logarithmus, hanc ſeriem eſſe numerum unitatis, ſed idem a priori per methodum ita invenio. Fingo ad Tui imitationem eſſe caſum ſpecialem hujus ſpeciei, $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{x^4}{1.\,2.\,3.\,4}$ &c. $= y$, quando ſcilicet

Digitized by Google

1696 Dec. x fit $= 1$, hinc fiet, differentiando Seriem $\frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$ &c. $= \frac{dy}{dx}$; ablato itaque primo termino $\frac{1}{1}$ provenit Series identica $\frac{dy}{dx} - 1 = \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$ &c. & conſequenter $= y$ & proinde $dy = ydx + dx$, quæ æquatio oſtendit y ſeu potius $y + 1$ eſſe numerum ipſius a, ſeu unitatis. Cæterum reperio Seriem $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ &c., eſſe æqualem huic alteri $\frac{1}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{9}{1.2.3.4} + \frac{16}{1.2.3.4.5}$ &c. Eſto jam quærenda ſumma hujus Seriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{2.4.6.8}$, &c. fiat $\frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$, &c. $= y$, ideoque $x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2.4} + \frac{x^7}{2.4.6}$ &c. $= \frac{dy}{dx}$: tranſpoſito x, & diviſa æquatione per x, habetur $\frac{dy}{xdx} - 1 = \frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$ &c. $= y$ id eſt $dy = yxdx + xdx$, quæ æquatio [poſito $xx = z$] reducitur ad præcedentem: quod etiam alia via invenitur faciendo $xx = 2t$, unde $\frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$ &c. $= \frac{2t}{2} + \frac{2.2.tt}{2.4} + \frac{2.2.2.t^3}{2.4.6}$ &c. $= \frac{t}{1} + \frac{tt}{1.2} + \frac{ttt}{1.2.3}$ &c. quæ Series utique ſimilis eſt præcedenti. Quando vero denominationes componuntur ex numeris imparibus, æquatio prodit omnino diverſa ab illa præcedenti, ut ſi proponatur $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{1.3.5.7}$ &c. proindeque fiat $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.2.3} + \frac{x^7}{1.3.5.7}$ &c. $= y$, & $1 + \frac{xx}{1} + \frac{x^4}{1.3} + \frac{x^6}{1.3.5}$ &c. $= \frac{dy}{dx}$ ſeu $\frac{dy}{xdx} - \frac{1}{x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.3.5} + \frac{x^7}{1.3.5.7}$ &c. $= y$, habebitur hæc æquatio $dy = xydy + dx$; quæ cum ſit ſpecialis caſus æquationis à *Fratre* in *Actis* nuper propoſitæ,

Digitized by Google

poſitæ, & a Te & a me ſolutæ, poteſt per noſtras methodos ulterius reduci ad aliam, cujus indeterminatæ ſeparari poſſunt. Videamus jam quid proveniendum ſit ex hac generali Serie $\frac{1}{a} + \frac{1}{a.(a+b)} + \frac{1}{a.(a+b.)(a+2b)} + \frac{1}{a.(a+b.)(a+2b.)(a+3b)}$ &c. 1696 Decemb.

(intelligo per a & b numeros quoſcunque, ita ut a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ &c. faciant progreſſionem quamcunque arithmeticam;] faciamus ergo $\frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+b}}{a.(a+b)} + \frac{x^{a+2b}}{a.(a+b.)(a+2b)}$ &c. $= y$, unde $\frac{dy}{dx} = x^{a-1} + \frac{x^{a+b-1}}{a} + \frac{x^{a+2b-1}}{a.(a+b)} + \frac{x^{a+3b-1}}{a.(a+b.)(a+2b)}$ + &c., & tranſpoſito x^{a-1}, & diviſa æquatione per x^{b-1} erit $\frac{dy}{x^{b-1}dx} - x^{a-b} = \frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+b}}{a.(a+b)} + \frac{x^{a+2b}}{a.(a+b).(a+2b)}$ &c. $= y$ id quod hanc ſuggerit æquationem $dy = yx^{b-1}dx + x^{a-1}dx$; quæ ſane ipſiſſima eſt *Fratris* ſatis generaliter propoſita; unde præter ſpem incidi in modum ſolvendi hanc æquationem per Seriem ſimpliciſſimam, quam forſan *Frater* non ita facile reperiret, ſi ſollicitaretur propriam ſuam æquationem, vel ſaltem hanc per Seriem ſolvere. Sumamus jam aliud exemplum; ubi proveniat æquatio differentialis ſecundi gradus. Quæritur ſumma hujus Seriei, $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.4.9} + \frac{1}{1.4.9.16}$ &c. ponatur $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4} + \frac{x^3}{1.4.9} + \frac{x^4}{1.4.9.16}$ &c. $= y$, differentiando fiet $1 + \frac{x}{1.2} + \frac{xx}{1.4.3} + \frac{x^3}{1.4.9.4}$ &c. $= \frac{dy}{dx}$ multiplicetur per x, & erit $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.4.3} + \frac{x^4}{1.4.9.4}$ + &c. $= \frac{xdy}{dx}$: differentietur iterum, & habebitur $1 + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4} + \frac{x^3}{1.4.9}$ &c. $= \frac{dxdy + xddy}{dx^2}$ ablato 1, provenit tandem Series identica $\frac{dxdy + xddy}{dx^2} - 1 = \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4}$

1696 Decemb. $+ \frac{x^3}{1.4.9} + \frac{x^4}{1.4.9.16}$ &c. $= y$, quæ reducta dabit $xddy = ydx^2 + dx^2 - dxdy$ pro æquatione quæſita, quæ an ad æquationem differentialem primi generis poſſit reduci, vellem ut diſpiceres. Si quæratur ſumma ſeriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.8} + \frac{1}{1.8.27} + \frac{1}{1.8.27.64}$ &c. obtinebitur æquatio differentialis tertii gradus; ponendo enim $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.8} + \frac{x^3}{1.8.27} + \frac{x^4}{1.8.27.64}$ &c. $= y$, poſt alternatim inſtitutas tres differentiationes, totidemque multiplicationes per x, pervenitur ad ſeriem identicam; unde elicitur æquatio quæſita hæc $xxd^3y = ydx^3 + dx^3 - 3xdxddy + dx^2dy$. Atque hac ratione in altioribus gradibus operari licet.

Multa alia, quæ olim circa hanc materiam obſervaveram, omitto; lubet tamen attingere paucis aliud Serierum genus, quod ante decennium, ut puto, primus ego conſideravi; quodque cum Fratri aperuiſſem, protinus ipſi anſam dedit Problemata ſolida & hyperſolida, ope circini & normæ conſtruendi, per approximationem Geometricam §. Hujuſmodi enim Serierum ſumma, vel potius valor perpetuo æquatione algebraïca finita exprimi poteſt, idque eodem fere modo, quo Serierum jam prolatarum ſummas indagavimus; procedendo ſcilicet donec ad Seriem identicam perveniatur. Quæritur exempli gratia, valor hujus Seriei

$\sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{2}$ &c. Pono illum $= x$, ſumendo utriuſque quadratum erit $xx = 2 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{2}$ &c. ſeu $xx - 2 = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{2}$ &c.: quadrando iterum provenit $x^4 - 4xx + 4 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{2}$ &c.: ablato 1 habetur ſeries identica $x^4 - 4xx + 3 = \sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{2}$ &c.

§ Jac. BERNOULLI *Vera conſtructio geometrica Problematum ſolidorum &c.* Acta Erud. 1689. Sept. pag 454. Opp. N°. 37. pag. 411. Vid. etiam *De Seriebus infin.* Diſp. 2a. §. 27-35. Opp. N°. 54. pag. 536. & ſeq.

$= x$. Hinc $x^4 - 4xx - x + 3 = 0$: cujus proinde æquationis 1696
radix oſtendet verum valorem Seriei propoſitæ. Ex hiſce paucis Dec.
facile intelliguntur omnia quæ de conſtructione ſolidorum problematum exhibuit Frater meus. Non dubito quin hæc & Tibi jam aliquando conſiderata fuerint, quamvis apud Authores de Seriebus tractantes hactenus tale quid non repererim. Hac methodo invenitur

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ &c. $= 2$ & $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$ &c. $= 3$, aliaque id-genus multa inveniri poſſunt quæ nemo Te melius perſcrutabitur. Quod ſupereſt, vix putem alio modo quam feciſti inveniri poſſe ſummam Seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c., ſaltem ad aliam expreſſionem quam Logarithmicam non reducetur. Quod reperiiſti $\int x^e \log. (1+x)\, dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1} l(1+x) - \frac{1}{e+1} \int (\frac{x^{e+1}}{e+x} dx)$; verum eſt. De hoc autem, ni fallor, jam tum agebamus, cum de exponentialium ſeu percurrentium Calculo ſermones fereremus §: Interim non magis miror rem in noſtro unico caſu non ſuccedere, quam mirarer Hyperbolam communem non eſſe quadrabilem: eadem enim naturæ cautione accidit ut ex infinitis Hyperboloïdibus hæc ſola quadraturam non admittat. In poſtſcripto facis $\int l(1+x)^n x.\, x^e\, dx$, neſcio cui prolixæ quantitati æqualem; rogo ut revideas; forſan lapſus irrepſit; invenio enim ſimplicius, ſic $\int l(1+x)^n x^e dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1} l(1+x)^n - \frac{n}{e+1} \int (\frac{x^{e+1}}{e+1} dx)$. Speciatim Te reperiſſe ais $\frac{l(1+x)^2.(1+x)}{x} = 2\int \frac{l(1+x)}{x} dx - \int \frac{l(1+x)^2 dx}{xx}$: ego vero reperio $\frac{l(1+x)^2 (1+x)}{x} = 2\, lx - \int \frac{l(1+x)^2 dx}{xx}$. Sed de hâc materiâ hæc ſufficiant impræſentiarum; plura tempus dabit.

Gratias

§ Epiſt. VI. & VII.

1696 Decemb. Gratias ago, quod litteras meas ad Dominum MENCKENIUM rite curaſti, mittebam ipſi modum generalem *Actis* inſerendum † conſtruendi tetragoniſmum cujuſcunque figuræ curvilineæ in plano deſcriptæ per approximationem geometricam, nulla adhibita expreſſione analytica; quem modum ob infinitatem adjungere volui Seriei meæ univerſali pro quadraturis jam ante biennium in *Actis* propoſitæ.

Ex quo *Wiſmarienſis* iſte, nomine GRONINGIUS, hinc diſceſſit, nihil de eo amplius inaudivi; procul-dubio in Patriam migravit; In tranſitu hic ſe Doctorem Juris creari fecit. Amator apparuit ſtudiorum noſtrorum, videtur tamen hiſtoricam magis quam ſolidam eorum habere notitiam; Decrevit tamen, ut dixit, *hiſtoriam* edere *Cycloïdis*, ad imitationem alterius illius PASCHALII; quapropter noſtra petiit inventa ſuper illa; De omnibus loqui novit, ſed ſine ſundamentis; *Sueciam*, *Daniam*, *Germaniam*, & *Italiam*, peragravit; Jam diu in Patria officio quodam fungitur.

Nondum obtinui, ſed propediem obtinebo, Librum Domini *Marchionis* HOSPITALII; interim ex illis quæ refers, video bonam partem ejus, & forte integrum conſcriptum eſſe ex occaſione eorum quæ ipſi *Pariſiis* communicaveram: non dubito tamen, quin pro ſuo, quo pollet, ingenio, auxerit multis, perpoliverit, & vernacula ſua lingua nitide concinnaverit.

. . . .

Verba FERMATII, quæ notas, latiori ſenſu intelligi poſſunt, quam ut præciſe ad curvas meas applicentur.

En quamdam inſtantiam contra Domini TSCHIRNHAUSII excuſationem. Sit (*Fig.* 47.) curva quæcunque ABC quæ ſecetur, in puncto C, a recta AC faciente angulum ſemirectum CAE cum axe AE. Erecta normali AF, ducatur & producatur applicata DBH ſecans AC in G, agaturque GF parallela ipſi AD, ſecans curvam in L; deinde ſumatur BH æqualis ipſi LF, & hoc fiat ubique; generabitur inde nova curva AHI, cujus ſpatium determinatum AEI, qualiſcunque ſit curva ABC, ſemper æquatur quadrato

TAB. VIII.

drato

† Inſertum eſt *Menſe Decembri* 1696. pag. 551. Vid. Opp. Tom. I. N°. XXXI. pag. 162.

drato A E vel E C; ipſum vero ſpatium A D H indefinite nunquam 1696
erit quadrabile, niſi & ipſum ſpatium A D B ſit indefinite quadra- Decemb.
bile: Præterea ſi ſpatium A D B ſit tale, ut, etiamſi inquadrabile, ab eo tamen poſſint algebraïce ſecari ſegmenta æqualia, vel in ratione data, qualis eſt Circulus, vel Ellipſis, vel Hyperbola [neſcio an aliæ curvæ etiam hac proprietate gaudeant] tunc ſpatium indefinitum A D H erit quidem inquadrabile, ſed præter quadrabile A E I infinitas alias habet partes quadrabiles; & hoc eſt quod impoſuit Domino Tschirnhausio animadvertenti id accidere in Lunula ad axim applicata, & perperam univerſalitatem inde inferenti; Dico enim, ſi ſpatium A D B non ſolum ſit indefinite inquadrabile, ſed etiam ſi non poſſint algebraïce ab eo abſcindi ſegmenta æqualia, vel in data ratione [hæc enim diviſio in ſegmenta æqualia in pleriſque curvis dependet ab ipſa quadratura indefinita ſpatii curvilinei] dico, inquam, tunc, præter ſpatium A E I, in curva A H I plane nullum aliud eſſe quadrabile.

Complicaturo hanc mihi affertur, neſcio a quo, nec per quem, novus tractatulus *Bernardi* Nieuwentitii quem inſcribit, *Conſiderationes ſecundæ circa calculi differentialis principia, & reſponſio ad virum Nob.* G. G. Leibnitium. A me impetrare minime poſſum, ut illas legendo tempus perdam. Ex fortuita apertione video eamdem ſemper Crambem recoquere, & ei unice ſtudere, ut verborum Tuorum ſenſum detorqueat; uti patet. ea pag. 7. & 8. Igitur oportet, ut tandem ſerio & rigide reſpondeas; ne iſte Pan, Tibi Apollini obſtrepens, unum vel alterum inveniat Midam ſiniſtre judicantem. Hiſce vale & favere perge

Amplitud. Tuæ

Devotiſſimo

J. Bernoulli.

Digitized by Google

EPISTOLA XL.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De ſummandis quantitatibus logarithmicalibus. De ſeriebus. De appropinquationibus ex fonte implicationum. De GRONINGII *hiſtoria Cycloidis. De* TSCHIRNHAUSII *ſcripto.*

Vir Nobiliſſime & Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1696 Decemb. IGnoſce, quod impeditiſſimus Tibi promptius non reſcripſi. Veriſſimum eſt, quod dixeram [niſi quis in deſcribendo commiſſus eſt error] eſſe $\int l(1+x)^n x^e = l(1+x)^n (1+x) x^e - n\int(l(1+x)^{n-1} x^e dx) - e\int(l(1+x)^n x^{e-1} dx)$ quod reperies differentiando, ſi ponas ut oportet $d(\log.(1+x))$ eſſe $dx:(1+x)$ neque iſte valor altero de quo mox, niſi uno membro eſt prolixior: ſed annotavi eum, ob rationem non ſpernendam, quam adjeci. Tuus ejus loco ſubſtitutus, errore non caret, quem deſcriptioni tribuo. Ais enim eſſe $\int(l(1+x)^n x^e dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1} l(1+x)^n - \frac{n}{e+1}\int(x^{e+1} dx:(1+x))$. Cum ſit $\frac{1}{e+1} x^{e+1} l(1+x)^n - \frac{n}{e+1}\int(x^{e+1} l(1+x)^{n-1} dx:(1+x))$. Neque minus verum eſt quod dixi eſſe $\odot\, l(1+x)^2 (1+x):x = 2\int(l(1+x)dx:x) - \int(l(1+x)^2 dx:xx)$. Sit enim $l(1+x) = f$ & $(1+x):x = g$, foret $l(1+x)^2.(1+x):x = ffg$, jam $df = dx:(1+x)$ & $dg = -dx:xx$, ergo $2fg\,df = 2l(1+x)dx:x$, & $ff\,dg = l(1+x)^2 dx:xx$. Jam $ffg = 2\int fg\,df + \int ff\,dg$. Ergo ſubſtitutis valoribus, prodibit æquatio $\odot$. Quod ſi jam etiam verum eſſet, quod ais eſſe

$l(1$

$l(1+x)^2.(1+x): x = 2lx - \int(l(1+x)^2 dx : xx$, ha- 1696
beremus quæſitum; nam foret $\int(l(1+x)dx : x = lx$, quod Decemb.
tamen locum habere non poteſt. Itaque ſuſpicor Tibi hoc loco contigiſſe, quod mihi nimis ſæpius ſolet, calculi errorem.

Quæ de Seriebus ad quadraturas reducendis habes optima ſunt, & meis conſentanea, qui methodo quidem iſta, ut vides, ſum uſus ſubinde; ſed non omnia obſervavi, itaque ex Tuis fio doctior. Nonnulla ejus generis latent diſperſa in meis ſchedis; ſed quæ facilius, ubi opus, denuo eruo, quam in illa Chartarum indigeſta mole quæro. Haud dubie regreſſus a Seriebus ad ſummas, vel per quadraturas, vel ſine quadraturis, pendet a quibuſdam æquationibus finitis, quæ ex ipſa Serie oriuntur varie tractata; ſic ut ipſa tandem ex Calculo poſſit tolli. Neque hoc in Seriebus tantum verum eſt, ſed & in aliis expreſſionibus in infinitum tendentibus, quæ Seriem proprie dictam non conſtituunt. Qualis eſt tua $\sqrt{(2+\sqrt{(1+\sqrt{(2+\sqrt{(1+\&c.)})})})}$, ope extractionis, qualis eſt etiam iſta mea, ope diviſionis

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\&c.,}}}}}$$

per quam ſecatur linea in extrema & media ratione, & generaliter pro tali diviſione ſi ſcribas

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\&c.}}}}$$

erunt, a, b, c, &c. quotientes, qui prodeunt quærendo maximam communem menſuram, inter duas quantitates: quæ ſi ſint commenſurabiles, finitur progreſſio; ſin minus pergitur in infinitum. *Viceomes* Brounkerus, apud Wallisium, in *arithmetica infinitorum* dedit talem expreſſionem pro Circulo, ubi pro a, b, c, d, e, &c. proveniunt, ſi bene memini unitates; ſed ubi ego hic pono unitates, ibi ipſi proveniunt numeri quadrati. Sed mallem progreſſionem pro Circulo dari, qualem hic deſigno, ut haberi poſſet Series quotientium in infinitum proveniens

Ff 2 opera-

1696 Dec. operatione, qualis adhibetur quærendo maximam communem menſuram. Etiam extractionibus radicalibus continuatis, exhibetur latus polygoni circularis, ut conſtat. Sed magnitudo Circuli inde non derivatur, niſi multiplicando per numerum infinitum. Circa continuatas quotientium inveſtigationes multum meditatus eſt Dominus LALOVERA Auctor *Itinerarii Siamenſis*; etſi iſtam expreſſionem continuatæ in infinitum diviſionis non adhibuerit. Continuatæ iſtæ in infinitum expreſſiones etiam adhiberi poſſunt in Tangentium inverſis ad quadraturas revocandis. Nam Tangentium inverſæ, & ſimiles, ſe habent quodammodo ad quadraturas ut radices affectæ ad puras, ſeu abſolutas, ut ſi ſit $dy = xdx + ydx$, ſeu $y = \frac{1}{2}xx + \int ydx$. Ubi in $\int ydx$ ſubſtituendo valorem ipſius y inventum, fit $y = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \int(\int ydx)dx$) ubi rurſus in $\int(\int ydx)dx$) valor ipſius y repertus ſubſtitui poteſt. *Galli* quidam, ni fallor Dominus ROQLLE & Dominus *Abbas* LANION, appropinquationes quaſdam pro æquationibus dedere, quæ hoc fonte *Implicationum*, ut voco, nitebantur; dum ſcilicet valor ſemirepertus in parte ſua nondum reperta ſubſtituitur. Memini & *Angli* cujuſdam, cujus nomen non ſuccurrit, ſcriptum anglicum vidiſſe in *Anglia*, qui ſimilia quædam adhibebat pro æquationum radicibus; ſed in numeris magis quam in conſtructionibus linearibus, quas a Te, & Domino *Fratre* Tuo, ex hoc fonte ductas libenter intelligo, & gratias pro indicio ago; etſi enim viderim quæ Dominus *Frater* Tuus in *Actis* dederat, non potui tamen conſiderare attentius.

Dominus GRONINGIUS etiam ad me nuper ſcripſit, & de *Hiſtoria Cycloïdis* conſuluit; indicavi ipſi me eſſe Auctorem quadraturæ ſegmenti obliqui, quam & olim publicavi in *Diario Pariſino*, ante multos annos †. Sed ſuaſi ut ne nimis immoretur leviculæ controverſiæ inter TORRICELLIUM & ROBERVALLIUM, de primo Auctore quadraturæ Cycloïdis, cum ipſa ſit perfacilis: Exponenda potius inventa WRENNI & DETTONVILLÆI, ſeu PASCHALII, & ipſius inprimis HUGENII de Cycloïdis uſu ad pendula

† *Journal des Sçavans.* 1678. 18. Journal du 23. May.

peridula ſane pulcherrimo; de Tuo novo Cycloïdis uſu nihil adhuc dicere licuit. 1696 Decemb.

Rogo ut mihi folium de *Menſe Lipſienſi* noviſſime miſſum remittas, ut ſcilicet menſem, alias mutilum futurum, redintegrare poſſim: Mitto nunc folium novum cum dimidio, in quo videbis quæ Vir Egregius, * cui ambo quædam objeciſtis, reſpondeat. Vellem veniſſet ad rem, & locutus fuiſſet paulo apertius, directiuſque, ut Tibi mihique mos eſt. Ego, quoties lapſus ſum, id libenter & ſine circuitione fateor. Miror quid hoc ſit, cum dicit *Methodum tangentium inverſam non amplius a ſe magni-fieri.* Habet-ne pro parum utili, an pro parum difficili? Nam ſi utilis & difficilis eſt, utique magni-facienda eſt. Utilem eſſe ad magni momenti Problemata, experientia ni fallor docet. An ergo ipſe eam facilem reddidit? Hoc non puto, alioqui dixiſſet. Nam quod ait *ſibi ſucceſſiſſe, quando inquiſivit*, fortaſſe indiget multa limitatione. Certe ego ipſi talia aliquando in *Actis* propoſueram, quæ non attigit: neſcio an in ea inquiſiverit, quemadmodum quidem veriſimile videri poſſet. Eſt Vir magni ingenii; ſed tamen hanc in eo obſervo hypocriſin, ut ſic dicam Philoſophicam, quod vult videri ſpernere gloriam, quando eam maxime affectat. Quando *Hanoveræ* tranſibat, mihi neſcio quæ expoſuit Theoremata de circuli inſcriptis, & aliis, quorum non ſatis memini; ex quibus ſe magna ducturum augurabatur; quod ego animadvertere ſatis non poteram. Habet haud dubie multa egregia; quæ ſi candide proferret, plus obtineret veræ gloriæ, & magis prodeſſet Reipublicæ. Quod ait *ſe a figura data contenta duabus rectis & una curva ordinaria abſcindere poſſe partem imperatam, ductu alterius curvæ ordinariæ*; id eſt facillimum; tantum enim oportet conſtituere figuram datæ ſimilem, quod fit emittendo rectas ex puncto in figura ſumto, ad quodlibet punctum ambitus, & eas in ratione conſtanti minuendo: ſic habebimus datæ ſimilem & ſimiliter poſitam. Fiant autem homologæ in ſubduplicata ratione rationis datæ, quam pars imperata ad

Ff 3 totum

* D. Tschirnhausius. *Reſponſio ad Obſervationes Dn.* Bernoulliorum. Acta Erud. 1696. Nov. p. 519. vel Joh. Bernoulli Opp. Tom. I. N°. XXXIV. pag. 170.

1696 Dec. totum habere debet. Pro ſolido ſeu corpore, latera homologa ſeu emiſſarum imminutiones eſſe deberent in ratione ſubtriplicata: ſed ſi Methodus ejus daret ſimul quadrationem, quando eſt poſſibilis, [ut verba innuere videntur] maximi utique momenti foret: Verum hoc difficile puto. Præclara eſt Tua contra ejus excuſationem inſtantia. Inter inquiſitione digniſſima foret in Geometria, producere quod in Circulo, Hyperbola, & Ellipſi quodammodo incipitur. Nam Circulus ſectorum magnitudine exhibet ſectionem anguli; Hyperbola ſectionem rationis ſeu logarithmi. Non dubito jam, quin porro certo ordine exurgant altiores lineæ alias ſectiones exhibituræ.

. . . .

Si Dominus Nieuwentiit non vult, aut non poteſt, capere meliora, & tamen pervicacem ſe ſe oſtendit; tractandus eſt inſtar hæretici, quem, poſt unam alteramve admonitionem, devitandum eſſe Scriptura docet. Vellem ipſi reſponderet Dominus Cluverius; jucundum id futurum eſſet. Vale.

Dabam *Guelferbyti* 28. Decembr. 1696.

Deditiſſimus

Godefridus Guillelmus Leibnitius.

EPIS-

EPISTOLA XLI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De quantitatum logarithmicalium ſummatione. De ſeriebus. Cycloïdis ſegmenta innumera quadrabilia. De TSCHIRNHAUSIO. *De tentamine quodam ſolutionis Probl. celerrimi deſcenſus. Dni.* Sauveur *ſcheda de Problemate Celerrimi deſcenſus.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

AD Noviſſimas Tuas nudius-tertius acceptas ita ſtatim reſpondeo. En exemplar Programmatis *, per quod prorogationem termini Mathematicis ſignifico. Neuter noſtrum erravit in ſummanda $l(1+x)^n . x^e\, dx$; quin egregiam potius logomachiam commiſimus, dum alter alterum non intelleximus. Tibi enim $l(1+x)^n$, erat Logarithmi poteſtas, mihi autem Poteſtatis Logarithmus. Hinc deliberandum do, annon ſatius eſſet ut ad evitandam confuſionem illud ita ſcriberetur, $l^n(1+x)$ hoc autem ſic $l(1+x)^n_{\cdot}$. Nec-dum tamen bene ſe habet $\int l^n(1+x)\, x^e\, dx = l^n(1+x).(1+x)\, x^e - n\int(l^{n-1}(1+x)\, x^e\, dx) - e\int(l^n(1+x)\, x^{e-1}\, dx)$: videtur loco ultimi membri poni debere $- e\int(l^n(1+x)(1+x)\, x^{e-1}\, dx)$. Videbis, ſi denuo ultimas meas examinare placeret, hoc ſenſu mihi nullum ut ſuſpicaris, contigiſſe calculi errorem. 1696 Januar.

Optime dicis expreſſiones illas in infinitum tendentes Series proprie non eſſe dicendas, aptius ita ſcriberentur, &c. $\sqrt{a+\sqrt{l+\sqrt{a+\sqrt{b}}}}$, pro-

* Opp. Tom. I. N°. XXXIII. pag. 166.

1696. procedendo a dextra ad ſiniſtram; unde ridicula comparatio mihi ve-
Januar. nit in mentem, quaſi hujuſmodi Series æternitatem, ut ita dicam, præteritam, vulgares vero futuram repræſentarent. Cum *Pariſiis* degerem, memini aliquid vidiſſe à Domino ROLLE & LAGNY [neſcio an ſit idem qui LANION] circa appropinquationes radicum, quod nitebatur fonte, ut vocas, implicationum. Sed ROLLE pro cubicis abſurdos committebat paralogiſmos, quos etiam correxi, & methodum correctam Dno. HOSPITALIO exhibui. †

Cum GRONINGIUS ad Te ſcripſerit, nihilne attigit de Manuſcriptis *Hugenianis* mihi promiſſis. Potuiſſes ipſi indicare, me infinita ſpatia Cycloïdis vulgaris quadrabilia inveniſſe, præter illa duo a Te & HUGENIO reperta, quod ſorte etiam in *Actis* oſtendam. Non erat cur GRONINGIUM celares novum meum Cycloïdis uſum pro celerrimo deſcenſu; hic enim ipſi ipſemet ego rem aperui, perſuaſus ſcilicet ejus *Hiſtoriam* ante terminum elapſum lucem non aſpecturam.

Legi & relegi ſchediaſma Dni. TSCHIRNHAUSII, * ſed fateor nulli ex noſtris objectionibus ſatisfecit; multa dicit, ſed nihil dicit; affectat neſcio quam obſcuritatem, qua errores ſuos palliare ſatagit, & ſimul ſua myſteria pomposis verbis, ut Alchymiſtæ ſolent, promittit uſque & uſque, nihil tamen unquam producit; ſi planam adeo habet Methodum Tangentium inverſam, ut ipſi jam ſit luſus puerilis, quidni ſe accingit Problemati celerrimi deſcenſus.

Sub finem loquitur de quodam ſpecimine quod, jam ante biennium, Tecum, ut dicit, communicavit: geſtio ſcire quid ſit, an inde probabile videatur rectangula rectarum ſe interſecantium, non ſolum in circulo & illis curvis, quas ego determinavi, ſed in omnibus omnino curvis eſſe æqualia. Interim falſum hoc eſſe perfacile demonſtrarem, niſi id velit intelligere de duabus rectis tantum; uti innuere videtur, quando ait, certiſſimum id eſſe in tribus ſectionibus conicis: hoc autem cum hic nihil faciat ad rem, facile largior: non enim duabus dumtaxat, ſed infinitis, imo omnibus rectis

† Opp. Tom. III. N°. CXLIX. L. 50. & ſeq. pag 529. & ſeq.

* *Reſponſio ad Obſervat. DD.* BERNOULLIORUM. A. E. 1696. Nov. p. 519, & Joh. BERNOULLI Opp. N°. XXXIV, pag 170.

Digitized by Google

rectis ex eodem puncto redeuntibus æqualitas rectangulorum competere debet. 1697 Januar.

Mitto ecce, [rogo remittas] Scriptum certi cujuſdam Mathematici SALVATORIS, quod Dominus *Marchio* mihi communicavit, ubi Auctor erroneam quamdam ſolutionem mei Problematis exhibet: nihil magis miror, quam quod Dominus HOSPITALIUS eam, ... adeo laudarit, & ...... errores quibus evidenter laborat, non animadverterit. Quærit enim primo, quod non eſt in Quæſtione, curvam ſcilicet de qua non eſt ſermo; & deinde peccat in principia Calculi differentialis, quando conſiderat duas lineas, angulum infinite parvum conſtituentes, ut abſolute parallelas. Falſitas hujus ſolutionis vel ex eo ſolo patet, quod juxta determinationem geometricam tangentis curvæ quæſitæ, art. 5. hujus ſcripti traditam, ſequitur, dari quoſdam caſus, in quibus Problema eſſet impoſſibile; facile autem percipitur, in omni caſu eſſe poſſibile.

Dominus NIEUVENTIIT utique reſponſione non dignus eſt; ipſi tamen forſan reſpondebo § circa æquationes ſaltem exponentiales, quia ibi etiam mea res ſpecialiter agitur; non tam illius in gratiam, quam Publici, quod hactenus exponentialium tractationem nondum ſatis vidit. Cur dicis, quod velles ipſi reſponderet CLUVERIUS, quod jucundum id foret, Cum tamen CLUVERII nullam mentionem faciat? An alias hi duo mutuis elogiis ſcilicet ſe extulerunt? Vale, & cum novo anno nova fruere ſanitate.

Amplitudinis Tuæ

Jan. 1697.

Obſervantiſſimus
J. BERNOULLI.

§ *Principia calculi exponentialium ſive percurrentium.* Act. Er. 1697. Mart. p.125. vel Opp. Tom. I. N°. XXXVI. pag. 189.

Scheda Dni SAUVEUR *Latine Verſa*

PROBLEMA.

TAB. IX. *Datis* (Fig. 48.) *punctis* A, B; *invenire curvam* AB, *talem, ut ipſam deſcribens Corpus grave minimo tempore ab* A *ad* B *perveniat.*

LEMMA.

TAB. IX. *Si grave unum* (Fig. 49.) *deſcendat per* AB; *aliud vero per* ADB: *invenire rationem temporis per* AB *ad tempus per* ADB.

Agantur horizontales rectæ BC, DF; capiatur AG media proportionalis inter AF, AB; ducatur GE horizontalis.

Dico tempus per AB ad tempus per ADB eſſe ut AB ad AE + HB.

NB. Tempus per AB deſignetur per $\overline{AB}$, & $\frac{AD}{DB}$ deſignet tempus per DB poſt deſcriptam lineam AD.

Nam $\overline{AB} : \overline{AC} = AB : AC$

& $\overline{AC} : AD = AC : AE.$ Ergo ex æquo

$\overline{AB} : AD = AB : AE$ ✱

Rurſus $\overline{AB} : \frac{AF}{FB} = AB : BG$

& $\frac{AF}{FB} : \frac{AD}{DB} = BG : BH.$ Ergo ex æquo

$\overline{AB} : \frac{AD}{DB} = AB : BH$ ✱ Et addendo ✱ cum ✱

$\overline{AB} : \overline{ADB} = AB : AE + BH$

Sequitur 1°. ſi ſit BF infinite parva, DE = EC, & DH = HB; adeo ut ſecandæ modo ſint bifariam lineæ DB, DC in H & E.

2°. Si BC ſit infinite parva, DC erit parallela ipſi BF.

PRO-

Digitized by Google

Propositio.

Detur (*Fig.* 50.) AB, BL horizontalis, normalis FL. Biſecetur FB in G agaturque GL. Ducantur AC, DB, EH horizontalis. Agatur AC ipſi AC infinite vicina, B*d*, & *e b* horizontalis. Demittantur perpendiculares HP, DR, ES. Pono DF & BC infinite parvas primi gradus, & quæratur ſitus linearum AD, DB ut minimo tempore percurrantur. TAB. IX

Hunc in finem, quæritur $AE + HB$ minimum.

1°. Obliquarum AD, A*d* exceſſus ſupra perpendicularem AF eſt infinite parva quantitas ſecundi gradus, reſpectu ipſius AB: igitur negligenda reſpectu ipſarum DE & HE, quæ ſunt primi gradus.

2°. DC, & *d c* ſunt ipſi FB parallelæ: ideo biſecantur in E & *e*, uti & DB, *d*B in H & *b*, & BR in P. Igitur $Pb = \frac{1}{2} Rd$.

3°. Dum AC abit in A*c*, DE evadit *de*, ejuſque different. eſt $-Se$, & BH evadit B*b*, ejuſque differ. eſt $Pb = \frac{1}{2} Rd$: quæ differentialia ponenda ſunt æqualia, ut habeatur ipſius AD ſitus quæſitus.

4°. Triangula ES*e*, LFG ſimilia ſunt, quemadmodum & DR*d*, BFD.

$$\text{Ergo } eS : SE\ (Dd) = GF : FL$$
$$Dd : Rd\ (2Pb) = BD : DF$$
$$\text{Igitur multipl. } eS : 2Pb = GF \times BD : FL \times DF$$
$$\text{id eſt, } eS : Pb = BF \times BD : FL \times DF$$
$$\text{Eſt autem } eS = Pb, \text{ (hyp.). Igitur } BF \times BD = FL \times DF,$$
$$\text{Ergo } FL : BF = BD : DF.$$

eſtque hic lineæ AC ſitus quæſitus, tuncque BD tangit curvam quæſitam.

5°. Geometrice ducitur hæc tangens BD, deſcripto (*Fig.* 51.) ſuper AB ſemicirculo, ductis verticali BT, & ad ipſam AB normali AT, inſcribendo in ſemicirculo rectam AV æqualem ipſi AT, & ducendo BV. Hæc enim ipſa tangens eſt. TAB. IX.

Digitized by Google

Nam, ſi capiatur BF infinite parva, & FL normalis, quæ ipſi BV occurrat in D, Triang. LFB, BAT ſimilia ſunt, ut & BDF, BAV. Quamobrem LF: FB = BA : AT (AV) = BD : DF, ut requirebatur.

6°. Habentur ſubtangentes, ducendo horizontalem XAZ, aut verticalem AP. Sunt enim ſubtangentes AZ vel AS ſumendo A pro puncto fixo, & $AX = x$, $BX = y$, habentur ſucceſſive AB, AT = AV, BV, & tandem AZ. Denique inveniuntur PS & AS.

Per ſubtangentes reperitur æquatio inter dx & dy, atque integrando æquatio ad curvam. Sed multa negotia, quibus diſtineor, non permittunt ut hiſce ſpeculationibus diutius indulgeam.

Pariſiis, 26 Dec. 1696.

SAUVEUR.

EPISTOLA XLII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Tentamen Solutionis Probl. Brachyſtochronæ refutatur. De SALVATORE, TSCHYRNHAUSIO *&* GRONINGIO. *Varia.*

Vir Nobiliſſime & Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

1697 Januar. SChedam Domini SALVATORIS, Mathematici *Pariſini*, cum gratiarum actione remitto. Placet in ſpecimen elegantis & ſubtilis aberrationis. Nam, ut ſæpe dicere ſoleo, Egregiorum Hominum etiam errata docent. Inter alia autem hinc diſcimus, quam lubricum ſit, uti infiniteſimalibus, niſi noſtri Calculi filo dirigantur. Pro certo habeo Illuſtrem Dominum *Marchionem* HOSPITALIUM, ſi rem voluiſſet ad calculum redigere, ſtatim errorem fuiſſe

ſe deprehenſurum. Credo etiam, ſi valetudo ejus nondum plane confirmata intentiores iſtas meditationes pateretur, ipſius Problematis ſolutionem non eſſe ingenium ejus effugituram. 1697 Januar.

Quod attentatam a Domino Salvatore ſolutionem attinet; equidem concedi poteſt, non tantum mediam geometricam & mediam arithmeticam duarum quantitatum infiniteſimaliter, ſeu per inaccomparabile, differentium coincidere, ſed & duas rectas angulum infinite parvum facientes haberi poſſe pro parallelis, dum de alia recta eas ſecante quœritur, &, quantum judicare poſſum, Dominum Salvatorem his regulis male uſum non eſſe. Sed alia ſunt, quæ ſolutioni ejus obſtant; nam [ut differam infra notanda, quod rem aliam plane indagat, quam quæ deſideratur] reperio, tum neglectum veræ methodi infiniteſimalis, tum inſufficientem enumerationem eorum, ex quibus aptiſſimum eſt eligendum. Neglectus Methodi infiniteſimalis in eo conſiſtit, quod re eo reducta, ut (*Fig.* 50.) A E + B H ſit omnium minima, & inde inferendo $dAE = dBH$, neceſſe eſt dBH eſſe infinities infinite parvam, atque adeo & dAE, quorum tamen neutrum in proceſſu hujus ſolutionis obſervatur.

Nam omnis quantitas differentialis eſt utique uno minimum gradu inferior ſua integrali. Cum igitur B H, vel ejus dupla B D, ſit infiniteſimalis primi gradus, utique dBH ſeu P*b* aut ejus dupla dBD ſeu R*d* non poſſunt non eſſe infra primum gradum, ſeu erunt differentio-differentiales ad minimum. Ergo etiam dAE infra gradum primum, ſeu minimum differentio-differentialis eſſe debebit. Sed hoc non fit in iſto proceſſu, & dAE ſeu S*e* eſt differentialis primi gradus, quod ex ipſomet proceſſu ſic colligitur: Triangula E S*e* & L F G ſunt ſimilia. Jam hujus trianguli L F G latera ſunt accomparabilia, ſeu inter ſe comparabilia, cum omnes angulos habeat aſſignabiles, ergo & trianguli E S*e* latera ſunt accomparabilia; jam recta E*e* eſt primi gradus, ergo impoſſibile eſt ut S*e* ſit gradus ſecundi, alioqui foret ipſi E*e* incomparabilis; Interdum quidem fieri poteſt, ut differentiæ quantitatum ordinariarum ſint ſecundi gradus, ut ipſarum A D vel A*d* quippe angulum ad F D*d* facientium a recto inaſſignabiliter differentem, ſed ipſarum A E differen-

1697 Januar. ferentiæ ſunt gradus primi, Cum tamen, ut dixi, deberent eſſe ſecundi. Imo quod amplius eſt, ex figura inſpecta, proceſſuque ſolutionis, vides ne ipſas quidem *d*BH eſſe ſecundi gradus, ſed primi; quod utique prorſus incongruum eſt, differentias, ſeu Elementares quantitates eſſe homogeneas ipſis terminis, ſeu quantitatibus integralibus. Id autem ſic eſſe patet. Nam R*d* dupla ipſius *d*BH, ſeu ipſius P*b* eſt primi gradus; ergo & ipſa *d*BH. Ipſam autem R*d* primi gradus eſſe eodem modo probo, ut ante. Nam, per ipſum ſolutionis proceſſum, triangulum DR*d* ſimile eſt triangulo BFD; hujus autem anguli ſunt aſſignabiles; ergo latera accomparabilia. Itaque & trianguli DR*d* latera ſunt accomparabilia. Jam unum hujus latus D*d* eſt primi gradus, ergo & R*d* eſt primi gradus, non ſecundi; alioqui ipſi D*d* inaccomparabile foret. Patet ergo neglectus veræ Methodi infiniteſimalis.

Quid vero, ſi quis dicat, C*c*, D*d*, E*e*, eſſe ſecundi gradus? Reſpondeo hoc eſſe contra mentem authoris; qui ſimpliciter dixit C & *c* infinite vicinas eſſe; quod utique intelligitur de primo gradu; & alioqui admonuiſſet de ſecundo, ut alio loco fecit. Si quis tamen ad ſecundum gradum confugiendum jam putet, ne ſic quidem effugiet, incidetur enim in defectum imperfectæ enumerationis, de quo jam dicendum. Nam ſi *d* eſſet vicina ipſi D per intervallum ſecundi gradus, tantum enim ex ſic vicinis, non ex aliis innumeris inaſſignabilitate primi gradus vicinis aptiſſimum eligeretur.

Inſufficiens quoque enumeratio eorum, ex quibus eligendum eſt aptiſſimum, ex eo patet, quod in ſolutione non eligitur aptiſſimum ex omnibus punctis poſſibilibus, ſed ex iis tantum, quæ cadunt in rectam D, nam & alterum *d* aſſumitur, non ubicunque, ſed in recta FD ad AB angulum rectum faciente; ergo ſi proba eſſent cætera, ſequeretur tamen punctum D non eſſe electum ex omnibus poſſibilibus aptiſſimum. ut deſideratur.

Sed ſi nullum in his omnibus peccatum eſſet, tamen, ut jam dicere occupavi, id quod indagandum ſibi ſumit ſolutio, ſcopum non ferit, alienumque eſt a Problemate propoſito. A nobis enim quærebatur, ut curva AD una cum ſua productione infinite parva

DB

DB daret deſcenſum breviſſimum; hic vero indagatur modus effi- *1697*
ciendi ut chorda curvæ AD, nempe recta AD cum dicta curvæ Januar.
productione DB ſumta deſcenſum breviſſimum præbeat, quod eſt diverſiſſimum.

Quanquam, etſi omnia ſe ſe bene haberent, & ad deſideratam curvam pertinerent, tamen Problema non eſſet ſolutum; tantummodo enim reperta eſſet aliqua curvæ quæſitæ proprietas ſecundum ſuas tangentes; quod quidem non eſſet contemnendum, ſaltem enim Problema phyſicum reductum eſſet ad Problema puræ Geometriæ; ſed non ideò eſſet ſolutum, niſi hoc geometrico Problemate ſoluto. Conſtat autem quam difficile ſit invenire curvas ex datis tangentium proprietatibus, quod Methodum tangentium inverſam vocare ſolitus ſum; & licet poſſit inveniri valor differentialium, ſeu ratio dy ad dx in ordinariis; non tamen inde ſemper calculum ſummatorium inſtituere, ſeu terminorum integralium relationes invenire in poteſtate eſt. Et quanquam concedi poſſit hæc Problemata aliquo modo pro ſolutis habenda eſſe, quando redacta ſunt ad quadraturas, cum ſcilicet demonſtratum eſt, eſſe tranſcendentalia, conſtat tamen rationem hæc præſtandi nondum extare. Itaque hanc ſolutionem a Domino Salvatore tentatam, a vera multis modis abeſſe fatendum eſt. Agnoſco tamen non contemnenda, nec vulgaria eum ſpecimina etiam hic dediſſe ingenii & acuminis; ac non procul abeſſe a regno cœlorum Mathematicorum, ſi ita de noſtris rebus jocari fas eſt. Non memini mè quicquam vidiſſe ab eo editum: obverſatur tamen animo neſcio quid, ut videar mihi caracterem manus ejus agnoſcere.

Cum *Pariſiis* eſſem, videbam ſubinde juvenem *Lugdunenſem* peringenioſum, & ſingulari acumine in interiora etiam Analyſeos & Geometriæ penetrantem; ſed ille ni fallor diſceſſerat, dum adhuc eſſem *Pariſiis*. Vix tamen mihi tunc occurrerant in *Gallia*, qui aptiores quam ille viderentur ad hæc ſtudia excolenda. Nominis non memini, ac proinde dicere non poſſum, an ſit hic ipſe Dominus Sauveur; noſſe velim, an ſit in Academia Scientiarum Regia, aliudve munus gerat? ſed quicunque ſit, certe inſigne aliquid præſtare poſſe videtur. Memini legere olim in *Diario Eruditorum*

1697 Januar. *ditorum Pariſino*, ipſum circa ludum *Baſſettæ* aliquid mathematice fuiſſe meditatum, † quod tamen non vidi. Optarem vel ipſum vel alium aliquem ludos omnis generis mathematice tractare, & tam regularum, ſive legum rationem reddere, quam artificia primaria tradere. Dici non poteſt quam multa ad Artem inveniendi utilia lateant in Ludis. Cujus rei ratio eſt, quod homines in jocoſis ingenioſiores quam in feriis eſſe ſolent, cum magis nobis ſuccedant quæ cum delectatione peragimus. Vale,

Dabam *Hanoveræ* 29.' Januar. 1697.

Deditiſſimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

P. S. Habes ſententiam meam de ſolutione a Domino SALVATORE tentata. Putem cavendum Tibi eſſe, ne dum defectus ejus indicas, veram ſolvendi rationem invitus demonſtres. Et quidem quod Dominum *Marchionem* HOSPITALIUM attinet, putem optime Te facturum, ſi ſolutionem veram ipſis communices, ſiquidem eam ipſe deſiderat; præſertim cum ipſi a morbo gravi reſtituto, ne ſuadendum quidem ſit ut hæc meditetur. Puto vere a Te dici nomen illi Appropinquatori cum Dn. ROOLLE concertanti non eſſe LANION, ſed LAGNI, & a me vicina nomina fuiſſe confuſa. Vellem Dominus TSCHIRNHAUSIUS excitari ſe pateretur, ad edendum aliquid in noſtris ſtudiis ſe dignum; habere enim talia non dubito. Sperabam objectiones veſtras hunc effectum habituras, ſed hactenus declinavit. Fortaſſe dabit tandem manus. Non memini diſtincte Theorematum, de quibus loquebatur cum hac tranſiret. Quæ elegantiora mihi videbantur, pertinebant ad Polygona circulo inſcripta & circumſcripta. Nihil mihi ſcripto conſignatum dedit, unde miror quod, in ſchediaſmate ſuo, de neſcio qua communicatione mihi facta mentionem facere voluerit. Talia ſic dicere, perinde eſt ac ſi non dicas. Certe aliquid inde duci poſſe ad ſolvendā

† *Journal des Sçavans* 1679. 4. Journ. du 13. fevr.

Digitized by Google

venda Problemata, qualia a Te noviſſime proponuntur non puto. 1697 Etiam Domino Hugenio talia quædam expoſuerat, (nam hac Januar. tranſiens ad Batavos tendebat;) ſed is mihi ſcripſit, ſe ſe magnas conſequentias, quas exinde deducere vellet Dominus Tschirnhaus, non videre.

Dominus Groningius nihil vel de Te, vel de Manuſcriptis *Hugenianis*: unde ego quoque diſſimulavi talia mihi ex Te eſſe nota, quæ ipſe attingere noluerat. Præſertim cum ſe ſe novam *Newtoniani* Operis editionem moliri ſcripſerit: quam tamen diſſuaſi, quod de ea cogitare Newtonum ipſum intellexiſſem. Et ſuſpicor *Hugeniana* ibi adjicere voluiſſe. Quod ſi iterum ſcribat, videbo an commode efficere poſſim, ut hæc nobis communicet; præſertim ſi editionis cogitationem depoſuerit. Etſi autem ſcribas, potuiſſe me ſignificare ipſi uſum Cycloïdis ad Problema Tuum; ego tamen ſi feciſſem, Te inconſulto, putaſſem feciſſe me reprehenſibiliter: cur enim arcanum tuum ipſi crederem, quod ſi ipſius neglectu, vel ſtudio, ad alios emanaret, merito de me queri potuiſſes. Nec refert quod ille Librum ſuum tam ſubito editurus non eſt; potuiſſet enim rem aliis communicare aliter quam per librum, nec mihi ille ſatis eſt notus.

. . . .

Nieuwentiitius contra Cluverium in primis ſuis opuſculis ſcripſit. Id puto Domino Cluverio non ſatis eſſe exploratum; alioqui fortaſſe reſpondiſſet. Idque non injucundum eſſe futurum; ſi modo acerbitas abſit.

EPISTOLA XLIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De eodem tentamine ſolutionis Prob. Brachyſtochronæ. De SALVATORE. *De ludis & arte conjectandi. De Probl. celerrimi deſcenſus. De* TSCHIRNHAUSIO & GRONINGIO.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1697 Febr. NOn improbavi quod Dominus SALVATOR duas rectas AC, Ac, angulum infinite parvum conſtituentes aſſumſerit pro parallelis; hoc enim non conceſſo, pleraque noſtra caderent; ſed illud falſum puto, quod quaſi abſolute parallelæ eſſent, inde conclusit (*Fig.* 50.) duarum illarum linearum partes DC, *dc*, bifariam diviſas eſſe in E*e*, per lineam GL; cum tamen differant diviſiones iſtæ a veris biſectionibus, quantitate quidem incomparabili cum DC, ſed tamen comparabili cum P*h*, vel R*d*; ita ut non legitime inferri poſſit, Ergo $Ph = \frac{1}{2} Rd$; quamvis alias hoc verum ſit, ſi [non attendendo ad lineam GL, ut ipſe SALVATOR in ſubſequentibus facit] modo ſupponantur DC, *dc*, exacte bifariam diviſæ in E*e*. Quantum ad Tuas objectiones, in eumdem fere modum ego objeceram. Et quidem primo intuitu videbam SALVATOREM quærere aliquam curvam, quæ non eſt in quæſtione, quod Domino *Marchioni* eadem hora, qua accepi ſolutionem *ſalvatorianam* reſcripſeram, ut &, ni fallor, Tibi in præcedentibus meis. Sed ecce, ut Dominus *Marchio* ad hanc objectionem repoſuit. *Lorſque Monſieur* SAUVEUR *m'aporta ſa ſolution, j'étois*, &c. Eamdem inſufficientem enumerationem eorum, ex quibus aptiſſimum eſt eligendum, etiam a me fuiſſe animadver-

TAB. IX.

ſam

ſam in Salvatoris ſolutione, colligere poteris ex iis, quæ Domino Hospitalio reſpondi, quorum ſtudio deſcriptionem retinui, ne forte alia quam quæ revera objeci, mihi affingi poſſent: En autem propria mea verba, ut videas, an quid inſit veritati non conſentaneum. *Je ſoutiens encore, que les lignes que Monſieur* Sauveur *ſuppoſe coupées en deux également*, &c. 1697 Febr.

Cæterum perbene obſervaſti in Salvatoris ſolutione neglectum veræ methodi infiniteſimalis, dum ille confundit diverſorum graduum differentiales; aliquando ſcilicet differentialem quantitatis infinite parvæ cum differentiali quantitatis finitæ, quæ duæ differentiales ad minimum uno gradu differunt: reſponderi quidem poſſe ipſe notas, quod quantitates finitæ quandoque differre poſſint differentiali ſecundi gradus, ſed id iſto loco non quadrat, niſi ſtatuatur angulus EAe [in fig. prima] infinities infinite parvus. Optima mihi videtur via, quando aliquid quærendum circa quantitates finitas & infinite parvas, ut primo omnes quantitates ſtatuantur finitæ, ut hic BF, quam conſiderarem tanquam finitam; unde communi modo indagarem quantitatem anguli FBD: quo generaliter cognito, fac in æquatione $BF = 0$, & ſic prodiret quantitas anguli FBD; & per conſequens poſitio lineæ, quam Dominus Salvator quærit pro tangente curvæ ſuæ.

Largior quidem in iſtis, quæ dedit Dominus Salvator multum ingenii & acuminis ineſſe, patet tamen etiam illum nondum poſſidere genuinam methodum talia tractandi, ſed quaſi in tenebris palpare, cum interdum quærat per longas ambages quod uno ductu calami abſolvi poteſt; teſte Problemate æquilibrii, * quod in caſu ſimpliciſſimo, poſt 27 analogias inſtitutas, nondum ad finem perducere poterat; cum tamen nil facilius fuerit, licet generaliter proponatur. Interim non dubito egregia ab eo exſpectari poſſe, ſi modo ſtrenue hiſce vacare velit. An ſit in Academia Scientiarum ignoro: puto tamen non eſſe, cum enim *Pariſiis* eſſem, ne nomen quidem audiveram. Quis ſit, quidve muneris gerat ex Hospitalio reſciſcam. Ipſum circa Ludum *Baſſetæ* aliquid Mathematice fuiſſe meditatum neſciebam; id videre optarem; nam *Frater*

* *De quo* Epiſt. VII.

Digitized by Google

1697 Febr. *ter* meus jam a longo tempore Opus molitur, quod *Artem conjecturandi* inſcribet, ubi non ſolum omnivarios Ludos Mathematice tractandi, ſed etiam alias in omni vitæ genere probabilitates ad calculum revocandi modum traditurus eſt. Neſcio autem annon opus reliquerit imperfectum; ſaltem mea, quæ olim contuli, ipſeque non ſpernenda judicavit, jam vix non expunget,......... Cæterum diu eſt, quod Dominus HUGENIUS aliquid exhibuit de *ludo Aleæ*; item in operibus Mathematicis in folio [*Ouvrages de Mathématiques*] quæ paucis abhinc annis prodierunt *Pariſiis*, aliquid videre eſt a FRENICLIO de combinationibus, ubi etiam agit de Sorte inveſtiganda certantium circa Electionem Senatorum *Genuenſium*.

Ex quo unam alteramve proprietatem curvæ celerrimi deſcenſus ſubindicavi Domino *Marchioni* HOSPITALIO, de novo ſperat, ſe penetraturum ante Paſcha in ſolutionem meam, itaque oblatam ipſi mittere differo, donec rurſus petat. *Je vous prie*, [inquit] *de ne me point envoyer vos ſolutions, ſi elles ne ſont pas encore parties; parce que cela m'oteroit le plaiſir de pouvoir penſer à vôtre Probléme, que je trouve de plus en plus curieux; je vous prie ſeulement de les tenir toutes prêtes pour me les envoyer dans le terme de Paques, qui eſt celui que vous avez fixé.*

Ex *Hollandia* mihi reſcriptum eſt Dominum MACKRELIUM, viſo meo Programmate nuper impreſſo quo Problema iſtud Eruditis propono, pro reſponſo hoc tantum dediſſe; *Que cela étoit bon pour les Allemans, mais que les Hollandois n'y répondroient pas.* Tale judicium à ſutore ultra crepidam judicante parum moror. Credo enim HUGENIUM, Mathematicorum *Hollandorum* maximum, ſi viveret, aliter fore judicaturum. Interim reſcripſi, ut ipſi indicetur, ſi ſolutionem intra terminum propoſitum dederit, ſe centum florenos à me obtenturum; ne Problema tanquam inutile quid infra dignitatem ſuam æſtimet, cui ſolvendo ne opellam quidem perdere dignari velit.

Hiſce diebus aliquid ad *Acta* miſi de Calculo exponentialium; * quod

* *Principia Calculi exponentialium ſeu percurrentium.* Acta Erud. 1697. Mart. pag. 125. Opp. Tom. I. N°. XXVI. pag. 179.

quod pro reſponſione inſerviet ad ea quæ Dominus Nieuwentitius circa hanc materiam de novo oppoſuit. Spero illum tandem acquieturum cenſuræ ſatis ſeveræ, niſi ſeveriorem amaverit. Eo ipſo ſchediaſmate reſpondi etiam Domino Tschirnhausio, ſed longe modeſtius, ita ut hoc forſan ipſum ſit fortius excitaturum ad edenda quæ premit. 1697 Febr.

Male ſibi conſulit Dominus Groningius, ſi Operis *Newtoniani* editionem recudendam in ſe ſuſcipit: quid enim expectandum ab homine qui talia non intelligit, imo quem vix communis Geometriæ limina tranſgreſſum credo? Tecum ſuſpicor *Hugeniana* ibi adjicere voluiſſe; forſan quia videbat, cum hic eſſet, me nonnullo deſiderio teneri illa obtinendi, atque ſic theſaurum ſibi eſſe non mediocrem, quem Orbi Litterato impertiendo, miror quantum de Publico mereri putabit. Hinc non operæ pretium duco, ut novas apud illum inſtantias facias, niſi ultro communicaverit. Remitto hic ſchediaſma *Tſchirnhauſianum*, maxima cum gratiarum actione; plura hac vice ſcribere nequeo, Vale.

Amplitudinis Tuæ

Obſequentiſſimus

J. Bernoulli.

Digitized by Google

EPISTOLA XLIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De NIEUWENTIITIO. *De Probl. celerrimi deſcenſus. De Curva ſegmentorum, i. e. illa quæ rectas per datum punctum actas ita ſecat, ut ſegmentorum data poteſtates datam ſummam efficiant.*

Vir Nobiliſſime & Experientiſſime, Fautor Honoratiſſime.

1697 Febr. CRedo ipſum Dnum. SALVATOREM, intellectis judiciis, aſſenſurum longe ſe ſe adhuc a propoſito Problemate abfuiſſe. Itaque non eſt quod ejus tentatæ ſolutioni amplius immoremur. Veriſſimum eſt ne illi quidem curvæ exhibendæ ſufficere, quam quæſiſſe videri poſſit, & quæ vereor ut ſit poſſibilis, aut intelligibilis.

Domini NIEUWENTIIT *Conſiderationes ſecundas* accepi tandem, miſſu ipſius, ut videtur, Auctoris, etſi ipſe non apparuerit. Nam Bibliopola *Batavus*, cum alios libros *Hanoveram* mitteret, hunc extra ordinem adjecit, ſuggerente opinor Auctore, vel ejus amico. Dici non poteſt, quam jucunda mihi fuerit harum conſiderationum inſpectio, & quam effuſos riſus expreſſerit; uſque adeo nugas agit Vir bonus. Exempli cauſa, vult numerum infinitum unum alio non eſſe majorem: Eſto numerus infinitus *m*. Jam ipſe agnoſcit in calculo dari 2*m*; unde ſequitur utique 2*m* eſſe majorem quam *m*, cum 2*m* ſit duplus ipſius *m*. Hic noſter reſpondet, negando 2*m* eſſe duplum ipſius *m*. Et ut abſurditatem cumulet abſurditate, rationem reddit ſuæ negationis, nempe 2*m* non fieri multiplicando numerum *m* per numerum 2, ſed multiplicando numerum 2 per numerum *m*. *Spectatum admiſſi riſum teneatis amici.* Qui talia concoquere poteſt, ab eo quis demonſtrationes ſeveras exigi ferat? *Quis tulerit Gracchos de ſeditione querentes?* Itaque conſtitui pro reſponſione, hæc & ſimilia quædam, verbote-

nus

nus excerpta, ad *Acta* mittere, judiciumque relinquere Lectori, annon talia recitaſſe ſit refutaſſe. Vellem mihi datum fuiſſet inſpicere quæ pro *Actis* contra eum mittis. . . . . . . 1697 Febr.

Si qui in *Batavis* Problema Tuum ſe indignum dicunt, næ illi vel rem non intelligunt, vel vulpem imitantur, quæ pyra, cum attingere non poſſet, acerba eſſe dicebat. Dnum. MAKREELIUM ſcio Dno. NIEUWENTIIT eſſe amicum; nam hic facit illius mentionem, & ille hujus Libellum priorem mihi, per quemdam iter hac facientem miſit: ſed non putabam, ſive affectu erga amicum, ſive invidia erga alios, eo ſe abripi paſſurum, ut res pulcherrimas contemneret, cum famæ ſuæ jactura.

Certe ſi HUGENIUS viveret & valeret; vix quieſceret niſi Problemate tuo ſoluto. Nunc nemo eſt a quo ſolutionem facile expectem, niſi a Dno. *Marchione* HOSPITALIO, aut a Dno. *Fratre* Tuo, aut a Dno. NEWTONO, quibus adderem Dnum. HUDDENIUM Conſulem *Amſtelodamenſem*, niſi dudum has meditationes ſepoſuiſſet. Aliorum neſcio an quiſquam toto Orbe nunc Problemati iſti par ſit. Uret interim *Batavos* iſtos & horum ſimiles nobis invidentes, quod Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS tam candide de methodis noſtris judicavit. Repeto autem, quod initio dixi, recte facturum Te, ſi eam tantum partem ſolutionis Tuæ edas, quæ Analyſin adhuc nonnihil involvit methodo, quam vocas indirectam. Mihi enim, neſcio an & Tibi, conſultum videtur nondum in interiora admittere homines ingratos, & beneficium poſtea ſtrenue diſſimulaturos.

Gratias Tibi debeo, quod in Programmate Tuo † honorificam mei mentionem facis. Problema quod ſubjeciſti pure Analyticum * nuper, otium nactus in itinere ad nundinas *Brunſwicenſes*, conſideravi in curru ſolus, & viam ſolvendi reperi, neſcio an Tuæ vel *Fermatianæ* affinem; certe expeditam & commodam, & ni fallor generalem.

Videtur autem Tua ſolvendi ratio non omnes curvas complecti, quæ quæſito ſatisfaciunt. Exempli gratia, cum curva quæritur, cujus

† Opp. Tom. I. N°. XXXIII. pag. 166.
* Ibid. pag. 169.

1697 Febr. cujus rectangulum ſub ſegmentis æquatur conſtanti, retentis Tuis valoribus pro x & y, in *Actis Junii* proximi, ſatisfaciet curva, in qua ſit $y = bxx : (xx + bc)$ poſito bc eſſe valorem rectangulorum conſtantem. Hæc autem curva in Tuarum numero non continetur, taleſque alias poſſem aſſignare infinitas. Sed & Problema quod in *Actis Junii* proponis & in Programmate per tranſcendentes a Te ſolvi ais, poteſt ſolvi per ordinariam quoque. Sed venio ad Problema, cujus ſolutionem generalem Analyſtis proponis. Sit potentiæ ſegmenti exponens e, ſegmenta ipſa ſint DB & D [B], poſito punctum conſtans eſſe D, & puncta, quibus recta per D curvæ occurrit, eſſe B & [B], & deſiderari ut $DB^e + D\,[B]^e$ ſit æqual. conſtanti b. Dico, retentis valoribus tuis ipſarum x & y, quæſito ſatisfactum iri ſi fiat $y = (x^{2e+1} - bx^{e+1}) : C$. Quanquam adhuc aliis modis infinitis itidem generalibus ſatisfieri, & ad formam Tuæ, etiam Series ſatisfaciens concinnari poſſit, plus minuſve pro arbitrio producenda. Ita vides me, in Tui gratiam, etiam hoc Problema tentaſſe; ſed vix talia ultra promittere auſim. Atque adeo ut vetulus ille athleta Virgilianus; *hic ceſtus artemque repono.* Vale

Dabam *Hanoveræ* 23. Februar. 1697.

Deditiſſimus
G. G. LEIBNITIUS.

EPIS-

Digitized by Google

EPISTOLA XLV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad Epiſtolam *Bernoullianam*, quæ deeſt.

De Solutione Hoſpitaliana *Probl. celerrimi deſcenſus.*

Vir Nobiliſſime & Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

PEr noviſſimum Curſorem ad Te dedi litteras, quas redditas 1697 non dubito. Nunc vel ideo ſcribo, ut *Hoſpitalianas* a Te Febr. acceptas ſtatim remittam. Suſpicabar Dnum. *Marchionem* Hoſpitalium [cui de ſucceſſu gratulabor] Problematis Tui ſolutionem tandem eſſe reperturum, ubi animum intenderet, ut ex noviſſimis meis videbis; interim non dubito Tuis litteris multum fuiſſe adjutum, unde id ipſum fortaſſe hauſit, quærendum eſſe $\int y^{n}\,ds$ minimum. Dubitatio quidem Tua, de legitimitate ratiocinationis qua utitur, ratione non caret. Revera enim poſito ds elemento curvæ, & ejus diſtantia ab horizonte poſita y, & pondere quo gravatur unumquodque corpus poſito $y^{n-1}\,ds$; momentum curvæ ex axe erit ſumma factorum ex pondere ducto in diſtantiam, ſeu $\int y^{n}\,ds$; ſed hinc non ſtatim ſequitur, centrum gravitatis curvæ ſic oneratæ per y^{n-1} maxime deſcendere, cum diſtantia Centri gravitatis ſit momentum ſemper diviſum per pondus totum $\int y^{n-1}\,ds$).

Verum enimvero, quia pondus abſolute ſumtum poteſt intelligi datum, Problemate ita concepto, ut quæratur curva, quæ datum pondus data lege diſtributum per ipſam quamproxime horizonti admoveat, ideo res ſuccedit feliciter, & dum momentum fit

1697 Feb. minimum, etiam centrum gravitatis maxime deſcendit. Et viciſſim ſi curva detur, cujus ſic oneratæ centrum gravitatis maxime deſcenderit, etiam momentum maxime deſcendet, adeoque erit $\int y^n\, ds$ minimum, unde cætera conſequuntur.

In Catenaria fit $n = 1$, unde fit $\int y\, ds$ minima, data $\int y^{n-1}\, ds$, ſeu data $\int ds$, ſeu data s curvæ magnitudine.

Catenariam, ſeu funiculariam, ſine tangentium conſideratione, ex ſola conſideratione maximi deſcenſus dari poſſe non eſt dubium; ſed cum talia per Seriem quærerem, de maximis iſtis nondum ſatis eram meditatus.

Olim cum Catenariam noſtram tractarem, notaveram in ſchedis ejus exemplo multa alia hujuſmodi Problemata maximorum vel minimorum a curvis præſtandorum poſſe ſolvi, & ad tangentium viam reduci; ſed poſtea, cum Problema Tuum aggrederer, jam ſciebam id non eſſe opus, & via hæc nonnihil eſt indirecta; ſed abrumpo coactus, ut hoc curſore Tibi Tua remittam. Vale & fave.

Hanoveræ, 26. Febr. 1697.

Deditiſſimo

Godefrido Guillelmo LEIBNITIO.

EPIS-

Digitized by Google

EPISTOLA XLVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De Arte conjectandi. Varia.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Venit etiam in mentem rurſus quod de Domini *Fratris* tui *Arte conjecturarum* ſcripſeras; ea erit haud dubie non contemnenda. Ego quoque talia jam olim ſum meditatus; præſertim in uſum Juriſprudentiæ & Politicæ. Voco Doctrinam de gradibus probabilitatis. An Dnus. *Frater* tuus aget etiam de arte, quam vocant, deciphrandi, quæ utique a Mathematico tractari meretur: Ea quæ hactenus in eam rem extant, parvi ſunt momenti. Vellem etiam oriretur aliquis qui mathematice tractaret omne genus ludorum. 1697 Mart.

In Problematis tui Analytici ſolutione fortaſſe rectius ſigna mutaſſem & dixiſſem $y = (-x^{2e+1} + bx^{e+1}) : c$. Revera tamen nihil refert, quæ ſigna ſumas, cum in arbitrio ſit facere c quantitatem negativam. Dominus Lic. Menckenius hæret nonnihil, vereturque ne tua in Nieuwentiitium ſint aſperiora. Ego, quanquam non viderim, quæ in eum ſcripſiſti, reſpondi tamen mihi videri non plane illi impune eſſe debere, quod tot tantaque abſurda in brevem libellum congeſſit; ne exemplo ejus incitatus ignariſſimus quiſque de rebus non intellectis ſcribere cavillarique audeat.

Etiam Dnus. *Frater* ad me ſcripſit, Problema tuum ſibi eſſe ſolutum, & mox alia difficiliora a ſe propoſitum iri; quod bene vertat: Miſit ſolutionem ad Dnum. Menckenium; qui dubi-

Digitized by Google

tat an lapſus termini ſit expectandus, ut edatur ea ſolutio. Reſpondi haud dubie eouſque differendam editionem, ne alii ſe præventos querantur. Vale,

Dabam *Hanoveræ* 5. Martii 1697.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA XLVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentes.

De NIEUWENTIITIO. *De Probl. celerrimi deſcenſus. De Catenaria per maximum Centri gravitatis deſcenſum determinanda. De Curva ſegmentorum.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1697 Mart. BInas Tuas noviſſimas ſucceſſivis Curſoribus recte accepi. Quæ notas de NIEUVENTITII *Conſiderationibus*, & ego notaveram; tot tantasque ineptias ibi contineri, (ut dixeram) Tibi imaginari non poteras, antequam illas vidiſſes; jam vero ſpectatum admiſſus, nec ipſe riſum tenes. Ridiculam illam diſtinctionem inter $2 \times m$ & $m \times 2$, quorum illud poſſibile, hoc impoſſibile dicit, etiam in excerptis, quæ Tibi ſub involucro ad Dnum. MENCKENIUM tranſmiſeram, tanquam mirabile quid, & in Matheſi inauditum notavi; ſed tamen laudando Virum ubique; affectabam enim nudam & hiſtoricam relationem ſcripti hujus, qualem Dominus MENCKENIUS, velut a ſuis excerptoribus, factam deſideraverat. Neſcio quo fato accidit, ut hæc excerpta nondum acceperit.

acceperit, uti ex ejus noviſſimis intelligo: ſi nondum miſeris, rogo quantocius mittas, una cum incluſis hiſce, quo ſuſpicionem ſuam videat eſſe vanam, dum ex ſilentio meo credidit me admonitione ſua, ut cum Nieuwentitio mitius agerem, offenſum fuiſſe. Sed ecce quod jam maxime miror in Litteris Dni. Menckenii, quando ſcribit, ad manus ſuas perveniſſe *ſecundas* iſtas *conſiderationes*, ſed plane nihil ibi deprehendiſſe cenſura adeo ſevera dignum; Auctorem omni modeſtia & honeſtate, imo non-niſi honorifice Tui noſtrique mentionem facere, &, quod plus eſt, ſibi conſultius videri, ut huic adverſario publico ſcripto reſpondeam; ut verbo dicam; Dus. Menckenius meam reſponſionem [ſane non eſt reſponſio, ſimpliciter enim inventa mea expono, ubi ad objectiones *Nieuwentitianas* non-niſi incidenter reſpondeo] *Actis* inſerere declinat; idque, uti dicit, Tui præcipue cauſa; ſe enim non dubitare, quin Tibi ſit ſumme diſplicitura rigida nimis caſtigatio. Tanta tamen non eſt, qua non graviorem meruerit. Vellem ut Dnus. Menckenius meum ſchediaſma [ſi imprimere nolit] Tibi videndum communicaret, quo ipſe deliberares an ſupprimendum eſſet. . . . . 1697 Mart.

Mihi perinde eſt, ſive contemnat, ſive æſtimet meum Problema Mackrelius. . . . .

Quidni addis etiam Wallisium, qui nil non ſolviſſe putat, iis quos Problemati meo pares exiſtimas? Huic, & Newtono, utrique bina exemplaria Programmatis mei ſub nudo involucro in *Angliam* tranſmiſi; an autem acceperint, neſcio. Intelligo a Dno. Menckenio, perveniſſe nuper a *Fratre* meo ſolutionem; .... ſic ergo duas habemus novas ſolutiones, alteram ab Hospitalio, alteram a *Fratre*, quas tamen non haberemus, niſi prior terminus aſſignatus prolongatus fuiſſet. . . . . Puto jam tempus eſſe ut noſtras ſolutiones *Lipſiam* mittas, quo omnes ſimul edantur. Approbo quidquid Tibi viſum fuerit de edenda, vel non edenda methodo mea directa. Schediaſma meum in Tuis eſt manibus; dele quod voles; gratum erit quocunque modo agas; poſſet interim mentio fieri, nobis eſſe Methodum talia directe ſolvendi, quam communicaturos nos eſſe privatim petentibus; non enim

1697 Mart. æquum eſt ut juſtus cum injuſto patiatur, & gratus cum ingrato excludatur.

Ecce jam quo pacto Catenariam vulgarem, ſine tangentium conſideratione, per methodum hanc directam determino. Eſto (*Fig.* 52.) curva quæſita AB, cujus elementum Bb, radii circuli oſculatoris LBE, Lbe, ſecantes horizontalem ER in angulo quocunque; Nunc, ut in curva celerrimi deſcenſus feci, ita & hic, centro L deſcriptos conſidero arcus Cc, Bb, Cc; &c. ex quibus eum quæro, qui ductus in ſuam diſtantiam, ob humillimum deſcenſum centri gravitatis ab horizonte, faciat minimum; ut habeam relationem inter LB & BE, unde deinde curvæ determinatio. Si ergo LE conſtans ponatur a, & LB, x: erit BE $a - x$; ſint autem Cc, Bb, Cc, ut LC, LB, LC, id eſt ut x; & CG, BH, CG, ut EC, EB, EB, EB. id eſt ut $a - x$:, ergo $x \times (a - x)$, ſeu $ax - xx$, debet æquari minimo; unde invenitur $x = \frac{1}{2}a$. Ex quo nunc colligo curvam funiculariam ABD, eſſe talem ut radius circuli oſculatoris productus ad horizontalem utique biſecetur ab ipſa curva; & hoc perfecte reſpondet curvæ noſtræ olim inventæ. Si enim examinetur, reperietur habere hanc proprietatem, & horizontalem, a qua puncta curvæ diſtare cenſentur, eſſe illam quæ tranſit per centrum funiculariæ R. Aſt, vide quid inſoliti hic contingat, quod nondum diluere poſſum: ſumma ipſorum Bb in AB debet utrique eſſe minimum, quia centrum gravitatis quam-maxime deſcendit; interim, exiſtente $x = \frac{1}{2}a$, $ax - xx$ non minimum ſed maximum eſt, id eſt $Bb \times HB$ majus quam $Cc \times GC$; & per conſequens videtur hac ratione reperiri curva, cujus centrum gravitatis, non quam-proxime, ſed quam-remotiſſime ab horizontali diſtet. Hæc nondum ſatis mihi conciliata fateor. Interim eodem modo omnes alias funiculariàs, ſine tangentium interventu, determinari poſſe facile vides.

Quod ad dubitationem meam reponis pro legitimitate ſolutionis *Hoſpitalianæ*, idem eſt quod ego ipſemet Domino *Marchioni* in ſui defenſionem ſimul ſuggeſſi, quando illi dubitationem meam aperiebam;

riebam; ſcilicet pondus curvæ oneratæ abſolute ſumtum poſſe intelligi datum; ſed hoc, ſi placet, nondum ad amuſſim ſatisfacit; nam licet unius curvæ portionis pondus ſit datum reliquarum tamen non item; videtur itaque conſiderata curvæ portione indeterminata, & ipſum pondus conſiderandum eſſe ut indeterminatum. 1696 Mart.

Quod quærendum ſit $\int y^n ds$ minimum, jam tum aperiebam Dno. Hospitalio, cum me rogaret, ut ſibi Problema mechanicum in pure Geometricum reductum exhiberem; ſed ei poſtea facem longe clariorem accendi.

Problema pure analyticum, quod in Programmate priori ſubjeci rite ſolviſti, & quod miror, cum infinitæ ſint ſolutiones, Tua illa ipſa eſt quæ mea. En Analyſin meam, ut ſi ſolutionem edis me quoque ſolviſſe teſtari poſſis. Eſto (*Fig.* 53.) DB, x; DC, z: exponens e, conſtans b, & alia utcunque aſſumta c; Ex hypoth. $x^e + z^e = b$. Reduco hanc æquationem ad aliam, ubi x & z analogam poſitionem utrobique obſervent [id quod fundamentum eſt in hujuſmodi ſcrutinio] multiplicando per $x^e - z^e$, unde habetur $x^{2e} - z^{2e} = bx^e - bz^e$, ſeu $x^{2e} - bx^e = z^{2e} - bz^e$; ergo DB: DC: [$x$: z], ſeu BF: CH $= cx \times (x^{2e} - bx^e)$: $cz \times (z^{2e} - bz^e)$: unde ſequitur quod ſi BF fiat $= cx \times (x^{2e} - bx^e)$, etiam CH habebit valorem analogum $cz. (z^{2e} - bz^e)$, & per conſequens curva ABC reſpondebit quæſtioni. Quod vero obſervas meam ſolvendi rationem non omnes curvas complecti, libenter agnoſco. Eſt enim impoſſibile, ut una eademque methodus omnes ſolutiones exhibere poſſit; quod enim jamdiu etiam reſpondi Dno. *Marchioni* Hospitalio ſciſcitanti, an poſſim demonſtrare omnes ſolutiones poſſibiles comprehenſas eſſe in illa Serie quam in *Actis* exhibui; quæ Series etiamſi infinities infinitas ſolutiones comprehendat; (bini enim quilibet termini infinitarum curvarum naturas exprimunt,) habeo tamen infinitas, ut ita dicam, methodos, quæ totidem Series ejuſmodi ſuppeditant. En quamdam, quam Hospitalio in eam rem communicavi. Re-

tentis

1697 Mart. tentis iiſdem litteris, oportet ut $xz = 1$. Eligatur quantitas compoſita ex x & 1 quomodocunque, exempli gratia $1 + x$ vel $1 + xx$, vel $1 + x^3$ vel $1 + x + xx$ vel $1 + xx + x^3$ vel $x + x^4$, &c. Sumamus ſimpliciſſimam $1 + x$, poſita $BF = ax^m \times (1 + x)^n$, determinandæ erunt m & n, aut ſaltem una per alteram, id quod ſic facio. Natura curvæ ABC, cum ſit ubique eadem, erit $CH = az^m \times (1 + z)^n$ ſed ob ſimilia triang. DBF & DCH, $x : ax^m (1 + x)^n = z : az^m (1 + z)^n$ vel $1 : x^{m-1} (1 + x)^n = 1 : z^{m-1} (1 + z)^n$ & conſequenter $x^{m-1} (1 + x)^n = z^{m-1} (1 + z)^n =$ [ob $zx = 1$ ſeu $z = \frac{1}{x}$]

$$\frac{1}{x^{m-1}} (1 + \frac{1}{x})^n = x^{-m+1} \frac{(x+1)^n}{x^n} = x^{-m+1-n}$$

$(1 + x)^n$ hinc ultimum & primum dividendo per $(1 + x)^n$ erit $x^{m-1} = x^{-m+1-n}$, id eſt $m - 1 = -m + 1 - n$ ſeu $n = -2m + 2$. Dico igitur ſi fiat $BF = ax^m (1 + x)^{-2m+2}$, habebitur curva quæſita ABC; quæ cum ſit m arbitraria, infinitis modis variari poteſt, & ut puto etiam Tua $y = bxx : (xx + bc)$ ibi comprehenditur, ponendo $m = 2$. En igitur aliam ſpeciem y, ſeu $BF = ax^m (1 + x)^{-2m+2} + bx^p (1 + x)^{-2p+2} + cx^q (1 + x)^{-2q+2}$ &c. Cujus termini, tam conjuncti quam ſeparati, ſatisfaciunt. Eligendo $1 + x + xx$, & ponendo $BF = ax^m (1 + x + xx)^n$, eodem ratiocinio reperietur $n = 1 - m$ & per conſequens erit y, ſeu $FB = ax^m (1 + x + xx)^{-m+1}$ vel per Seriem $y = ax^m (1 + x + xx)^{-m+1} + bx^p (1 + x + xx)^{-p+1} + cx^q (1 + x + xx)^{-q+1}$ &c. Hinc ad lubitum Series innumeræ conſtrui poſſunt quarum quælibet infinities infinitas continet ſolutiones.

tiones. Vides ergo quam impoſſibile eſſet generalem tentare methodum omnes poſſibiles complectentem. 1697 Mart.

Problema quod in *Actis* ſolvendum relinquo & in Programmate per tranſcendentes à me ſolvi dico, per ordinariam ſolvi poſſe nondum video. Tuum itaque modum per ordinariam ſolvendi libenter viderem. Vale,

Amplitudinis Tuæ

Groningæ ad.... Martii 1697.

Devotiſſimus

J. Bernoulli.

EPISTOLA XLVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De inventione Curvæ ſegmentorum. De catenaria & maximo deſcenſu centri gravitatis. De Probl. celerrimi deſcenſus ſolutionibus.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Gratum eſt, quod mea ſolutio ſecundi Problematis Tui a Tua non abludit: Video tamen methodos noſtras differre, & cum Tuam mihi aliquo modo ſignificaveris, meam viciſſim mittam; quam ſpero, ob generalitatem & extenſionem, Tibi non diſplicituram. Cum olim notaſſem locum ex *Epiſtolis Carteſianis* de Fermatio, has paucas voculas notaveram: *Hoc fieri poteſt* 1697 Mart.

1697 Mart. *per radices æquationum.* Hæc verba diu multumque fruſtra conſideravi; donec nuper, in curru dum ſolus *Brunſwicum* vehor, ſenſum eorum reperi, qui hic eſt: Perinde eſſe, ac ſi quæratur curva, quæ rectam propoſitam ita ſecet in duobus punctis, ut, ſublata una ex duabus incognitis curvæ & rectæ æquationem localem ingredientibus, prodeat æquatio ad unam incognitam, cujus ſecundus terminus, exempli gratia, ſit datus; poſito enim ſegmenta vel ipſorum potentias eſſe radices æquationis, utique ſumma eorum æquabitur termino ejus ſecundo. Sit ergo punctum fixum D, unde educta recta ſecet curvam quæſitam in punctis B & (B) & debet $DB^e + D(B)^e$ eſſe æquale ipſi $a^{e-1}b$, conſtanti.

DB ſit x; fiet æquatio (1) $x^{2e} - a^{e-1}bx^e + a^{2e-1}b = 0$. Hujus æquationis [1mæ] duarum radicum x^e, $(x)^e$, ſumma faciet $a^{e-1}b$. Præterea quoniam puncta B & (B) cadunt in rectam; ideo ex B ordinatim applicatam BF vel (B)(F) ducendo ad directricem quamdam, ſeu axem DF(F), & BF vocando y; utique ex natura rectæ DB(B) erit (2) $x : y = m : a$, poſito per rationem ipſius m ad conſtantiſſimam a, exprimi angulum rectæ hujus ad rectam primariam ſeu directricem.

Habemus ergo duas æquationes ex viſceribus Problematis ſuppeditatas, unam unius incognitæ, alteram ad rectam.

Hinc jam poſſumus invenire æquationes ad curvam ſatisfacientem, via generali omnes modos poſſibiles complexa. Nempe aſſumatur relatio qualiſcunque algebraïca, vel tranſcendens, apta inter m & b, intervenientibus ut lubet conſtantibus a & b, vel c &c., & hæc relatio dabit *æquationem tertiam*, cujus ope tollatur m, ſi placet ex æquatione 2, & habebitur *æquatio quarta*, in qua extabunt x, y & b. Hanc denique conjungendo cum æquatione prima, quæ etiam continet b, tollatur b, & habebitur *æquatio quinta* quæſita, ſolas continens indeterminatas, x & y, quæ proinde eſt ad curvam quæſitam. Si jam æquatio tertia aſſumatur ſatis ſimplex, verbi gratia $b = ac : m$ pro æquatione quarta fiet $cy : x = b$, quem valorem ipſius b ſubſtituendo in æquatione prima, fiet æquatio quinta

ta quæſita, nempe ad curvam, ſcilicet $y = (- x^{2e+1} + a^{e-1} b x^{e+1}) : c . a^{2e}$. 1697. Mart.

Ita vides hac methodo omnes ſolutiones poſſibiles contineri ſemel in univerſum. Tua autem mihi multo majore artificio & ingenio opus habere videtur, ut analogæ poſitiones bene formentur. Et meretur bene diſtincteque exponi, cum poſſit habere multos alios uſus. Cæterum meam vides itidem latiſſime patere, etiamſi ſcilicet non duo, ſed plura curvæ puncta in unum conjuncta aliquid præſtare debeant, ubi Tuo artificio uti difficilius foret. Idemque eſt ſi proprietas talis ſit, ut curva quæſita non a recta, ut hactenus, ſed ab alia curva ſit ſecanda. Ubi vides novum plane campum aperiri Analyſeos localis generaliſſimæ, pro quantocunque numero punctorum curvæ & pro ſummis, rectangulis, potentiis &c. Nondum autem neceſſe puto, ut hanc methodum publicemus, itaque hactenus eam Tibi ſoli ſignificare conſtitui: Rogo ut Tuos calculos pro curvis iſtis mihi diſtincte communices.

Dno. Menckenio ſcripſi denuo, ne ſupprimat juſtiſſimas cenſuras, præſertim cum mihi ſignificaveris non eſſe acerbas, ſed ſale conditas. Dudum ei Tuas priores miſi, nunc & alteras ſtatim ad eum deſtinavi. Solutiones pro *Actis* mittam. Fateor Te, non ſine magna ratione, in Dni. *Marchionis* ſolutione hæſiſſe, atque etiam vidiſſe per Te remedium, quod cogitavi. Difficultas, quæ ſupereſt, non eſt ſpernenda, quod ſcilicet curvæ portio ſit indeterminata, adeoque & pondus. Cogitandum interim relinquo, annon, hoc non obſtante, pondus illud quodcunque, pro illa portione curvæ, quæcunque ea ſit, ut determinatum aſſumi poſſit. Et hoc memini me & olim obſervaſſe. Quidquid ſit, hæſiſſemus fateor non parum & ſpatium deliberandi pro meditatione attentiore petiiſſemus, niſi conſtitiſſet de ſucceſſu, qui fecit ut accuratius inſpicientes contenti eſſe poſſimus.

In Tua ratione perveniendi ad Funiculariam, per viam deſcenſus maximi, miror conſenſum eventus, cum in methodo ipſa ſit difficultas: neque enim ſatis video, quomodo cum natura lineæ co-

1697 Mart. hæreat, ut ex arculis ſumatur ille cujus momentum ex horizontali ſit minimum.

Video Te magnam lucem Dno. *Marchioni* HOSPITALIO accendiſſe; cum ſuppeditaſti ipſi quæri, ut $\int y'' \, ds$ ſit minimum: Quod ſi adhuc clariorem, ut ait, facem ipſi accendiſti, minus miror quid ſucceſſit. Miſit mihi ſuas ſolutiones utriuſque Tui Problematis. ſed ſine analyſi, *Actis* inſerendas, quas cum Tua mittam Dno. MENCKENIO, ſed ita tamen ut tuæ mentionem factam in ipſa mea, per modum Epiſtolæ, ubi pro merito & ipſam, & directam methodum commendabo, quam tamen nunc ſupprimam, quia probas. Interim, ſi quid adhuc vis Tuis verbis addi, ſignificabis.

Puto me Tibi de Domini *Fratris* Tui ſolutione in meis nuperis ſcripſiſſe & notaſſe, quod in ſuis ad me litteris Cycloïdem diſerte nominarit. Tunc cum prorogabamus terminum, conſilium meum erat, ſuadere Tibi, ut primo termino elapſo, Domino *Marchioni* & Domino *Fratri* ſolutionem mitteres, ita ut prorogatio pertineret ad extraneos noſtrarum Methodorum; ſed neſcio quomodo oblitus ſum. Semper ſuſpicabar commercio Tuo futurum eſſe ut Domino *Marchioni* res ſuboleret; ſed cum fundamenta debeat, eo minus id diſplicere debet.

Vellem noſſe quæ Domini *Fratris* Tui methodus fuerit: ait ſe hac occaſione nova Problemata propoſiturum.

His ſcriptis, accipio litteras Domini MENCKENII, quibus video, non expectatis noſtris, feſtinaſſe ſtudioſe recenſionem Libri *Nieuwentiitiani*, quæ mihi non parum diſplicet; ita enim videtur homo eſſe, dixiſſe aliquid, cum dixerit nihil. Tua etiam contra ipſum ſunt adjecta; ſed cum priora non viderim, neſcio an quid ſit refectum.

Pene oblitus eram adjicere curvam algebraïcam Problemati priori Tuo ſatisfacientem, quam deſiderabas, & nunc ridebis, eſſe circulum; in eo enim utique factum ex quadrato unius ſegmenti in alterum ſegmentum erit ſemper idem, ſi punctum ex quo recta educitur, quæ ſegmenta contineat, ſit ipſum centrum; Cum ſegmenta

menta ſint ſemper æqualia, nempe radii......... Quomodo curvam inveſtigaris videre gratum erit. . . . . Vale.

Dabam *Hanoveræ* 19. Martii 1697.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA XLIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Deeſſe tamen videtur Epiſtola quædam Bernoulliana.

De Inventione Curvæ ſegmentorum tam Leibnitiana, *quam* Newtoniana, *&* Bernoulliana. *De Curva quæ rectas perdatum punctum actas ita ſecat ut ſolidum ſub uno ſegmento & alterius quadrato ſit datum. De* NIEUWENTIJTIO, *&* TSCHIRNHAUSIO. *De Brachyſtochrona datæ longitudinis.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

MIſi nuper, cum quibuſdam aliis, ſolutionem *Angli* Anonymi quam Te accepiſſe non dubito. Quod Tua Solutio ſecundi mei Problematis a mea non abludat, tanto jam magis miror, quod, per diverſiſſimam a mea Methodum, Te eo perveniſſe videam; cum tamen ex infinitis ſolutionibus, quæ ſatisfaciunt, perfacile in aliam incidere potuiſſes, ſi modo pro æquat. 3, $h = ac : m$, aſſumiſſes quamcumque aliam. Lubens credam Te multum in hac Methodo indaganda adjutum eſſe, voculis illis quas in Epiſtolis *Carteſianis* notaveras; *hoc fieri poteſt per radices æquatio-* 1697 April.

 num.

Digitized by Google

1697 April. *num.* Vellem ſcire, quo loco hæc verba extent, ut videam an de eadem materia agant: quem enim mihi ante illud tempus indicaveras locum, talia verba continere non video. Interim ut ad Methodum Tuam redeam; perſpexeris ex ſcripto illius *Angli* [quem NEWTONUM firmiter credo †] conſimilem, niſi omnino eamdem exhibuiſſe; hoc tantum diſcrimine, quod ille omnes illas Tuas quinque æquationes, quæ inſtituendæ ſunt, antequam ad quæſitam pervenias, una ſola comprehendat, artificio non ineleganti; ducta ſcilicet recta poſitione data, & rectas ex Polo egredientes tranſverſim ſecante, quam ut abſciſſam, illas vero ut applicatas conſiderat. Potuiſſet tamen & ipſe hanc viam adhuc magis abbreviare, ita ut non opus fuiſſet pro ſingulis poteſtatibus ſegmentorum novam quantitatem datam aſſignare, quandoquidem una generalis æquatio omnes continere poteſt. Ego enim ſolutionem univerſaliſſime conceptam ita enuntio. S, (*Fig.* 54.) ſuper recta poſitione data, tanquam axe, AD concipiantur curvæ datæ qualeſcunque AE, AF, AG, &c. voceturque AD x; applicatæ vero DE, DF, DG, &c. q, r, s, &c. ita ut q, r, s, ſint datæ per x & conſtantes: Dico ſi a puncto dato P, ducatur utcunque recta PKLMN ſecans axem in D; ſitque PK vel PL, $y =$ radici hujus æquationis $y^{2e} - qy^{e} + r^{2} = 0$, erit, poſita AF recta & parallela ipſi AD, punctum K vel L, in curva KIL, hanc habente proprietatem ut Rect. LPK ſit perpetuo æquale. Si vero AE ponatur recta parallela ipſi AD, erit, KIL curva talis ut $PK^{e} + PL^{e}$, faciat ubique eamdem ſummam. Quod ſi fiat PK vel PL, vel PM, $y =$ radici hujus æquationis $y^{3e} - qy^{2e} + rry^{e} - s^{3} = 0$, ſitque AG recta, & parallela ipſi AD; erit curva KILRM talis ut ſolidum ſub PK, PL, & PM ſit ſemper æquale: Si vero AE ſit recta, & parallela ipſi AD; erit ſumma $PK^{e} + PL^{e} + PM^{e}$ ſemper eadem. Sin AF eſſet recta parallela ipſi AD, foret ſumma rectangulorum poteſtatum $PK^{e}.PL^{e} + PK^{e}.PM^{e} + PL^{e}.PM^{e}$, æqualis. Eadem ratione inve-

TAB. X.

† *Et recte quidem.* Vide Tranſ. Philoſ. Menſ. Jan An. 1697. Num. 224. 225., & Opuſc. Newt. Tom. I. Opuſc. VI. pag. 289.

invenitur curva KILRMSN, cujus ſegmenta quatuor PK, PL, PM, PN, imperata præſtent; ſicque in altioribus. Atque hæc omnia fluunt ex notiſſimo illo principio algebraïco, quod ſcilicet q ſit = ſummæ radicum, rr = ſummæ rectangulorum radicum; s^3 = ſummæ ſolidorum radicum &c. Hinc poteſt etiam conſtrui curva quæ ſimul præſtet duo ex requiſitis; Exempli gratia, ſi curva KILRM debeat eſſe talis, ut non ſolum ſolidum ſub PK, PL, & PM, ſed etiam aggregatum potentiarum $PK^e + PL^e + PM^e$, faciat idem ubique. Dico ſi curvæ duæ AE & AG ponantur rectæ & parallelæ ipſi AD; ſatisfaciet curva KILRM utrique ſimul conditioni. 1697 April.

Vides quam amplus mihi pateat campus ex paucis, quæ Tu & *Anglus* ille ſuppeditaſtis; ita ut jam libenter agnoſcam, quod mea ſolvendi ratio per poſitiones analogas, tam uberes fructus ſimul producere nequeat; nam præterquam quod majori & difficiliori artificio opus habet; etiam ad curvas plurium quam duorum ſegmentorum, ut probe notas, adaptari poſſe nondum perſpicio. Interim mihi ſufficit, harum rerum me primum fuiſſe contemplatorem; nam quod de Fermatio dicis hæc eadem jam conſideraſſe, ſane nihil certe conſtat. Quantum ad prius Problema, quod initio ſtatim in *Actis* propoſui, ubi deſideratur curva ut ſolidum, ſub uno ſegmento & quadrato alterius ſit conſtans; Mea methodo reperio curvam, ſi non algebraïcam, ſaltem tranſcendentem. Quod vero Tu notas [joco forte] etiam algebraïcam ſatisfacere, ſcilicet circulum [pace Tua id dixerim], hic nihil aliud dicis quam quod a nemine ignorari poteſt; hæcque ſolutio ſimilis eſt illi. quam olim Wallisius dederat Fermatio quærenti cubum, qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis faciat quadratum, & viciſſim quadratum, qui cum ſuis partibus aliquotis faciat cubum, oſtendens iteratis vicibus unitatem pro numeris quæſitis. Sed quam contenti fuerint hac ſolutione Fermatius & Freniclius, non eſt ut hic dicam. Interim hac Methodo, per radices æquationum, moderamine quodam adhibito, feliciter ſolvo Problema per curvam algebraïcam. Sic æquationis $yy - qy + rr = 0$, radices

1697 April dices ſunt $y = \frac{1}{2} q + \sqrt{(\frac{1}{4} qq - rr)} = PL$, & $y = \frac{1}{2} q - \sqrt{(\frac{1}{4} qq - rr)} = PK$; nunc quia ex hyp. PL$q$, PK $= a^3$ conſtanti; erit $\frac{1}{2} qrr + rr\sqrt{(\frac{1}{4} qq - rr)} = a^3$, unde $q = (a^6 + r^6) : a^3 rr$: ſic curva AE jam non eſt arbitraria, ſed oportet eſſe talem, ut aſſumta curva AF quacumque, DE ſit $= (a^6 + DF^6) : a^3 DF^2$; quo facto, dico radicem æquationis $yy - qy + rr = 0$, producere curvam optatam KIL. Non ſecus operandum eſt in aliis; ut ſi quæreretur curva talis, ubi non quidem ſumma, ſed differentia potentiarum $PL^e - PK^e$, ſit conſtans; Tunc enim q, ſeu DE facienda eſt $= \sqrt[2e]{(a^{2e} + 4 DF^{2e})}$, & radix æquationis $y^{2e} - q^e y^e + r^{2e} = 0$, determinabit curvam quæſitam. Neſcio quales alios meos calculos pro curvis iſtis deſideres. Si eos cupias, quos inſtitui pro illis in *Actis* editis, lubenter communicabo, & quid aliud hactenus obſervavi ſuper hac materia.

Et ego miror quod Dnus MENCKENIUS adeo feſtinaverit recenſionem Libri NIEUVENTITII: ſcribit ſe etiam a Te accepiſſe relationem prolixam ejus Libri una cum mea, ſed poſt feſtum. Videtur Dnus. MENCKENIUS ſcrupuloſus nimis in edendis, quæ vel in minimis quempiam offendere putat; unde forſan conſulto noſtra expectare nolebat, & mea quoque ambo ſchediaſmata quæ adjecit, non parum mutilavit; quod quidem non ægre fero, dummodo aliquibus in locis argumentorum pondus non ſimul imminuiſſet. . . . .

In fragmento *Actorum* quod mihi miſiſti, video etiam Domini TSCHIRNHAUSII quadraturam univerſalem, * puto occaſione meorum nupero *Decembri* † editorum demum excogitatam; quid-

* *Quadratura univerſalis figurarum curvilinearum, per ſeries infinitas, ſimplici tranſpoſitione rectarum linearum formatas*, per D. T. Acta Erud. 1697. Mart. pag. 113.

† J. B. *Tetragoniſmus univerſalis figurarum curvilinearum per conſtructionem geometricam continuo appropinquantem.* Acta Erud. 1696. Dec. pag. 551. Opp. T. I. No. XXXI. pag. 162.

quidquid author dicat, illam ſibi jam a multis annis fuiſſe familia- 1697 April.
rem. Ob defectum figurarum capere non ſatis potui, an vel quouſque meo Tetragoniſmo congruat. Virum hunc magnifacio; ſed male me habet ejus vanitas, quod aliis inventa ipſorum ita invideat, ut nihil fere in lucem prodeat, quod ipſi non diu ante fuerit cognitum.

In præcedentibus Tuis dicis, Problema meum *Fratri* ſolutum eſſe, ſed mox, ea occaſione, a ſe alia longe difficiliora propoſitum iri.............. ſi publicum exercendum eſſet difficilioribus..... forſan & ego proponere poſſem, quod multum negotii faceſſeret: Exempli gratia: ***Si Lamina ſit data longitudinis, quæritur quamnam Curvaturam induere debeat, ut mobile ſuper illa a dato puncto ad datum punctum citiſſime deſcendat.*** * Sed vererer ne mihi reſponderetur. ***Quærit delirus, cui non reſpondet Homerus.***

Miror, quod hactenus nullam in *Actis* relationem videam Libri Dni. *Marchionis* Hospitalii, † cum tamen illum jam diu proculdubio acceperit Dnus. Menckenius. Vale & Fave

Groningæ 3. Aprilis 1697.

Amplitud. Tuæ
Obſervantiſſimo
J. Bernoulli.

P. S. In ratione mea perveniendi ad Funiculariam per viam deſcenſus, utique latet quædam difficultas, ſed optarem ut illam tolleres; legitima enim oportet ſit methodus ipſa, & neceſſarius nexus cum natura lineæ, cum non ſolum procedat in Funicularia ordinaria, quod accidenti cuidam reſcribi potuiſſet, ſed in omni alia, ſive æquabiliter, ſive inæquabiliter gravatus ſtatuatur funis........

. . . .

* *Vid.* Act. Erud. 1718. Febr. p. 74, aut, Mémoires de l'Acad. R. des Sciences 1718. pag. 120, *aut denique* Opp. Tom. II. N°. CIII. p. 254.
+ *Analyſe des Infiniment petits.* Paris 4°. 1696.

Digitized by Google

EPISTOLA L.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad Epiſtolam præcedentem & eam quæ intercidit.

De ſolutionibus Problematis celerrimi deſcenſus, præſertim Newtoniana. *De Epiſtola* BELVALLII. *De animadverſionibus ſuis in* Principia CARTESII. *De inventione Curvæ ſegmentorum, alteriuſque affinis.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1697 April CUm *Guelfebytum* irem, ferias illic acturus, mecum ſumpſi quæ ad Problemata Tua ſpectant, ut illinc *Lipſiam* expedirem, quæ *Actis* inferenda viderentur; quod & feci.

Et tranſmiſi ſolutiones, tuam pariter & *Hoſpitalianam* mihi commendatam curvæ Brachyſtochronæ. Alteram Tuam methodum directiorem permiſſu Tuo omiſi.................. Problema autem Tuum, non minus quam ſolutionem & præclarum in Opticis uſum ex merito commendavi, ſimulque inſtitutum Problemata modeſte proponendi laudavi.

His omnibus jam *Lipſiam* miſſis, poſt ferias demum Paſchales, *Hanovera* accepi Tuas noviſſimas, quæ illic hæſerant; quod initio litteras venientes mihi tranſmitti vetuiſſem, ſpem ſtatim a feriis redeundi; ſed conſilio deinde mutato, juſſi mitti quæ adveniſſent, & inter cæteras inveni quæ a BELVALLIO * accepta communicas. Solutionem Anglicam a NEWTONO eſſe ſuſpicor: Quoniam vero *Lipſienſia* ſemel expedita erant, non putavi cauſam eſſe cur in gratiam Anglicanæ ſolutionis adderem aliquid aut mutarem; quando *Angli*, nec nobis conſultis, nec termino expectato, ad publica-

* Mr. *Baſnage* DE BEAUVAL.

publicationem prorupere, & ſtudium Tuum merito elogio non maͨtant; nec a nobis aliquid de ſolutione ſua fieri poſtulant. Fateor tamen me, ſi maturius eam accepiſſem, fuiſſe iis adjecturum quæ *Lipſiam* miſi; ſed nunc, poſt feſtum, ſatis jam fatigatus, ab opera nec neceſſaria, nec deſiderata, non invitus abſtinui. 1697 April

Epiſtola Belvallii ſale aliquo mordaci mihi aſperſa videtur. Veluti cum ait omne genus humanum a Te provocatum, cum brevitatem temporis ab *Anglo* impenſum prædicat, & præmia honoris a Te diſtribuenda dicit. Poteris fortaſſe ironiam reddere ironiæ, & ad Academiæ Gallicæ uſum provocare, quæ præmia iis tantum diſtribuit, qui nomina ſua profitentur, ſimulque docere, ipſum ſolutionis Anglicæ authorem Tibi non omnino ignotum videri, & methodos noſtras rite applicare ſcienti unius diei ſpatium abunde ſufficere, neſcienti nec annos ſatis eſſe. Tuam vero provocationem, nec exemplis apud Geometras frequentatis, nec utilitate in publicum carere, & plurimum prodeſſe, ad eos ex ſomno excitandos, qui *Carteſiana* analyſi, vulgaribusque Methodis indormiunt. Neminem enim ſolutionem hujus Problematis dediſſe, niſi quis novas noſtras Methodos ſibi reddidiſſet antea familiares. Quod ſane ſecure etiam de *Anglo* ſolutore dicere potes. Newtonum enim, partim noſtra, partim noſtris Analoga meditatum eſſe intento ſtudio, ſatis conſtat.

Et Belvallii Epiſtolam, & Juvenis *Hagienſis* ſchedam utramque remitto. Hujus videtur laudanda voluntas, ſed dubitatio de aſcenſu deſcenſui mixto intempeſtiva eſt, ſatiſque oſtendit vim univerſalitatis ab ipſo non ſatis perſpectam, & veram ſolutionem etiam illa complecti debere, quæ ipſi videntur excludenda.

Is qui Problema Tuum facile putat, ſi modo Hypotheſis de motu aut quiete Terræ definiatur, vel parum in his rebus verſatus ſit oportet, vel rem fugitivo admodum oculo inſpexit. Ricciolus & *Stephanus* ab Angelis, aliique, diſputavere quænam futura eſſet linea gravium libere deſcendentium, ſuppoſito motu Terræ. Hoc ipſi Auctores iſtos nominanti videtur ſuccurriſſe, & impoſuiſſe, non invito, quo facilius declinaret. Nunc intellectis conſpirantibus aliorum ſolutionibus, quibus talis dubitatio in men-

1697 April. tem non venit, lapſum ſuum, ſi candore eſt prædιtus, libenter agnoſcet; & jam fatebitur, credo, Problema facile non eſſe, ſaltem ſibi aliiſque de ſua tribu. Cæterum video Dno. BEAUVAL ignotum non eſſe Juvenem *Hagienſem*, conſiliaque etiam inter ipſos fuiſſe communicata. Per hunc ergo diſces, credo, quis ſit Juvenis.

Animadverſiones quaſdam extemporaneas in partem generaliorem *Principiorum* CARTESII ad Dominum BASNAGIUM miſeram, tum ut legeret HUGENIUS, tum ut *Carteſiani* quidam, quibus communicandæ erant, viderent me non ſine ratione ab ipſo diſſentire. Has lectas [ſi tanti videntur] per occaſionem ad Dnum. *Gerhardum* MEJERUM, Theologum *Bremenſem* mittere aliquando poteris, additis *Tranſactionibus Anglicanis* pro me Tibi miſſis, ſi quid ſcilicet aliud illis ineſt, quam quod mihi deſcriptum jam communicaſti. Ex prioribus meis videbis NEWTONUM ſuam ſecundi Tui Problematis ſolutionem ex eodem mecum fonte derivaſſe, ſed circuitu tamen non neceſſario uſum eſſe. Vale

Dabam *Guelfebyti* 15°. April. 1697.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

Reſponſio ad præcedentem. P. S. Scriptis jam litteris, noviſſimas Tuas accipio. Cur æquationem $h = ac : m$ aſſumſerim cauſa eſt, quod ea ratione prodire vellem aliquid ſimplicius, quam ponendo $h = m$, quod prius conſideraveram. Nam ſi $h = m$ prodit non y ſed $\frac{1}{y} = bx^{e} - x^{2e}$. Vides autem valores iſtos duos ipſius h, ut ſit vel $\frac{1}{m}$, vel m, eſſe ſimpliciſſimos. Per quinque æquationes, præter neceſſitatem quidem, conſulto tamen, proceſſi; quia ſic melius patet principium inventionis & latitudo ſolutionis. Linearum ductus ſub elegantiori facie, rem ipſam, artemque reddit involutiorem; tantumque abeſt,

Digitized by Google

abeſt, ut Dnus. Newtonus, ex ſuo compendio rem proponendi, aliquid utile duxerit, ut potius involutus nonnihil, haud ſatis animadvertit una eademque æquatione locali comprehendi poſſe ſolutionem pro omnibus ſegmentis. Præterea conſiderandum, lineam, quæ curvam quæſitam in punctis conſpirantibus ſecat, poſſe eſſe aliam, quam rectam, in aliis Problematibus; quæ omnia diſtincte intelliguntur meo procedendi modo, ut ne nunc quidem, viſo *Newtoniano*, inde recedere velim. Egregia ſunt quæ porro addis, & profecto meretur hæc materia amplius excoli; eſt enim velut nova quædam linearum curvarum ſeu locorum Geometria. Interim quia Tua procedendi Methodus, qua ad cogitationem tam pulchram tamque utilem ductus es, etiam alios uſus habere poteſt & ipſi per ſe Analyſi aliquid addit; rogo ut eam diſtincte conſcribas, una cum iis quæ inde duxiſti, & mihi communices, perinde ac ſi altera illa nondum innotuiſſet. Cæterum videris non obſervaſſe quod de Circulo ſatisfaciente locutus Te ridere juſſeram. Et licet fatear non eſſe magni faciendas tales ſolutiones, qualis iſta per Circulum, aut *Walliſiana*, quam citas, per unitatem; ſunt tamen veræ, & ex earum rerum numero, quæ nulla quidem cum laude dicuntur, & tamen interdum non bene omittuntur. Si quis, exempli cauſa, dixiſſet, Problema cui Wallisius per unitatem ſatisfacit, non eſſe ſolubile in numeris rationalibus, peccaſſet, etiamſi nulla alia reperiri poſſet ſolutio. Item, ſi Tu dixiſſes Problema non eſſe ſolubile, niſi in tranſcendentibus; fuiſſes refutatus per eum, qui Circulum Tibi objeciſſet, & ſolutio perfecta utique, iſtas quoque, etſi nugatoriæ videri poſſint, comprehendere debet: per me ergo licet quaſi nugatorias appelles, vel ſemi-ridiculas, modo non plane uſu carere fatearis. 1697 April.

Oportet ut in litteris mentem meam non bene explicuerim, cum ita a Te accepta eſt, quaſi ego iſtam notationem [quod deſideratum fieri poſſit per radices æquationum] in *Epiſtolis* Cartesii repererim.. Reperi enim in meis excerptis, ſeu notatis, ante multos annos conſignatis, cum *Epiſtolas* Cartesii forte volverem, ubi, re tunc conſiderata, de modo hæc annotaveram obiter. Cum igitur Problema Tuum inſpiciens, meminiſſem pro-

1697 April miſſorum Fermatii, & præterea recordarer, me illa olim legentem meas quaſdam meditationes habuiſſe; quæſivi illam ſchedam, & forte, præ multis aliis conſervatam, prompte reperii, ubi hæc quæ dixeram verba mea deprehendi, quæ primo aſpectu non intellexi, donec in curru explicatio in mentem veniret,

Dni. ***Marchionis*** Hospitalii Librum ſpero jam in *Acta* relatum eſſe: nam & ego admonui Dnum. Menckenium ne nimis differatur. . . . .

Conſidera quæſo, ut hoc obiter addam, an Tua conſtructio, qua facis $PL^2 . PK = a^3$ non ſimul faciat $PK^2 . PL = a^3$; nam videbis pro hoc eumdem prodire Calculum, ſeu valorem ipſius a, qui prodit pro illo ex ipſa natura radicum ambiguarum, quod ſi jam ſit $PK^2 . PL = a^3 = PL^2 . PK$, fiet $PK = PL = a$; id eſt, P erit centrum circuli per K & L tranſeuntis, radiuſque a. Ita incidemus in eam ſolutionem, quam recuſas. Itaque amplius aliquid requiri puto, ut ambiguitati iſti obnoxii non ſimus. Et viam video, dum rumpuntur laquei ſeu vinculum ambiguitatis, ſuperanturque radices actuali extractione.

Utique non temere fieri oportet, quod via illa quam iniſti in omni genere Funicularia ſuccedit; ſed hoc aliunde fieri neceſſe eſt, nam ipſa via per ſe conſecutionem non oſtendit. Itaque amplius deliberandum cenſeo; & ipſe quoque, rem attentius meditans, video perinde eſſe in Tua methodo, ac ſi quæramus parallelarum ſeu condeſcriptarum eam, cujus momentum ex recta horizontali eſt minimum vel maximum,

Pene annotare oblitus eram non eſſe neceſſe, ut peculiarem Calculum pro differentiis quæras, ſed ejuſdem eſſe Calculi, facere ut ſumma poteſtatum a ſegmentis, & ut differentia ſit conſtanti æqualis. Nam, ſi una radix ſit negativa, ſecundus terminus erit differentia duarum radicum, ut ſi ſit $yy - qy - rr = 0$ pro $yy - qy + rr = 0$, priore modo q eſt differentia, poſteriore jam uſurpato ſumma. Quod ſi eſſet $yy + qy - rr = 0$, $- q$ eſſet exceſſus radicis negativæ ſuper affirmativam, adeoque q maneret differentia,.

P. P. S. S.

P. P. S. S. His omnibus ſcriptis, in manus meas veniunt *l'Hiſtoire des Ouvrages des Sçavans* Domini BASNAGE-BEAUVAL, ubi complectitur menſes Decembrem, Januarium, Februarium, ibi p. 284. inſerit Problema Tuum, ſed verba, ubi de me loqueris aliter interpretatus eſt, quaſi ſcilicet ego dilationem a Te petierim, ſolutionem ſub exitum termini promittens, unde Lector me ſolutionem tunc nondum habuiſſe & tanto tempore indiguiſſe credet. † Idque etiam videtur feciſſe, ut *Angli* illius promptitudinem nobis quodammodo exprobaſſe videatur. Itaque rogo, ut eum per occaſionem moneas, me quoque ſtatim ſolutione fuiſſe potitum.

† En Baſnagii Verba.
M. BERNOULLI *Profeſſeur en mathèmatique a* Groningue *propoſa l'année derniere au mois de Juin un Problème a tous les habiles gens de l'Europe. Il donna 6 mois pour le résoudre a quiconque voudroit l'entreprendre. Ce terme étant expiré, Mr.* LEIBNITZ, *l'un des plus penètrants Mathèmaticiens de ce Siecle, lui propoſa de prolonger le terme juſqu'a Paques 1697*, lui promettant une Solution dans ce tems. *Mr.* BERNOULLI *y a conſenti &c.*

EPISTOLA LI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De ſolutione Newtoniana *Problematum ſuorum. De inventione Curvæ ſegmentorum.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

NEgotia quædam, per aliquot hebdomadas me detinentia, reſponſionem hanc hucuſque retardarunt. Gratias habeo non mediocres pro officio præſtito in tranſmittendis noſtris ſolutionibus, præſertim pro commendatione, quâ meam proſecutum Te ais, ſed forſan præter meritum. 1697 Mai

Cum

Digitized by Google

1697 Mai Cum nuper Dno. MENCKENIO ſcriberem, miſi etiam ſolutionem Anglicam, ut de illa faceret quod vellet. In *Tranſactionibus Philoſophicis*, a Domino SLOANE mihi miſſis, quantum ex idiomate *Anglico* intelligo, nihil præterea continetur, quod operæ pretium ſit; mittam tamen ſi deſideras. In eumdem fere modum, quo conſulis reſcripſi BELLAVALLIO: non opus eſſe longo tempore ad ſolvendum Problema noſtrum illis qui noſtra callent, atque adeo me non mirari, Anglum illum [NEWTONUM eſſe ſuſpicari me dicebam], ſecundo ſtatim die a receptione Problematis, ſolutione fuiſſe poſitum, cum Methodo aut noſtra aut noſtræ ſimillima utatur: ſed alium hac deſtitutum, ſi prima applicationis die non ad ſolutionem pervenerit, nec ſecundo die, ſed nec poſt annum eo perventurum eſſe. Interim BELLAVALLIUS, miror, nec reſpondit, nec Animadverſiones Tuas promiſſas mihi miſit. Inſpexi locum quem indicaſti Febr. *de l'Hiſtoire des Ouvrages des Sçavans*; indigne admodum fero, quod ita peſſime egerit interpretem verborum meorum; quamprimum ipſi ſcribam, culpare incuriam non obliviſcar.

Verum eſt Dnum. NEWTONUM, ſuo modo proponendi & ſolvendi Problema meum ſecundum, rem ipſam præter neceſſitatem involutiorem reddidiſſe, dum pro diverſis poteſtatibus diverſas æquationes quærit; meo tamen modo, quo Methodum *Newtonianam* correxi & amplificavi, mihi videor rem ſatis clare explicaſſe; dum omnes caſus una eademque æquatione comprehendi, adeo ut, hoc in paſſu, Methodus illa ita correcta Tuæ per 5. æquationes procedendi non cedat; imo brevitate & ſimplicitate quodantenus illam præferrem, & credo facile etiam applicari poſſe, quando linea, ſecans in punctis [ut dicis] conſtantibus, non eſt recta, ſed curva.

Jam quia petis, aperiam prima mea cogitata circa hanc materiam. Methodus, qua initio uſus ſum per ſat magnas ambages me eo deducebat; ejus me tamen eo minus pudet, quod nonnullius utilitatis eſſe poſſe dicis. Sic itaque procedebam pro invenienda
TAB. X. curva, ubi rectangulum ſegmentorum ſit datum. Eſto (*Fig.* 55.)
DB,

DB, x & BE y; ponatur $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + ex^{\varepsilon}$ &c. (quouſque libuerit) per hyp. $CD = \frac{1}{x} = x^{-1}$; Ob ſimil. triangul. DBE, DCF; $CF = ax^{\alpha-2} + bx^{\beta-2} + cx^{\gamma-2} + ex^{\varepsilon-2}$ &c. = (ob analogam relationem punctorum C ad F & B ad E) $ax^{-\alpha} + bx^{-\beta} + cx^{-\gamma} + ex^{-\varepsilon}$ &c. Comparentur jam harum duarum Serierum termini, [ſed non earumdem litterarum, ſecus omnes æquationes identificarentur] ut inveniantur potentiæ & coefficientes; in hunc modum $ax^{\alpha-2} = bx^{-\beta}$, $bx^{\beta-2} = ax^{-\alpha}$, & $cx^{\gamma-3} = ex^{-\varepsilon}$, $ex^{\varepsilon-2} = cx^{-\gamma}$, &c., unde elicitur $b = a$, $\beta = 2 - \alpha$, & $e = c$, $\varepsilon = 2 - \gamma$, &c. Ergo ſubſtitutis valoribus pro b, β, e, ε, &c. reperietur hæc Series infinitas continens ſolutiones, $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha} + cx^{\gamma} + cx^{2-\gamma}$ &c. quam in *Actis* dedi. Quod ſi ſegmenta non ex communi puncto D egrediantur, ſed ad axem aliquem parallelæ conſtituantur, id eſt, ſi (*Fig.* 56.) quæritur curva GHF, ut ducta ad poſitione datam DE, recta GFE in angulo dato GED, rectangulum ſegmentorum GEF, ſeu CDB, ſit datum, reperietur eadem methodo [poſitis EF ſeu DB, x; FB, $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + ex^{\varepsilon}$, &c. hæc Series $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha} + cx^{\gamma} + cx^{-\gamma}$ &c. Per analogiam relationis punctorum hæc duo aliter ita ſolvuntur. Sit DB, x; DC, z, per hyp. $xz = 1$ ideoque etiam $x^n z^n = 1$, [n eſt poteſtas arbitraria, ut ſolutio tanto generalior evadat] : multiplicetur utrumque per $x^{-n} - z^{-n}$, [quod facio ut x & z utrobique poſſint habere poſitionem analogam] erit enim $z^n - x^n = x^{-n} - z^{-n}$, ſeu $x^n + x^{-n} = z^n + z^{-n}$; hinc ſi fiat in *fig.* 56. $BF = x^n + x^{-n}$, ſeu $CG = z^n + z^{-n}$; prodibit curva quæſita-

1697 Mai.

1697 Mai. quæſita FHG, ſed pro *fig.* 57. facienda eſt $BE = x.(x^n + x^{-n})$,
TAB. XI. ſeu $CF = z.(z^n + z^{-n})$, tunc ſatisfiet quæſito.

Ecce jam modum quo tunc-temporis Problema ſolvere inſtitueram, quando ſumma poteſtatum ſegmentorum datur, $DB^n + DC^n = 1$,
TAB. X. [*fig.* 55.] ſed ridebis prolixitatem. Quærebam prius curvam ABCG cujus ſegmentorum ſumma eſſet conſtans, $DB + DC = 1$: in hunc finem ponatur iterum DB, x; BE, $y = a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. Ex proportione DB $[x]$; DC $[1 - x] =$ BE $[a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$ &c.$]$: CF, invenitur

$$CF = \frac{a}{x} - a$$
$$+ b - bx$$
$$+ cx - cxx$$
$$+ exx - ex^3$$
$$+ fx^3 - fx^4$$
$$+ gx^4 \text{ \&c.}$$

ex analogia vero relationis punctorum in curvâ, ponendo in Serie $a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ &c., $1 - x$, loco x, habetur

$$CF = + a$$
$$+ b - bx$$
$$+ c - 2cx + cxx$$
$$+ e - 3ex + 3exx - ex^3$$
$$+ f - 4fx + 6fxx - 4fx^3 + fx^4$$
$$+ g - 5gx + 10gxx - 10gx^3 + 5gx^4 - gx^5$$
$$\text{\&c.} \quad \text{\&c.} \quad \text{\&c.} \quad \text{\&c.} \quad \text{\&c.} \quad \text{\&c.}$$

Continuatis hoc modo quouſque lubuerit, [quo magis vero continuantur, eo ſolutio erit generalior & fœcundior) comparentur utrinque dimenſionum ipſius x æqualium coefficientes, $a = 0$; $-a + b = a + b + c + e + f + g$ &c.; $-b + c = -b - 2c - 3c - 4f - 5g$, &c., $-c + e = c + 3e + 6f + 10g$, &c.; $-e + f = -e - 4f - 10g - 20h$, &c. quibus rite collatis prodit $a = 0$, $f = -2c - 2e$, $g = c + e$, $h = 0$, ita ut b, c, e, maneant arbitrariæ; cæterarum vero ſubſtitutis valoribus reperietur æquatio

æquatio talis $y = bx + cxx + ex^3 - (2c - 2e)x^4 + (c+e)$ 1697 Mai.
x^5; quæ exprimet naturam curvæ ABCG, in qua ſumma ſegmentorum erit conſtans, DB + DC. Hac autem inventa, altera illa, ubi poteſtatum ſumma dari debet, facillime conſtruitur abſcindendo tantum (*Fig.* 57.) Dc ex DC, Db ex DB, Dg ex TAB. XI.
DG, Da ex DA, quæ ſint ut $\sqrt[n]{DC}$, $\sqrt[n]{DB}$, $\sqrt[n]{DG}$, $\sqrt[n]{DA}$, &c. Habebitur nova curva, $abcg$, ubi ſegmentorum poteſtates $Db^n + Dc^n$ ſeu $Da^n + Dg^n$, facient ubique eamdem ſummam, prout requirebatur. Vides quam longa via inceſſerim, ſed aliam tunc non quærebam; contentus ſcilicet attigiſſe ſcopum. Biduo enim poſt, cum talia iterum meditarer, ſe ſe ultro offerebat, facilior ille ſolvendi modus, quem in anterioribus meis Tibi communicavi, cujuſque ope ſtatim incidi in curvam tranſcendentem, cujus ſegmenti quadratum ductum in alterum ſegmentum producat ſolidum datum & quidem ſic. Sit [*Fig.* 55.] DB, x, BE, $y =$ TAB. X.
$x^m(1+x)^n$ [loco $(1+x)^n$ poſſem aſſumere quamcunque aliam quantitatem ex x & conſtanti compoſitam] jam ſi CD×DBq $= 1$, erit CD $= \frac{1}{xx}$; ergo propter DB : DC = BE : CF, erit CF $= x^{m-3}(1+x)^n$. Sed ob analogiam relationis punctorum B & C ad E, & F; erit CF $= (\frac{1}{xx})^m (1 + \frac{1}{xx})^n =$ $x^{-2m-2n}(xx+1)^n$ ergo $x^{m-3}(1+x)^n = x^{-2m-2n}$ $(xx+1)^n$. Ergo etiam logarithmi $(m-3)lx + nl(1+x)$ $= (-2m-2n)lx + nl(xx+1)$: Unde $m = ((-2n+3)$ $lx - nl(1+x) + nl(xx+1)) : 3lx$. Si itaque x elevetur ad hanc dimenſionem m, & multiplicetur per $(1+x)^n$, habebitur æquatio pro curva quæſita; quæ ope Logarithmicæ conſtrui poteſt, & per conſequens ex earum numero, quas percurrentes appellavi.

Nunquam negavi veritatem ſolutionis per Circulum, ſed aliud eſt verum eſſe, aliud ſatisfacere intentioni proponentis. An credis

Digitized by Google

1697 Mai. me non prævidiſſe Circulum ? Licet illum non diſerte excluſerim, excluditur tamen eo ipſo quod nemini non obvius eſt. Adde quod neque Circulus ſatisfaciat, quando ſegmenta non in puncto coeunt, ſed quando ad axem ſunt parallelæ, ut in fig. 56. Cum itaque proponentis ſcopus ſit acumen Solutoris explorare, neminem putabam fore, qui mihi Circulum, ut ſolutionem legitimam, qualem ego deſiderabam, obtruſurus eſſet; ſed Tuum mihi ingenium ſatis ſuperque perſpectum eſt, atque ideo non dubitavi, quin joco id fuerit, quod allegaveris Circulum. Aſt neſcio, an a quopiam minus mihi familiari hunc Circulum toleraſſem.

Jubes me conſiderare, an conſtructio mea, quæ in præcedentibus meis feci $PL^2 . PK = a^3$ non ſimul faciat $PK^2 . PL = a^3$, ideoque $PK = PL = a$; id eſt annon curva mea KIL ſit Circulus, cujus centrum P; & ſic annon incidamus in eam curvam, quam recuſo, ſed, pace Tua, ipſe videris rem non ſatis conſideraſſe. Minime enim ſequitur, ſi $PL^2 . PK = a^3$, ideo etiam eſſe $PK^2 . PL = a^3$: neque pro hoc idem calculus prodit. Sed etiam nulla ambiguitas radicum hic adeſt, quia non promiſcue conſideravi quadratum alterutrius ſegmenti, ſive majoris, ſive minoris, ſed ſumſi conſulto ſegmenti ſeu radicis majoris quadratum, quod multiplicavi per ſegmentum ſeu radicem minorem. Hinc longe alia curva prodiret, ſi aſſumeretur $PK^2 . PL = a^3$, quæ tamen nihilominus ſatisfaceret. Verum quid opus eſt verbis, ſi contrarium ejus quod putas, res ipſa probat ? Conſtructio mea erat

TAB. XI. talis; aſſumta (*Fig.* 58.) curva quacumque AF, cujus applicata DF vocetur r; fiat alia AE, cujus applicata DE ſeu q ſit $= (a^6 + r^6) : a^3 rr$; dico ſi ſumatur $PL =$ radici majori, & $PK =$ radici minori, hujus æquationis $yy - qy + rr = 0$, curvam KIL fore quæſitam. De veritate hujus conſtructionis non dubitas, quia in præcedentibus vidiſti rationem; ſed urges KIL eſſe Circulum, cujus centrum P: quid ſi autem oſtendam PK & PL juxta conſtructionem meam eſſe variabiles, numquid ſententiam mutabis? Radices dictæ æquationis ſunt $y = \frac{1}{2} q -$

$\sqrt{} (\frac{1}{4}$

$\sqrt{(\frac{1}{4}qq - rr)}$ & $y = \frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq - rr)}$. Subſti- 1697 Mai.
tue valorem aſſignatum ipſius q, & habebis y, ſeu $PK = \frac{r^4}{a^3}$, & y ſeu $PL = \frac{a^3}{rr}$; quarum utraque variabilis eſt, niſi ponas r conſtantem, id eſt AF rectam & parallelam ipſi AD; quo ſolo caſu KIL eſſet Circulus, cujus P centrum: Vides etiam ſimul quod $PL^2 . PK$, ſeu $\frac{a^6}{r^4} . \frac{r^4}{a^3} = a^3$ conſtanti; non autem $PK^2 . PL^{\cdot}$, ſeu $\frac{r^8}{a^6} . \frac{a^3}{rr} = \frac{r^6}{a^3}$. Sublata tua difficultate jam alia ſe prodit, videtur enim [cum PK, PL prodeant in quantitatibus rationalibus] puncta L & K non eſſe in eadem curva, ſed in duabus diverſæ naturæ; ſi hoc eſt, erit methodus *Newtoniana* fallax, & Tua quoque laborabit. . . . . &c.

Mai. 1697.

EPISTOLA LII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Curva ſegmentorum. Obſervatio Dioptrica. De Machina arithmetica ſua. De ſolutionibus Curvæ Brachyſtochronæ. De Problemate Iſoperimetrico. De TSCHIRNHAUSIO.

Nobiliſſime & Celeberrime Vir, Fautor Honoratiſſime,

. . . .

GRatias ago pro Tua methodo ſolutionis curvæ per duorum quorumcunque punctorum certo modo inter ſe relatorum 1697 Mai.

 conſ-

Digitized by Google

1697 Mai. conſpirationem determinatæ; Et vellem eam produci etiam ad plura puncta, non quia ad hæc Problemata neceſſe eſt [quæ aliter commodius ſolvimus] ſed quia in aliis utilis eſſe poteſt. Cæterum cum de Problemate aliquo ſolvendo agitur, meus ſcopus non ſolet eſſe, quem memoras, explorare acumen Solutoris, ſed vel præſtari aliquid utile aut elegans, vel ſaltem augeri artem meditandi. Et ſolutio, quæ non comprehendit omnes conſtructiones, etiam facillimas, habet aliquid imperfecti. Et jam notavi tales proferentem non laudari, ſed interdum tamen excludentem culpari.

Cum viderim eamdem Tibi prodire q, vel DE, ſive ponamus y eſſe $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq - rr)}$ ſive y eſſe $\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - rr)}$, feſtinatio alia agentis fecit, ut vererer, ne incideres in Circulum; ſed bene mones, quod & ſtatim attendenti patet, id per ſe caveri, & ceſſare hic ambiguitatem mutatis ſignis, adeoque non eſſe neceſſarium in tali caſu ut formulas extrahibiles quæramus. Quod vero occaſione eorum, quæ de formulis extrahibilibus, ſeu in rationales abeuntibus ad ſeparandas inter ſe diverſas radices dixi, vereris ne ſeparatio iſta contingat nobis invitis, & diverſæ radices ſint ad diverſas curvas; id cenſeo non eſſe metuendum: vel enim non fiet extractio; vel ſi ſuccedet, deſtruetur id quo radices diſtingui poſſent; quod ſi hoc non fiat, utique curva proveniens non erit apta ad ſcopum, ſed vitanda. Et vitabitur ſane, ſi extractionem indefinitam non procuremus nova explicatione ipſius x. Itaque ambo fruſtra aliquid mali veriti ſumus; utiles tamen ſunt dubitationes iſtæ, ad res penitius noſcendas. Cæterum ſive per quinque illas æquationes ſimpliciſſimas, & ſemel in univerſum valentes mecum procedas, ſive non, res eadem eſt; poſt inventionem ſupprimi aut larvari poſſunt, interim exhibent progreſſum, & velut gradus mentis in inveniendo.

Dominus *Frater* Tuus in litteris, quibus mihi ſolutionem ſuam ſignificat, proponit mihi obſervationem quamdam ſuam dioptricam, nempe ſi vitrum plano-planum ad axem viſionis valde obliquum ſtatuatur, dextrum per illud incipere apparere ſiniſtrum & viciſſim, ſupero tamen & infero ſitum ſuum ſervante; cauſam ſe ex principiis

piis opticis nondum reperire potuiſſe. Hanc inquiſitionem in reſ- 1697
ponſione declinavi, cum longe aliis ſim occupatus, & talia at- Mai.
tentionem non vulgarem requirant. Venit poſtea in mentem, ſæpe fieri ut planæ habeantur, quæ circulares ſunt ex centro admodum longinquo, vel alterius figuræ; atque ita quærendum fore, an ex quacunque diſtantia hoc ipſi apparuerit, & an ex pluribus eodem modo. Si quid hic ſuppeditare poteris, operæ pretium facies.

Quæſivit etiam de Machina mea Arithmetica, cujus & nuper & olim viſæ Dn. de Tschirnhaus in noviſſima Libri ſui editione meminit. Reſpondi nihil eam penitus habere commune, nec cum Logarithmis, nec cum Rhabdologia *Neperiana*, quam alii poſtea in rotulis, vel aliis formis exhibuere, & magnorum numerorum multiplicationes vel diviſiones æque eſſe in ea faciles ac parvorum, & nullis opus eſſe additionibus vel ſubſtractionibus auxiliaribus in multiplicando, vel dividendo: ſed Machinam eſſe ſumtuoſam, & multarum rotarum inſtar horologii; nam interrogaverat an mediocri pretio haberi poſſet. Duo exempla habeo; ſed malo rem eo deducere, ut plura elaborentur antequam publicem. Rudimenta olim *Galli*, *Angli*que viderunt. Magno cum applauſu. Hugenius, qui inſpexerat, aliquoties admonuit ut abſolvi curarem; quod non ſine magno ſumtu tædioque factum eſt, dum varie mihi cum opificibus fuit conflictandum; ſed nunc contentus ſum inventum ab interitu vindicatum eſſe. Productus multiplicationis poteſt in jam elaborato exemplo aſcendere ad 12 notas; multiplicandus vero numerus ad notas 8; ne quis rem in exiguis tantum numeris exhibitam putet. Sed hoc occaſione litterarum Domini *Fratris* Tui; Vale.

Dabam *Hanoveræ* 26 Mai. 1697.

Deditiſſimus

Godefridus Guillelmus Leibnitius.

P. S.

1697 Mai. P. S. His jam ſcriptis, mitto quæ in *Actis Maii* de Curva Brachyſtochrona variorum ſolutiones editæ ſunt, uti ad me miſit Dominus MENKENIUS *, cum Litteris 22 Maii datis. Volui ut ſtatim acciperes, quia Dominus *Frater* Tuus Tibi potiſſimum nova Problemata proponit, termino & præmio ſtatuto; quod videtur faciendum ſibi putaſſe, quia Problemata quæ proponit non ſatis elegantiæ per ſe, vel utilitatis habere videntur; niſi quod forte artem inveniendi augebunt. Gaudeo interim, quod verba ejus nihil habent amari vel aculeati, imo commendationem Problematis Tui continent. Judicabis ipſe, an putes per Problemata ejus augeri poſſe artem inveniendi, quo caſu Te digna erunt.

Dum hæc ſcribo, non poſſum mihi temperare quin Problemata conſiderem. Prius de curva, quæ, ex omnibus ſuæ ſpeciei, & baſeos, promtiſſime ad perpendiculum datum accedat, determinatum numerum requirit; qui quantumvis prope verum [ſi rationalis non ſit] haberi poteſt. In altero Problemate [Iſoperimetrorum] invenio aliquid obſcuritatis. Nam ſi (*Fig.* 59.) linea BFN, datæ magnitudinis, baſeoſque BN, talis eſt aſſumenda, ut area NBZN fiat maxima, utique & area NBFN erit maxima [quippe ad maximam in ratione data PZ ad PF, conſtante, ut ponit:] ergo linea BFN erit circularis, BZN elliptica: Cum tamen ipſe neget NBFN aream eſſe maximam. Aliud eſt ſi ratio PZ ad arcum BF ſit data conſtans, ubi mihi quoddam Catenæ genus obvenit, ni fallor. Sic figuram concipio, nam Dominus MENKENIUS non miſit,

TAB. XI.

Videbis

* G. G. L. *Communicatio ſua pariter, duarumque alienarum ad edendum ſibi tum a D.* Joh. BERNOULLIO, *deinde a D.* March. HOSPITALIO *communicatarum ſolutionum Probl. Celerrimi deſcenſus,* &c. Act. Er. 1697. Mai pag. 201.

Joh. BERNOULLI *Curvatura radii in diaphanis, ſolutioque Problematis a ſe propoſiti de inveniendа Linea Brachyſtochrona* &c. Ibid. pag. 206. & Opp. Tom. I. N°. XXXVII. pag. 187.

Jac. BERNOULLI *ſolutio Problematum fraternorum, una cum propoſitione reciproca aliorum.* Act. Er. 1697. Mai. pag. 211. Opp. N°. 75 p. 768.

Dn. Marchion. HOSPITALII *ſolutio Probl. de linea celerrimi deſcenſus.* Acta Erud 1697. Mai. pag. 217.

Epiſtola ad Pran. MONTAGUE &c. *in qua ſolvuntur duo Problemata mathematica a* Joh. BERNOULLIO *propoſita.* Act. Er. 1697. p. 223. Opuſc. Newt. T. I. Opuſc. VI. pag. 285.

Digitized by Google

Videbis & Dnum. TSCHIRNHAUSIUM ſua adjeciſſe †. Sed de Cycloïde videtur ſibi ſolutionem non adſcribere, etſi ejus mentionem faciat. Suſpicatur, quod miror, adhuc alias curvas poſſe ſatisfacere. Et putat Problemata talia, quæ propoſuimus, eſſe valde laborioſa, & ſolere ab iis proponi, qui caſu vias faciles repererunt; in quibus omnibus, vides quantum abſit ab eo quod res eſt. Putat etiam HUGENII Librum de Cycloïde mirum quantum noſtræ inquiſitioni profuiſſe; cum tamen de eo nemo noſtrum, vel per ſomnium cogitaverit, niſi re aliunde comperta. Ita etiam loquitur, quaſi & alterum Tuum Problema ſolveret, nec tamen, quantum video, ſolvit. Alia etiam nobis rurſus promittit &c. .... 1697 Jun.

† *De methodo univerſalia Theoremata eruendi, quæ Curvarum naturas ſimpliciſſime exprimunt: De Problemate item* Bernoulliano, *&c. per* D. T. Act. Er. 1697. Mai. pag. 220.

EPISTOLA LIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Curva ſegmentorum. De obſervatione dioptrica. De machina arithmetica. De Problemate Iſoperimetrico, & Curva citiſſimi appulſus ad datam poſitione rectam. De TSCHIRNHAUSIO *&* LAHIRIO.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

. . . .

VIderis approbare ſolutionem meam pro curva habente $PL^2 . PK = a^3$; ſubſtituendo in radicibus $y = \frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq - rr)}$ & $y = \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - rr)}$ loco q valorem 1697 Jun.

1697 Jun. $(a^6 + r^6)$: $a^3 r^2$: Interim revera hac ſubſtitutione radices in rationales abeunt, nec tamen deſtruitur id, in quo diſtinguuntur; proveniunt enim diverſæ, una $y = r^4 : a^3$, altera $y = a^3 : rr$. Quid ergo hic cenſendum. Unamne an duas diverſas producunt curvas? Sed ſuppoſito hanc curvam non aptam eſſe, ſed vitandam; quid judicas de altera illa percurrente per Logarithmos inventa?

Quod attinet obſervationem *Fratris* de vitro plano-plano, eam jam olim Eruditis *Pariſiis* propoſueram; qui autem omnes illud ipſum reſponderunt, quod Tu jam ſuſpicaris, & quod ego ab initio *Fratri* dixeram; ſcilicet vitra non perfecte plana eſſe ſed aliquantulum convexa & quidem cylindrice potius quam ſphærice, quia dextra cum ſiniſtris, non vero ſupera cum inferis mutantur. Cæterum, quantum memini, obſervationem hanc in unico tantum vitro fecit, quod alicui feneſtræ hypocauſti domus ſuæ erat inſertum, cujus facies magnam aream reſpicit, ita ut non-niſi objecta multum diſtantia ſitum ſuum permutaverint, propioribus verum retinentibus; præterea oculus ſpectatoris ad minimum ſex ſeptemve paſſibus diſtare debeat in vitro valde obliquo; in minori diſtantia permutatio objectorum nulla fiebat. An vero in majori res ſucceſſiſſet, dicere non poſſumus, quia ob anguſtiam conclavis major diſtantia non dabatur.

De Machina tua arithmetica jam aliquoties rogare volui, quod viderem illius mentionem fieri in *Medicina mentis* TSCHIRNHAUSII; vellem illam videre libenter, vel ſaltem deſcriptionem ejus accuratam. Poteſtne etiam uſui quotidiano inſervire? nam cum illam adeo ſumtuoſam, & tot rotarum apparatu fabricatam dicas; vereor ne curioſa magis ſit quam utilis. Quæſtor noſter SPANHEMIUS nuper mihi monſtrabat hujuſmodi machinam arithmeticam ſimpliciorem plurimis cylindrulis inſtructam, quorum ſuperficiebus varii numeri erant adſcripti; iſti cylindruli ſuper axiculis circumaguntur pro ratione multiplicationis vel diviſionis: plenum tamen uſum probe mihi non poterat explicare, ſaltem dicebat inventorem ejus eſſe *Gallum Pariſinum*.

Gratias ago pro Communicatione fragmenti *Actorum*: potuiſſes hoc labore ſuperſedere, nam biduo ante Tuas heri acceptas, id eſt

ante

ante triduum, accepi litteras Dni. Menkenii, una cum eodem fragmento & figuris. Schediaſma *Fratris* quod ibi habetur, facit ut ita prompte Tibi reſpondeam. . . . . 1697 Jun.

. . . .

Suntne hæc illa longe difficiliora, de quibus Tibi. . . . . . ſcripſerat ? hæc, inquam, quæ de figuris Iſoperimetris, de maximo deſcenſu Centri gravitatis, de citiſſimo appulſu ad datum perpendiculum &c. proponit; . . . . imo hæc, ... partim jam diu inter nos agitata fuere, partim . . . . . ſimpliciſſima tantum ſunt Conſectaria eorum quæ in hoc ipſo menſe *Actorum* publicavi......... Viderit ibidem jam contineri [implicite quidem, ſed quæ, vel ab infante, tanquam Corollarium facile deduci poſſit] ſolutionem meam ſui Problematis, imo ipſius præciſe pro cujus ſolutione mihi promittit honorarium 50 Imperial. & quod plus eſt, ſolutionem infinities generaliorem quam Problema poſtulat; Quærit enim *Frater*, quænam ex infinitis Cycloïdibus (*Fig.* 60.) per A tranſeuntibus, & ſuper eadem baſi AH conſtitutis, illa ſit, per quam deſcendens grave minimo tempore ex A ad datum perpendiculum ZB appellat. Pone loco perpendiculi ZB, aliam quamvis rectam poſitione datam in quovis angulo cum Horizonte, & ſic Problema univerſaliſſime conceptum ſolvo facillime hoc modo. Sit (*Fig.* 61.) horizontalis AZ, poſitione data recta ZB, punctum datum A. Dico Cycloïdem AB deſcriptam ſuper AZ & occurrentem rectæ ZB ad angulos rectos, fore illam per quam grave a puncto A citiſſime pervenerit ad datam poſitione ZB. TAB. XI. TAB. XI.

Hoc utique immediate ſequitur ex proprietate curvæ meæ Synchronæ, quam oſtendi normalem eſſe omnibus Cycloïdibus ex A & ſuper AZ deſcriptis: Hinc tangens ſynchronæ erit perpendicularis Cycloïdi per punctum contactus tranſeunti, quod punctum determinat breviſſimum deſcenſum ad tangentem per naturam Synchronæ; quia hoc ſolum punctum tangentis eſt in ipſa Synchrona, reliqua ſunt extra. Si itaque ponatur ZB, tangere aliquam Synchronam, erit punctum B contactus; Ergo &c. Oſtendendum vero reſtat, [ne quid *Frater* deſideret] quomodo Cycloïs AB ducenda ſit, ut occurrat normaliter rectæ ZB, id quod ſic facio. Super Z G diametro

Digitized by Google

1697 Jun. metro perpendiculari ad AZ & ad lubitum aſſumta, deſcribatur circulus ZβG ſecans rectam ZB in β; quo puncto delineatur Cycloïs $\alpha\beta$: Jam ſi fiat ut arc. βZ ad ZG, ita AZ ad quartam, erit hæc, diameter circuli genitoris quæſitæ AB. Si ducatur AB parallela ipſi $\alpha\beta$ erit B punctum citiſſimi appulſus.

En itaque Problema pleniſſime ſolutum, quod poteris *Fratri* per occaſionem indicare, & ſimul monere, ut promiſſam ſummam apud Te deponat; Te enim Judicem noſtrum conſtituam, non dubito quin id ſit, conſentiente *Fratre*. Sciat enim *Frater* quod ſi promiſſis ſtare non vellet, non me, ſed pauperes, quibus hanc ſummam deſtinavi, ſit defraudaturus: me enim pudet capere emolumentum ex hac ſolutione, quam ſine ullo labore, ſine ullo temporis diſpendio, ſine ullo mearum rerum damno, non intra tres menſes, quos mihi pro deliberatione ad ſuſcipiendum concedit, ſed intra tria horæ minuta adinveni. Alterum Problema, quod de Iſoperimetris proponit, (quod neſcio an etiam comprehendatur ſub honorario, quidquid ſit illud) pari facilitate ſolvi, & quidem etiam longe univerſalius, quam a *Fratre* poſtulatur. Nil in hoc Proble-
TAB. XI. mate obſcuritatis ineſt, uti putas, ſed ob defectum figuræ, credo, male intellexiſti. Quærit enim ex omnibus Iſoperimetris (*Fig.62.*) ſuper communi baſi BN; conſtitutis, illam BFN, quæ non ipſa quidem comprehendat maximum ſpatium, ſed faciat, ut aliud curva BZN comprehenſum ſit maximum, cujus applicata PZ ponitur eſſe in ratione quavis multiplicata vel ſubmultiplicata (NB. Non dicit multipla vel ſubmultipla, ut Tu intelligis) rectæ PF, vel arcus BF, hoc eſt, quæ ſit quotacunque proportionalis ad datam A & rectam PF, curvamve BF. Brevius ita proponi poteſt: Quæritur ex omnibus Iſoperimetris BFN illa, ut facta alia curva BZN, cujus applicata PZ ſint ut poteſtas quæcunque ipſius PF, ſpatium NBZN ſit omnium maximum. Hujus ſolutionem, pro hac vice, ſine methodo ſolvendi, ob brevitatem temporis exhibebo; ut affirmare poſſis, me, tertio die poſt viſum *Fratris* ſchediaſma, Tibi ſolutiones Problematum ejus perſcripſiſſe. Sit ergo numerus poteſtatis n, PF ſeu BG, x; & BP ſeu GF, y; recta arbitraria,

a;

a; fiat GF, ſeu $y = \int (x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$: Dico punctum F fore in curva optata BFN. Hinc ſtatim patet, ſi n ſit 1, curvam fore circularem; ſi vero n ſit 2, id eſt, ſi PZ ſint ut quadrata ipſarum PF, erit curva BFN, illa ipſa quam format linteum a fluido ſtagnante expanſum, quam ***Frater*** etiam ſuæ Elaſticæ tribuit. Si vero n ſit $\frac{1}{2}$, id eſt ſi PZ ſint in ſubduplicata ratione ipſarum PF, erit curva BFN iterum Cycloïs vulgaris, cui proinde hic ſingulare quid accidit, quod $\int dy \sqrt{x}$ ſit omnium maximum, & [poſito arcu BF, t] $\int (dt : \sqrt{x})$ omnium minimum, ut ex citiſſimo deſcenſu patet; ſic itaque Cyclois egregia gaudet proprietate. 1697. Jun.

Cæterum generaliter obſervo......... quod, quotieſcunque n ſit fractio, cujus numerator ſit unitas, denominator vero numerus par, erit curva quæſita B F N talis, ut ope rectificationis Circuli conſtrui poſſit; ſi vero denominator ſit numerus impar, erit tunc curva quæſita, B F N ſemper algebraïca. Sit exempli gratia $n = \frac{1}{3}$, id eſt ſint PZ in ratione ſubtriplicata ipſarum PF; erit GF ſeu $y = 2a - (2a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) \sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})}$. Hinc, ut puto, non mediocris affulget lux pro inſtituendis ſummationibus quantitatum differentialium, quæ reducuntur ad hanc formulam $\int (x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$: determino enim caſus ubi fiunt abſolute ſummabiles; item & illos, qui requirunt extenſiones circularium, & denique illos qui neque ſummabiles neque circulares exiſtunt. Quid ſi jam Problema univerſaliſſime proponam & ſolvam, ſi ſcilicet loco quod PZ, ſecundum ***Fratrem***, debeat eſſe in ratione certæ poteſtatis ipſius P F, jam ſit quomodocunque compoſita ex P F & datis; id eſt, ſi PZ ſit æqualis ipſi GH applicatæ curvæ datæ BH; quæ loco quod, ſecundum ***Fratrem***, eſt ex Parabolarum genere, a me ſupponitur qualiſcunque: annon multo plura præſtitero quam a me exigitur? Si ergo in eadem proportione honorarium promiſſum augere teneretur ***Frater***, non puto omnes ipſius opes ſuffecturas. Ecce autem ſolutionem; poſitis quæ

N n. 3 prius.

1697 Jun. prius, appelletur GH, X [quæ datur ex BG ſeu x]; ergo datur ſpatium BGH, ſeu $\int X dy$, algebraïce, vel ſaltem tranſcendenter; ergo datur etiam $\int (X dx : x)$. Sit itaque $\int (. X dx : x) = \xi$; dico, facta GF ſeu $y = \int (\xi dx + \sqrt{(a^2 - \xi^2)})$, fore F, in curva quæſita BFN, quæ ſcilicet ex omnibus Iſoperimetris illa eſt, cujus applicata FP producta ad Z, ita ut PZ ſit $=$ GH, efficiet ſpatium NBZN omnium quæ ita fieri poſſunt maximum.

Hoc ipſo momento, quo hæc paulo acrius meditor, mirabilem deprehendo curvarum convenientiam, quod enim modo ſupra Cycloïdi ſingulare credidi, dum in illa $\int dy \sqrt{x}$ eſt maximum & $\int (dt : \sqrt{x})$ minimum, jam video hoc omnibus hiſce curvis eſſe commune. Dico enim ſi BFN curva talis ſit ut $\int x^m dx$, ſit maximum, fore etiam ſemper $\int (dt : x^m)$ minimum.

Ne quid omittam [quamvis non neceſſarium......] ex abundanti tamen Te certiorem facio, quod etiam geometrice ſolverim Problema de inveniendâ curva, [non tantum ex omnibus Cycloïdibus, ut ſupra facile præſtiti,] ſed ex omnibus alterius ejuſdem ſpeciei & baſeos quæ promptiſſime, non ſolum ad perpendiculum, ſed ad quamvis rectam poſitione datam accedat; unde vides plane non determinatum curvarum numerum requiri, ut opinaris. Definio enim præciſe, ſive per quadraturas, ſive per rectificationes, illam ipſam quæ ex infinitis ſuæ ſpeciei quæſito reſpondet. Et quidem res perpetuo eo recidit, ut prius determinetur Synchrona curvarum datæ ſpeciei: quæ curvæ, ſi ſint Cycloïdes, Synchrona facile determinatur; eſt enim illa quæ omnibus Cycloïdibus eſt normalis, ut ſupra oſtendi: Sed ſi curvæ datæ ſint alterius ſpeciei, exempli gratia, circulares vel parabolicæ [quos caſus non ſolviſſe ſed nude aliis propoſuiſſe contentum ſe dicit *Frater*] hoc opus hic labor eſt. Tunc enim Synchrona curvis ſpeciei datis amplius non perpendicularis eſt, ſed inclinationem ad illas ubique variat. In hoc profecto præcipue aliquid me præſtitiſſe puto;.............. neque ego facile eo penetraſſem, niſi genius quidam, albus an ater ſit, neſcio [ut cum Theologo quondam noſtro loquar] peculiare mihi

mihi artificium inſpiraſſet, quocum etiam alia Problemata ſolvo inſolubilia antehac mihi viſa. Vides ergo quouſque intra triduum progreſſus fuerim, cum prius ne per ſomnium quidem de hiſce cogitaverim. Nil ſupereſt, niſi ut Te rogem, ut inſtiges Dnum. Menkenium, ut quamprimum, & ſi fieri poſſit hoc menſe, publicum moneat, me brevi adeo temporis ſpatio potitum eſſe ſolutionibus Problematum à *Fratre* mihi, præ aliis, propoſitorum, longeque plura præſtitiſſe quam petierat: ſolutiones vero ipſas me exhibiturum, quam-primum ille præmium, a ſe mihi promiſſum, a me vero pauperibus deſtinatum, Tibi Judici, harum rerum ſere ſoli intelligenti, remiſerit, ut illud mihi, ſi ſolutiones meas legitimas deprehenderis, adjudices, ſin minus, *Fratri* reddas. 1697 Jun.

Prout Dnus Tschirnhausius loquitur in ſuo Schediaſmate *, videtur materiam hanc non ſatis intelligere. Facit quidem mentionem Cycloïdis, minime tamen Problema ſolvit: unde conjicio, Dnum Menkenium ipſi communicaſſe ſolutiones noſtras, antequam imprimerentur. Si videret demonſtrationem meam Syntheticam, quam ſuppreſſiſti †, non dubito, quin mutaturus eſſet ſententiam, in qua eſt, quaſi plures aliæ curvæ præter Cycloïdem poſſent ſatisfacere.

Accepi Litteras à Domino *Marchione* Hospitalio & à Belvallio; ille ſignificat Dnum. De la Hire prætendiſſe, ſe triplici via perveniſſe ad ſolutionem Problematis celerrimi deſcenſus, ſed ſemper deceptum fuiſſe; quippe qui invenerit Parabolam cubicalem. Dominus Belvallius promittit ſe revocaturum per occaſionem errorem commiſſum in recenſione Problematis mei, ubi de Tua ſolutione agitur; miſit etiam faſciculum Obſervationum Tuarum in Philoſophiam *Carteſianam*, quas perlegere nondum vacavit. Juvenem illum *Hagienſem*, qui Problema meum tentavit, eſſe Filium Domini Dierckens Præſidis in *Curia Brabantiæ*; utrum-

* *De methodo univerſali Theoremata eruendi, quæ Curvarum naturas ſimpliciſſimas exprimunt: De Problemate item* Bernoulliano, *&c. per. D. T.* Act. Er. 1697. Maj. pag. 220.

† *Hæc habetur in* Act. Erud. 1718. Febr. p. 87. & Mem. de l'Acad. 1718. pag. 237. vel Opp. Tom. II. N°. CIII. p. 268.

Digitized by Google

utrumque & Filium maxime his ſtudiis delectari, ex litteris *Belvallianis* diſco: Vale.

Groningæ 7. Junii 1697.

Amplitud. Tuæ

Deditiſſimus

J. BERNOULLI.

EPISTOLA LIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Curva ſegmentorum. De machina arithmetica. De Curva citiſſimi appulſus & Synchrona. De Problemate Iſoperimetrico.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1697 Jun. PRimo Curſore tuas Dno MENKENIO miſi, juſſique ut mature publicari curet, Te Problematum Fraternorum ſolutiones breviſſimo tempore dediſſe.

Videris circa tuam curvam [ubi $PL^2, PK = a^3$] fruſtra aliquid metuere. Extractio ſuccedens in valore ordinatæ hic nihil nocet, nec opus in hoc caſu, ut diſcriminantia evaneſcant, ſed pro illis tantum curvis, ubi radices eodem modo tractantur. Hoc vero diſcrimen inter $PL^2.PK$ & $PL.PK^2$ tantum abeſt tolli oportere, ut potius ſit conſervandum. Sed talia ex feſtinatione excidere ſolent,

Et hanc veniam petimuſque damuſque viciſſim.

Placet quod video ſuſpiciones meas circa obſervationem dioptricam Domini *Fratris* Tui relatione Tua confirmari.

Putaſne me tam male mihi conſulere, ut ſumtus conferre velim in Machinam, quæ nihil aliud præſtet, quam ea quæ Tibi viſa eſt? Si quic-

Digitized by Google

quicquid non a quovis redimi poteſt, curioſum magis quam utile eſt; nec triremes ſcaphis præſtarent, nec tormenta ſclopetis. Illud quæritur annon ultra proportionem ſumtuum etiam effectus creſcat. Equidem Morlandus in *Anglia*, Tubæ ſtentoreæ author, Rhabdologiam ex baculis in cylindrulos tranſtulit, & additiones auxiliares peragit in adjuncta Machina additionum *Paſcaliana*. De qua re & Librum ſcripſit. Tale quid poſt ipſum fecit & Grilletus *Gallus*; ſed omnia iſta nihili fere ſunt, nullamque notabilem præſtant utilitatem. Ego jam prædixeram cum Rhabdologia, aut inde deductis, nihil ei inſtrumento commune eſſe, quod ego ſum commentus. Deſcriptionem ejus dare accuratam res non facilis foret *. De effectu ex eo judicaveris, quod ad multiplicandum numerum ſex figurarum [exempli gratia] rotam quamdam tantum ſexies gyrari neceſſe eſt, nulla alia opera mentis, nullis additionibus intervenientibus; quo facto, integrum abſolutumque productum oculis objicietur. Idem eſt de diviſione, ubi nullo in quærendo quotiente opus eſt tentamento, ſubtractionibuſque nullis. Coram Tibi oſtendere machinam, intus & extra, mihi aliquando jucundiſſimum erit. Non eſt facta pro his, qui olera aut piſculos vendunt, ſed pro obſervatoriis aut Cameris computorum, aut aliis, qui ſumtus facile ferunt & multo calculo egent. Video Dnum. De la Hire expertum eſſe, quanto facilius ſit Analyticas noſtras Demonſtrationes ſolutionum noſtrarum vertere in ſyntheticas, quam ſolutiones talium Problematum per ſe invenire. 1697 Jun.

Animadverſiones meæ in Partem generalem *Principiorum Carteſianorum* ſcripta ſunt ad captum Lectorum, qui profundiora non attingunt.

Quod Domini *Fratris* Tui Problema attinet, utique curva, ex pluribus ejuſdem baſeos & ſpeciei, a dato puncto, breviſſimo tempore, ad datam rectam appellentem mihi ope Synchronæ eleganter exhibere videris; nam ita rem præſtas conſtructione lineari. Ego primo aſpectu modum obſervavi parametrum lineæ quæſitæ exhibendi, numero quamtumvis accurato, quoties algebraïce haberi non po-

 teſt,

* *Aliquam vide in* Miſcellaneis Berolinenſibus Tom. I. Part. 3°. N°. 31. p. 317.

1697 Jun. teſt; quo tunc contentus eram, quia hic de determinata tantum quantitate, nempe parametro, non de linea aliqua, ſeu indefinito quærendo agitur. Melior quidem eſt conſtructio linearis, ſed hanc ego tunc non quæſieram; quia id unice reſpexeram, quod leviſſima conſideratione inter ſcribendum ad Te in mentem venerat. Interim verba mea neſcio quomodo in tranſverſum accepiſti. Neque enim in mentem venit dicere determinatum curvarum numerum requiri, ut Epiſtola tua mihi aſcribit; ſed determinatum numerum, non curvarum, ſed menſuræ rationem parametri ad rectam conſtantem, ſeu unitatem, exhibentis. Cæterum poſt Synchronas ſemel ad hoc negotium a Te pulchre applicatas, non puto Tibi genio atro, vel albo [ut cum Zuinglio veſtro per jocum loqueris] opus fuiſſe, ad rem in aliis quoque præter Cycloïdem curvis præſtandam. Etſi enim in cæteris, recta poſitione data lineæ quæſitæ non ſit perpendicularis; eſt tamen, quantum judico, ſemper tangens Synchronæ, ac proinde tantum opus eſt deſcribi Synchronam, TAB. XII. quæ rectam poſitione datam tangat. Sint (*Fig. 63.*) lineæ ſpecie convenientes, & ſimiliter ad A poſitæ AFG, A(F)(G) & ipſam rectam ZGB (G) poſitione datam tangat Synchrona FB(F) tunc utique, ut in Cycloïde facis, merito Tecum concludemus, ipſam AB eſſe lineam quæſitam breviſſimi appulſus. Nam quævis alia ipſi ZB occurreret in G, eſt autem tempus per AFG longius quam per AF ſeu per AB. Hinc poteras ſolutionem tuam adhuc reddere generaliorem, ut præſtet quæſitum, non tantum quando poſitione data, ad quam-citiſſime pervenire debet, eſt recta, ſed etiam ſi ſit curva, imo ſi eſſet, non linea, ſed ſuperficies, poſſes pro ſynchrona linea adhibere ſynchronam ſuperficiem, quæ ſuperficiem poſitione datam tangat, ſed hæc Te [ſi modo animum advertas] latere non poſſunt. Miratus ſum Dominum *Fratrem* Problemata Tibi proponere voluiſſe, pulchra quidem per ſe, ſed de quibus tamen facile judicare potuiſſet, viam Tibi ad ea patere, ex ipſa ſolutione Brachyſtochronæ; Tota enim clavis hujus methodi inveniendæ formæ maximum præſtantis in eo conſiſtit, ut maximum non ſolum in toto, ſed & in parte præſtetur, licet indefinite parva. Ita, ſi deſcenſus ſit celerrimus ab uno extremo lineæ

neæ ad aliud, etiam (*Fig.* 64.) in particula ejus BCD erit breviſſimus deſcenſus a puncto B ad D. Et quia curva infinite parva BCD ſumi poteſt pro compoſito ex duabus rectis BC, CD; hinc oportet tantum quærere punctum C tale, ut deſcenſus in duabus rectis iſtis ſit breviſſimus; quo facto, habebitur Brachyſtochrona. Et quia tribus punctis indefinite propinquis, ſeu curvedine, determinatur oſculans circulus, vel contra; hinc revera duæ methodi, mea & tua, quam directam † vocas, in fundo coincidunt. Hac methodo res etiam præſtatur pro Catenaria; nam quia catenæ longitudine datæ, datis duobus extremis, ſitus debet fieri talis, ut Centrum gravitatis maxime deſcendat; patet etiam in Catenariæ punctis indefinite vicinis hoc fieri, ut, data particulæ curvæ longitudine, ſeu ſumma rectarum BC, CD, & extremitatibus B, D, puncti C ſit ſitus talis, ut hujus ex duabus rectis compoſiti datam longitudinem habentis centrum maxime deſcendat, unde curvatura & proprietas oſculorum, imo & tangentium, determinari poteſt.

1697 Jun. TAB. XII.

Eadem locum habent ſuo modo in maximis ſpatiis Iſoperimetrorum, vel ut Iſoperimetra relatorum.

Suſpicor Dominum *Fratrem* Tuum etiam ope Synchronarum ad breviſſimos appulſus veniſſe; quia video eum connexionem cum radiis & undis *Hugenianis* perſpexiſſe. Unde facile potuit Synchronas animadvertere. Sed miror, quod non Tibi eadem facile patere poſſe judicavit. Quæ de quadraturis ipſarum $y = \int x^n dx : \surd(a^{2n} - x^{2n})$ habes; fortaſſe Dominum *Fratrem* Tuum non latent. Si facias $x^n = z$ fiet $y = \int dz . z^{1:n} : n \surd(a^{2n} - zz)$ pro qualibus olim me Canones condidiſſe puto. Volebam monere, ne obliviſcereris ſolvere Problematis partem, ubi curvæ novæ ordinata eſt in ratione, non ad prioris ordinatam, ſed arcum: ſed video & hoc in Tua generaliſſima ſolutione curvæ utcunque relatæ contineri.

Oo 2 Haud

† *Hanc vide* Act. Erud. 1718. Febr. p. 86. *vel* Mémoires de l'Acad. R. des Sciences de Paris. 1718. pag. 136. *vel* Opp. Tom. II. N°. CIII p. 267.

Digitized by Google

1697 Jun. Haud dubie Dominus *Frater* Tuus ſolutionem omnium quæ propoſuit Problematum exiget, tanquam conditionem quæ ſolutionem honorarii ingrediatur; diſerte enim, pag. 215, * requirit *ſolutiones.* Cæterum aliquem alium arbitrum mihi adjungi e re erit, quem Domino *Fratri* Tuo nominandum relinquemus, ſiquidem ipſi conditio placet. Vale & fave:

Dabam *Hanoveræ* 15°. Junii 1697.

Deditiſſimus

G. G. Leibnitius.

P. S. Reliqua Fragmenta ex *Actorum Lipſienſium* menſe nuper tranſmiſſo remitti peto; & judicium tuum de meis ad Cartesium Animadverſionibus expecto.

* *Actor. Erud.* 1697.

EPISTOLA LV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Problematibus Fraternis. De Curva citiſſimi appulſus. De Problematis Iſoperimetrici ſolutione. De Animadverſionibus Leibnitianis *in* Principia Cartesii. *De cauſa duritiei ex motu conſpiranti.*

Vir Ampliſſime & Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1697 Jun. Quæ narras de Machina Tua arithmetica faciunt ut jam quid majus de ea concipiam: ſi illam curioſam magis quam utilem ſuſpicabar, nolim tamen Te putare quaſi illam contemſerim: Curioſum ſine utili pluris æſtimo, quam utile ſine curioſo; ſed qui utrum-

utrumque miſcuit, omne tulit punctum: & hoc nomine Tuam Machinam licet mihi nondum viſam, ex Tua tamen relatione maximi-facio: pergratum utique eſſet, eam aliquando coram videre. 1697 Jun.

Quod arbitratum me inter & ***Fratrem*** acceptaveris, mirifice gaudeo; ſcripſi nuper Bellvallio Epiſtolam ſatis longam, quam forſan imprimet, * ubi judicium meum aperui de ſolutionibus Problematis mei quæ noviſſime in ***Actis*** prodierunt, ſimulque mentionem injeci de reciproca propoſitione Problematum Fraternorum, & de plenaria mea ſolutione eorum, apud Te [noſtrum Judicem] jam-jam depoſita. Non video cur e re ſit Tibi alium arbitrum adjungi a ***Fratre*** nominandum, vel qua fronte Te ſolum recuſare audeat, cum nemo ſit qui ignoret Te nullo partium ſtudio teneri; præſertim in illis rebus, per quas ſolas nos ambo Tibi noti ſumus: ut adeo hac in parte non ſit, cur uni magis faveas quam alteri. Si verba Tua in Tuis præcedentibus, forſan ob confuſam nimis ſcriptionem in tranſverſum accepi, legendo ***determinatum numerum curvarum***, pro ***determinato numero menſuræ rationis parametri ad conſtantem***, non minus ſiniſtre interpretaris ſenſum verborum meorum, quaſi ego non præviderim Synchronam, a me ſemel adhibitam in Cycloïdibus, pro determinando celerrimo appulſu ad lineam rectam utcunque poſitione datam, generaliter poſſe applicari ad rem in aliis quoque præter Cycloïdem curvis præſtandam; cum tamen in litteris meis diſertis verbis dixerim ***rem perpetuo eo recidere, ut prius determinetur Synchrona curvarum datæ ſpeciei.*** Scio etiam maxime, quod etiamſi recta poſitione data non ſit perpendicularis, in aliis, præter Cycloïdes, curvis; tamen ſemper ſit tangens Synchronæ: & qui hoc ignorare potuiſſem, cum Synchronæ natura hoc ſtatim ſecum ferat, & impoſſibile ſit ut illam contemplari potuiſſem, quin hoc ipſo id viderim; ut verbo dicam, non potui non videre. Sed hic id ipſum quæro, quod Tu pro conceſſo tanquam poſtulatum aſſumis, ac ſi nihil difficultatis ineſſet;

* Imo extat, *Hiſtoire des Ouvrages des Sçavans.* Juin 1697. p. 452. Vid. Opp. Tom. I. N°. XXXVIII. pag. 194.

1697 Jun. ineſſet; dum dicis, *ac proinde tantum opus eſt, deſcribi Synchronam, quæ rectam poſitione datam tangat.* Imo maxime hoc opus eſt, & opus eſſe ſemper agnovi; ſed quomodo, quæſo, deſcribenda eſt Synchrona generaliter in curvis datæ alicujus ſpeciei? Habeo ego methodum pro hoc, quæ eſt illa ipſa, quam a peculiari genio mihi inſpiratam [per jocum] dixi; præterea tametſi innoteſcat [quod quidem palmarium eſt] modus conſtruendi Synchronam, non tamen inde ſtatim deducitur modus ducendi ejus tangentes; quia, ſi meminiſti, non ita pridem Tibi dixi, dari aliquas curvas quarum conſtructio ſimpliciſſima habetur, quæ tamen non facile æquatione differentiali, nedum algebraïca, exprimi poſſunt; atque adeo cum tangens curvæ duci non poſſit, niſi cognoſcatur relatio inter *dx* & *dy*, id eſt, niſi habeatur æquatio differentialis naturam curvæ exprimens, evidens quoque eſt modum conſtruendi Synchronas, [qui per ſe etiam maxime difficilis eſt] nondum ſufficere pro determinatione Problematis, ſed requiri inſuper relationem inter *dx* & *dy*, ut habeatur tangens vel potius, ut data tangente, ſeu inclinatione rectæ poſitione datæ, habeatur punctum in Synchrona cui iſta inclinatio conveniat. Et ſane exemplo nobis ſit vel ſola Synchrona Cycloïdum, cujus conſtructionem tam brevem, tamque ſimplicem trado: quomodo quæſo, exinde ejus æquationem differentialem quæreres, vel ſaltem quomodo duceres ejus tangentes, ſi non aliunde conſtaret, nempe ex conſideratione undæ luminaris, quod ſit perpendicularis Cycloïdibus? Non quidem dubito quin eo pervenias, ſi tentare digneris, namque & ego eo perveni, & inveni modum reducendi hujuſmodi curvas ad ſuas æquationes: ſed repeto quod dixi, ſingulare ſcilicet artificium pro hoc requiri. . . . . Mirari itaque ſatis non poſſum, quod ita perfunctorie hoc conſideraveris. Quam-frigide dixiſſem, me a genio quodam habuiſſe, ſi nihil aliud myſterii ſubeſſet quam id quod recta [vel ſi mavis curva] poſitione data tangere debeat Synchronam. Optarem ut periculum feciſſes in unico illo exemplo [quod *Frater* proponit, de Circulis], quo difficultatem rei ipſe expertus fuiſſes. Oportet utique ut *Frater* ipſe illud pro deſperato habeat; cum dicat, ſe aliis relinquere tentamen ejus, ſibi ſufficere propo-

proponere. Interim prima occaſione mittam Tibi non ſolum hoc, ſed generalem meam Methodum determinandi curvam ex infinitis ſpecie datis, per quam grave deſcendens citiſſime appellit ad rectam poſitione datam, idque ſine interventu curvæ Synchronæ; quod non facile credideris; quamvis id, mediante Synchrona, etiam præſtare poſſim; quærendo ſcilicet æquationem differentialem pro natura Synchronæ. Sed hic modus, non tam naturaliter nec tam ſimpliciter procedit, ac alter ille ſine Synchrona. 1697 Jun.

Suſpicaris *Fratrem* meum etiam ope Synchronarum ad breviſſimos appulſus veniſſe: ego autem nil minus credo quam hoc; contra potius perſuaſus ſum totus, per ingentes ambages quæſito tandem poſitum fuiſſe [& quidem tantum in Cycloïdibus, nam ut jam dixi in aliis curvis id pro deſperato habet]. Atque adeo ſuam viam [qua breviorem dari non putaverit,] mihi oppido imperviam crediddiſſe. Perpende, obſecro, ſi, vel per ſomnium, de Synchrona cogitaſſet, annon pro recta verticali quamvis aliam obliquam poſitione datam citiſſime attingendam propoſuiſſet; cum per Synchronam res æque facilis ſit, ſive recta ſit verticalis, ſive obliqua: quod vero dicis eum perſpexiſſe connexionem cum radiis & undis *Hugenianis*, pace tua, ego contrarium dixerim: id ipſum enim quod curvaturæ radii [non vero undæ] mentionem faciat, abſque tamen ut quicquam dicat de identitate cum Brachyſtochrona, ſatis indicio eſt, hanc connexionem omnino ignoraſſe, & de unda nequidem cogitaſſe.

Quod attinet alterum *Fratris* Problema de Iſoperimetris; quando credis illud ex hoc fonte poſſe ſolvi, conſiderando maximum non ſolum in toto, ſed in parte præſtari, & particulam curvæ indefinite parvam cenſendam eſſe compoſitam ex duabus rectis, quarum ſitus ſit determinandus, ita ut illæ duæ rectæ, quarum ſumma conſtans ſupponitur, præſtent maximum vel minimum quæſitum; quo ſitu invento, dari tria puncta, & per conſequens Circulum per ea tranſeuntem, id eſt ipſum Circulum oſculatorem, unde in fundo hanc methodum cum mea quam directam voco, coincidere concludis; hic iterum prius pronuntiaſſe quam ſatis examinaſſe videris. Scire Te volo, me initio etiam habuiſſe hanc meditatio-

1697 Jun. TAB. XII. ditationem, qua ſingulare quid efficere ſperabam; concipiebam enim (*Fig. 65.*) BD ut ſubtendentem particulæ curvæ infinite parvæ, ex cujus extremitatibus B & D, tanquam focis, imaginabar Ellipticulam ECF, per filum BCD æqualem particulæ curvæ quæſitæ deſcriptam. Jam in hac Ellipſi ECF, [quæ conſiderari poteſt ut finitæ & ordinariæ magnitudinis,] quærebam punctum C, ad quod ductæ BC, DC, præſtarent aliquod maximum vel minimum deſideratum. Sed præterquam quod calculus prolixiſſimus & tædioſiſſimus evaderet; videbam etiam ſtatim hoc mihi pro determinatione longitudinis radii circuli oſculantis, plane nihil facere: nam prout filum BCD longius breviuſve intelligitur [licet exceſſus ejus ſuper BD debeat eſſe incomparabiliter minor quam BD vel BCD] neceſſario alius atque alius Circulus per tria puncta B, C, D, tranſibit, adde, quod interdum accidat, ut maximum quod in toto præſtandum eſt, in particulis infinite parvis diverſimode conſiderari poſſit; unde etiam diverſæ ſolutiones prodirent; quod eſt abſurdum. Exempli gratia, in ipſa Catenaria, ubi requiritur ut ejus Centrum gravitatis quam-maxime deſcendat, & cujus quælibet particula BCD conſideratur æqualiter gravata, ponduſculum ejus vel ſecundum totam longitudinem BCD extenſum, vel in uno puncto C collectum, intelligi poteſt. Jam vero ſi quæras ſitum puncti C, ita ut commune Centrum gravitatis linearum BC, CD quam-maxime deſcendat, ad quod operoſo Calculo Tibi opus eſt; item, ſi quæras ſitum ejus quando ponduſculum collectum, id eſt ipſum punctum C quammaxime deſcendit, ſine calculo vides eſſe, quando in eo puncto in quo linea horizontalis Ellipſin tangit; deprehendes duos illos ſitus eſſe diverſiſſimos; unde in una hypotheſi aliud ſpecie triangulum BCD, & per conſequens alius Circulus oſculator prodiret, quam in altera; quod non poteſt ſubſiſtere, & ſic fruſtra hac via quæreres naturam Curvæ.

Alia ergo via mihi incedendum erat ad determinandas ex Iſoperimetris curvas, quarum ſumma applicatarum ad certam potentiam elevatarum, vel alio certo modo cum conſtante permixtarum, faciat maximum. Ut totum Tibi myſterium quo uſus ſum detegam, en tale eſt. Quærenda eſt generaliter curvatura lintei a liquore ſtagnan-

Digitized by Google

ſtagnante expanſi, quæ Centro gravitatis liquoris concedat locum infimum. Si jam concipis liquorem dividi in filamenta parallela verticalia; quæ ſint, vel fingantur potius, gravata, in applicatarum ratione vel ſimplici, [ut in ordinaria lintei figura] vel duplicata, vel triplicata, &c.: evidens eſt Centrum gravitatis omnium iſtorum filamentorum, ſeu totius liquoris, diſtare a baſi horizontali [ſuppoſitis applicatis verticalibus x, & horizontalibus y & numero poteſtatis in cujus ratione filamentum liquoris ſupponitur gravatum, $n - 1$: ipſa autem quantitate liquoris L] $\int (x^n \, dy : L)$. 1697 Jun.

Diſtantia vero hæc eſt maxima; ergo etiam $\int x^n dy$ eſt maximum: Ergo curvatura lintei continentis liquorem cujus filamenta verticalia ſunt gravata in ratione poteſtatis $n - 1$ ipſarum applicatarum verticalium, eſt eadem quæ foret curva ex omnibus Iſoperimetris quæſita; cujus applicatarum ad poteſtatem n elevatarum ſumma produceret maximum. Ex hoc fundamento reperi pro naturâ curvæ $y = \int ((b^n + x^n) dx : \sqrt{(a^{2n} - (b^n + x^n)^2)})$, vel contractius, ponendo pro b, quod arbitrarium eſt, o, $y = \int (x^n \, dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$. Quod autem hæc expreſſio ſimplicior reddi poſſit, faciendo $z = x^n$, unde $y = \int z^{\frac{1}{n}} dz : n \sqrt{(a^{2n} - z^2)}$), id mihi jam innotuiſſe ex eo potes colligere, quod in præcedentibus meis determinaverim caſus quando evadit abſolute ſummabilis, quando requirit extenſionem arcuum Circularium, & quando neque ſummabilis neque circulabilis eſt; nempe ſi n eſt fractio, vel, quod eodem redit, ſi $\frac{1}{n}$ eſt numerus integer impar, habebuntur caſus primi; ſi $\frac{1}{n}$ eſt numerus par, habebuntur caſus ſecundi; ſi vero n eſt numerus integer habebuntur caſus tertii; hanc autem reductionem $\int (x^n \, dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$ ad $\int z^{\frac{1}{n}} dz : n \sqrt{(a^{2n} - z^2)}$) conſulto celabam, ut limitatio horum trium caſuum tanto mirabilior appareret; loco quod per alteram expreſſionem artificium ipſe

1769 Jun. detexiſſem. Quis enim facile crederet, ſi n ſit numerus fractus, quantitatem $x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$ ſummabilem, vel ſaltem circulabilem; ſi vero n ſit numerus integer, neutrum omnino poſſe eſſe; cum prima fronte contrarium potius videatur; in illo namque caſu, ubi n eſt fractio, ſit involutio plurium laterum radicalium diverſi nominis; in hoc vero ubi n eſt numerus integer unicum ſemper adeſt latus quadraticum. Non eſt ergo quod metuas, ne hæc expreſſio $y = \int(x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$ *Fratrem* meum non lateat; gaudebo magis ſi in eadem inciderit; videbit enim eadem opera me legitimam reperiiſſe petite ſolutionem, & ſimul longius quam ipſe progreſſum eſſe, determinando caſus algebraïcarum & tranſcendentium: præterea præſtat adhibere hanc expreſſionem, quia ex hujus conſtitutione ſtatim ipſa prodit curva; conſtitutio vero alterius expreſſionis $y = \int(z^{\frac{1}{n}} dz : n\sqrt{(a^{2n} - zz)})$ non ſtatim ipſam quæſitam curvam exhibet, ſed aliam quamdam, cujus ope demum quæſita deſcribitur.

Si miſſa conſtructione, explicanda dumtaxat eſſet curvæ natura per inſignem aliquam proprietatem, & ſi hoc ſufficeret pro ſolutione; dicerem ſimpliciter curvam quæſitam BFN (*Fig.* 62.) eam eſſe in qua [poſito numero poteſtatis ad quam applicatæ elevantur, n] circuli oſcillatoris radius FS, eſt ubique ad perpendicularem curvæ FR, interceptam inter baſin BN & curvam BFN in ratione 1 ad n. Quid quæſo ſimplicius, quid elegantius eſt hac proprietate? Miror quod nihil reſponderis ad mirabilem illam convenientiam, de qua in præcedentibus meis, ubi nimirum deprehendi, ſi [BP, y; PF, x; BF, t] $\int x^n dy$ ſit maximum, fore ſimul etiam in eadem curva $\int(dt : x^n)$ ſeu $\int(x^{-n} dt)$ minimum; & vice verſa, ſi illud ſit minimum [quando nempe n eſt numerus negativus] tunc hoc fore maximum. Incidi in hac convenientiam, conferendo curvas lintei, quibus illud competit, cum Catenariis quibus hoc competit. Sed vellem ut aliquis neceſſitatem hujus convenientiæ ex ipſa contemplatione curvarum erueret, id

TAB. XI.

id eſt, ut oſtenderet ex ſuppoſitione $\int x^n dy$ maximi, inferendum eſſe; Ergo $\int x^{-n} dt$ eſt minimum. 1697 Jun.

Mones ne obliviſcar ſolvere Problematis alteram partem, ubi curvæ novæ applicata eſt in ratione multiplicata, non ad prioris applicatam, ſed arcum. Etiamſi hanc partem non ſolviſſem, non tamen crederem me ſolvere teneri, ſufficeret enim ut alterutri partium ſatisfeciſſem, ideo quia *Frater* loquitur disjunctive non copulative, dum dicit *recta* BF VEL *arcus* BF: item *rectam* PF *curvamve* BF, atque ita non utriuſque, ſed alterutrius tantum ſolutionem exigere videtur. Urges directe illum requirere pag. 215. ubi dicit *ſolutiones* in plurali, non *ſolutionem* in ſingulari; quaſi vero non poſſent peti & dari diverſæ ſolutiones unius ejuſdem Problematis. Videtur inſuper mihi honorarium propoſuiſſe, pro ſolutione dumtaxat ultimi Problematis, de Cycloidibus; alias neſcio, quod ſibi velint hæc verba, *ne detrectare poſſit*, annon idem eſt ac ſi dixiſſet; *Adjungimus alterum Problema, & ne detrectare poſſit, dabo ipſi pro ſolutione ejus* 50 *Imperiales.* Omnia tamen quæ propoſuit millies generalius ſolvi; imo & ipſa illius Problematis pars, ut probe animadvertiſti, in mea generaliſſima ſolutione continetur, imitando namque formulam meam generalem; poſitis arcu BF, t, GH, utcunque compoſita ex t, T; $\int(T dx : n)$, θ; reperitur pro æquatione curvæ quæſitæ $y = \int(\theta dx : \sqrt{(aa - \theta\theta)})$ quæ reduci poteſt ad hanc ſimpliciſſimam $ay = \int \theta\, dt$. Quoniam vero θ involvit indeterminatas T & x, fit ut æquatio $ay = \int \theta dt$, non poſſit conſtrui per differentias primas; oportet ergo ut recurramus ad differentias ſecundas, ad ſeparandas indeterminatas; quod ſic facio, quia $ay = \int \theta\, dt$, & $a\, dy = \theta\, dt = dt \int(T dx : x)$ erit $a\, dy : dt = \int(T dx : x)$: ponendo dt conſtantem, & differentiando utrumque, habetur $a\, ddy : dt = T\, dx : x$ ſeu $a\, x\, ddy : dx = T\, dt$; ſubſtituto valore ipſius ddy qui eſt $- dx\, ddx : dt$, erit $- ax\, ddx : dt = T\, dt$, vel $- ax\, dd\, x = T\, dt^2$. Et ſic T, proinde etiam t, hujusque differentialis dt, ſeu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ dabitur per x & dx. Sit ergo dt^2 ſeu $(dx^2 + dy^2) = X dx^2$ erit $dy^2 = X dx^2 - dx^2$, id eſt $dy = dx \sqrt{(X}$

 $-1.$

1697 Jun. — I. Hoc modo licet conſtruere curvam; ſed ſufficit dediſſe æquationem $y = \int \theta \, dt$, quæ naturam curvæ determinat.

Cœterum notabilis hujus curvæ proprietas, eſt quod FS : FR $= \theta : T$. quomodocunque demum T concipiatur compoſita, ſive arcu BF, ſive ex applicata PF, ſive ex utroque ſimul, ſic itaque Circulum oſculatorem hujus curvæ generaliſſime determinavi.

Non eſt quod judicium meum petas de *Animadverſionibus* Tuis ad CARTESIUM, cum enim maxima pars verſetur circa motum, judicium quod ferrem ignorare non poteris: habes enim aſſenſum meum in omnibus quæ circa motum CARTESIO opponis. Correxi in aliquibus locis errores calami, qui ſenſum turbabant, quod non ægre feres; notavi etiam in margine, ne Lector offendatur, quod recenſendo *Regulam* VII^am^ CARTESII ſenſum omnino contrarium ipſi attribueris, quod tamen nihilominus falſitas hujus Regulæ ex Tuo ratiocinio, mutatis mutandis, demonſtrari poſſit. Placet Tuum criterium pro examinandis Regulis motuum, quod legem continuitatis vocas; eſt enim per ſe evidens, & velut a natura nobis inditum, quod evaneſcente inæqualitate hypotheſium, evaneſcere quoque debeat inæqualitas eventuum. Hinc multoties non ſatis mirari potui, qui fieri potuerit, ut tam incongruas, tam abſonas, & tam manifeſte inter ſe pugnantes Regulas, excepta ſola prima, potuerit condere CARTESIUS, Vir alias ſummi judicii. Mihi videtur vel ab infante falſitatem illarum palpari poſſe, eo quod ubique ſaltus ille, naturæ adeo inimicus, manifeſte nimis elucet. Modus Tuus explicandi duritiem corporum per motum conſpirantem particularum peringenioſus eſt; effecit ut recordarer ſpeculationum mearum, quas ante aliquot annos, ambulando in horto Regio *Verſaliis*, habueram circa jactus & luſus aquarum, quorum aliqui adeo perfecte repræſentabant vaſa diverſarum figurarum, ut illa ex continuo vitro ſolido & pellucidiſſimo conflata dixiſſes; ſed admota manu in mille guttas diſpergebantur, qua remota dictum factum priſtinam figuram induebant. Sentiebam tamen difficultatem aliquam & quaſi reſiſtentiam in diſturbanda figura vaſis. Hinc cogitare cœpi ſi qua arte aquæ ſalienti velocitas reddi-

reddi poſſet infinita vel ſaltem incomparabiliter magna quæ omni impulſui reſiſteret, quod iſta vaſa tandem obrigeſcerent, & ſic exhiberent ſolidum perfectum, quod quovis tamen inſtanti mutaret materiam, ſervata ſemper eadem figura. Quod durities a motu conſpirante particularum proveniat, etiam inde patet, quod materia fluidiſſima alias, qualis eſt aër, quando in vehementem motum agitatur, difficulter corpori duro penetrare volenti locum cedat; ut id videmus in ventis violentis. Et inprimis notabile eſt, quod obſervo explosione ſclopeti mei pneumatici, quod ope aëris condenſati globulum plumbeum trajicit per aſſerem ſatis craſſum in diſtantia 50 paſſuum; obſervo, inquam, ibi aërem eo uſque condenſari, & deinde tanto cum impetu & velocitate erumpere, ut ſub forma viſibili corporis oblongi ſolidi & opaci, appareat, & dicto citius iterum evaneſcat; ita ut firmiter credam, ſi poſſibile eſſet ut eo momento quo aër iſte condenſatus erumpit, globulus aliquis aliunde veniens, & ad aërem erumpentem appellens in directione perpendiculari ad directionem aëris, hunc globulum non ſolum non per tranſverſum aëris penetraturum, ſed ac ſi in durum Corpus alliſiſſet iterum reſulturum fore. Cæterum videris impugnare atomos, quibus tamen Tua opinio circa duritiem favet; quid enim obſtat, quominus credamus materiam etiam fluidiſſimam conſtare corpuſculis minimis, quorum ſingulorum partes ſunt in perpetuo motu conſpiranti poſitæ? Illa ergo corpuſcula ſunt atomi, mente quidem diviſibiles ſed actu indiviſæ, vale. 1697 Jun.

Groningæ. 26. Junii 1697.

Amplitudini Tuæ

Obſequioſiſſimus

J. Bernoulli.

EPISTOLA LVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De occupationibus ſuis. De curva citiſſimi appulſus. De Iſoperimetris. De Synchrona. De Trajectoriis orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Animadverſionibus in CARTESIUM. *De* MALEBRANCHIO. *De cauſa duritiei.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1697 Jul. STatim monere volui, quod, pro prudentia Tua, ipſe e re eſſe judicabis, non decere ut arbitrium recipiam, donec Dominus *Frater* Tuus conſenſum teſtetur, aut ſibi hoc gratum fore ſignificet, ne me ſcilicet ingerere videar. Itaque rogo, ne quicquam a Domino BELLAVALLIO dici cures, quod ſignificet me arbitrium recepiſſe; ſed tantum me a Te nominari, & a Te ſperari Dominum *Fratrem* Tuum in me eſſe conſenſurum.

Nuſquam credo dixi ignotam Tibi fuiſſe Synchronarum applicationem ad cæteras curvas, cum Tua ad Cycloïdes applicatio oſtenderit hoc non poſſe non Tibi eſſe facillimum.

Mirari non debes ſi profundiora Tua non niſi perfunctorie attingere nunc poſſum, cui tot alia ſunt meditanda, legenda, ſcribenda, agenda; in Aula, in officio, cum amicis, cum exteris, coram & per litteras, [quarum ultra 300 quotannis ſcribo], imo & per diſſertationes, veluti de Juribus Principum, de Hiſtoria *Brunswicenſi*, de aliis Hiſtorico-Politicis, de controverſiis Religionis, in quibus ſæpe etiam ſcriptis exerceor. His adde inſpectionem Bibliothecæ *Guelfebytanæ*, Auguſtæ, & noſtræ Electoralis, volutationem qualemcunque novorum Librorum & Relationum alicujus momenti, ne ſim hoſpes in re Publica & Litteraria; curam publicandi ſcriptores Hiſtoricos ineditos ex veteribus membranis [quales nunc ſub

Digitized by Google

ſub prelo ſunt], ubi opus recenſione diligenti; proſecutionem 1697
Codicis juris Gentium Diplomatici, cujus volumen jam edidi, tum Jul.
multa quæ quotidie veniunt in mentem, non in Matheſi tantum
ſed & Phiſica, & Philoſophia profundiore & Hiſtoria & Jure, aliiſque, quæ paucis verbis in ſchedis conſignare ſoleo, ne pereant.
Adde etiam cogitata de Elementis Juris Naturæ conſtituendis longe aliter, quam vulgo opinantur, de quo ſubinde meditor; jam enim promiſi publice ante multos annos; ſed ita ago, ut rem conferam cum Legibus Romanis & uſu Fori: ſed inprimis molior novam Analyſin multo recepta ſublimiorem, pro omni ratiocinatione humana; Chimica etiam, Technica, Mechanica, in quæ ſubinde operarios alo. Ita judicare potes an liceat mihi ſæpe in profundioribus geometricis verſari. Ac proinde non debes, vel indignari, vel verbis durioribus impatientiam animi oſtendere, quoties non ſtatim omnia videor dicere ad mentem Tuam. Neque ideo vel inconſiderantia, vel negligentia objicienda. Me quidem hic ſtylus minus movet, qui ſcio nihil inde benevolentiæ Tuæ deceſſiſſe; alii tamen delicatiores, vel mirarentur, vel ægrius acciperent; præſertim cum decentius abſint: & dici res ipſæ inter amicos poſſunt & vere ſimul & commode, atque ut galli dicunt *obligeamment*.

Interea dum fateor non poſſe me ſemper ſatis attentionis adhibere, non ideo tamen profiteor me, ſi adhiberem, ſtatim rem aſſecuturum. Non dubito quin aliquid egregii artificii Tibi inciderit, neque id a me memini contemni, etſi mentem Tuam non ſatis perceperim. Quod me attinet, quantum nunc tumultuaria conſideratione inter ſcribendum aſſequi licet, puto Synchronas ſemper poſſe haberi per quadraturam. Nam cum, dato tempore, determinari queat punctum in curva data, ad quod mobile pervenit; utique ſi pro eodem tempore id fiat in qualibet curva ordinatim poſitione datarum, hoc modo habebitur quodvis punctum Synchronæ; quia autem præterea id quæritur, ut Synchrona exhibeatur ea, quæ datam rectam tangat; id quidem ob lineas ejuſdem ſpeciei, ſeu ſimiles, atque etiam ſimiliter poſitas ad punctum fixum, ſic fiet: Aſſumatur aliqua ex Synchronis; & ad eam ducatur tangens data rectæ parallela, quod utique fieri poteſt, ſaltem tranſcenden-

ter.

1697 Jul. ter. Inde ex puncto fixo, ad quod ſimiliter ſitæ ſunt lineæ, ducta recta ad punctum contactus producatur, dum ipſi rectæ datæ occurrat, & habebitur punctum, in quo Synchrona quæſita rectam datam tanget, quod eſt punctum appulſus; unde, dato uno puncto, deſcribi jam poteſt Synchrona, quanquam hac jam non ſit opus hoc loco. Eo ipſo enim quod habebitur punctum appulſus, adeoque punctum lineæ celerrimi appulſus quæſitæ; habebitur linea ipſa, quippe ſpecie jam data. Eadem methodus videtur etiam ſervire, ſi celerrimus appulſus quæratur non ad rectam, ſed ad curvam poſitione datam. Cæterum non ſemper curvas conſtructione datas commode ad tangentium inverſas reduci, vel non ſemper facile haberi valorem $dy:dx$, per ordinarias, ſatis ſuperque ipſe expertus ſum, & alios methodi differentialis defectus plus ſatis, vetere jam uſu, compertos habeo. Hoc & loco tamen eos puto vitari; & nihil eſt quod impediat haberi tangentem Synchronæ, ſeu valorem $dy:dx$ per x & a, licet tranſcendenter ſæpe, ex ſuppoſitis tamen quadraturis, cumque aliunde habeatur iterum $dy:dx$, eo ipſo quod tangens Synchronæ quæritur parallela rectæ datæ; habebitur valor ipſius $dy:dx$ bis, quod determinat ipſam x, adeoque punctum Synchronæ, & ſemper hoc caſu inveniri poteſt hoc punctum interſectione duarum linearum, ex quibus ad minimum una eſt tranſcendens, ſi non ambæ, quoties nempe valor ipſius $dy:dx$ eſt tranſcendens. Agnoſco interim nos ad Synchronam ducendam non eſſe obligatos, & ex ipſis per ſe lineis adhuc brevius eam lineam poſſe eligi, quæ eſt breviſſimi appulſus. Nempe, aſſumta linea ex ſpecie datis communis initii quacunque, ſemper determinari poteſt, quam in quovis ejus puncto recta ad quam ibi celerrime appellitur, inclinationem habeat, ſeu angulum faciat cum horizonte, ſi placet, vel ad rectam datam ſi mavis. Eligatur ergo illud punctum curvæ aſſumtæ, in quo recta, ad quam ibi celerrime appellitur, ſit parallela rectæ datæ. Quo facto, recta per hoc punctum, & per punctum communis initii trajecta occurret rectæ datæ in ipſo puncto celerrimi ad ipſum appulſus, adeoque habebitur & punctum lineæ celerrimi appulſus quæſitæ; unde ipſa

ipſa linea quæſita determinatur. Sed in Tuis Methodis altius aliquid latere puto. 1697 Jun.

Pro Iſoperimetris perelegantem & ingenioſam eſſe fateor Methodum Tuam, per centrum gravitatis. Interim indirecta eſt cenſenda, qualis eſt qua Dominus *Marchio* Hospitalius Brachyſtochronam ſolvit, & nos Catenariam. Sed illa quam propono, eſt magis Analytica, & hac revera Brachyſtochronam determinavi; quærendo non ut alias ſolemus, directionem, ſed curvedinem; id eſt datis duobus rectæ indefinitæ parvæ, in angulum fractæ, extremis, quærendo punctum anguli, ſic ut optime præſtetur deſideratum. Qua ratione non puto metui debere quod metuis, ut prodeant inter ſe pugnantes ſolutiones. Nec Ellipticula adhibenda, niſi cum data ponitur longitudo fili, ſeu curvæ inter extrema interceptæ; ubi, etſi non cogites de Ellipſi ipſa, *Optimi* conſideratio determinabit punctum. Nec dubito hoc modo, & Catenariam & ſimiles, cum curva eſt magnitudinis datæ & formæ quæſitæ, directe & ſatis, pro re nata, facile poſſe determinari. Hoc autem poſito, nec (*Fig. 64.*) filum BCD longius aut brevius aſſumi poteſt. TAB. XII. Si non poſſit, filum utique vel Ellipſis fruſtra ibi adhibetur, nec quicquam determinare poteſt. Sed & alteri objectioni Tuæ facile ſatisfit. Neque enim in Catenaria, verbi gratia, pondus filo BCD incumbens in punctum C collectum initio ſupponi debet, ſed per totum filum diſpergendum æqualiter, vel quod eodem redit, concipiendum eſt pondus ipſius BC ſuſpendi ex ipſius BC medio, & ipſius CD ſimiliter ex ipſius CD medio. Quo facto, quærendo ſitum talem, ut, data magnitudine ipſius BC + CD, centrum gravitatis commune maxime deſcendat, reperietur id verticaliter imminere ipſi C, & alia habebuntur, quæ curvedinem determinabunt. Itaque non miror, quod Methodum ſecius acceptam habuiſti ſuſpectam. Nolim tamen Tibi reddere, quod mihi dicis, prius pronuntiaſſe quam ſatis examinaſſe. Etſi enim id ſæpe, credo, in nobis ambobus ſit veriſſimum [cum error non adeo eſt periculoſus, imo fortaſſe aliquando utilior veritate, ſi hæc in iſtis primo ſtatim aggreſſu nimia attentione eſſet redimenda] tamen magis ex decoro eſſe puto his formulis abſtineri.

1697 Jul. Quæ Dominus *Frater* Tuus jam viderit, non ſatis dixerim; miror ipſe, quod Problema accuratius propoſuerit quam opus erat Interim, cum curvaturæ radii cum Brachyſtochrona connexionem viderit, veriſimile eſt, modo HUGENII Tractatum *De lumine* cum attentione tunc conſuluerit, non latuiſſe ipſum undas, adeoque & nec Synchronas. De pulchra illa convenientia, quod ubi $\int x^{n}\, dy$ maximum ibi $\int x^{\overline{-n}}\, ds$ minimum, & contra, non poſſum aliquid dicere, niſi in ipſas illas curvas attentius inſpiciam; quod vides mihi nunc vix licere.

Ego potius proponam Tibi examinandam Methodum, quæ tunc ſtatim in mentem venit, cum, admonitione Tuæ ſolutionis, relegi convenientiam undarum & Synchronarum ad radios, olim fugiente tantum oculo, atque animo conſideratam. Nempe videbar mihi hinc ducere poſſe Methodum generalem ad curvas ordinatim poſitione datas ducendi curvam ubique normaliter occurrentem; fingendo ſcilicet medium eſſe reſiſtentiæ ſic variantis, ut radii exhibeant illas ipſas lineas ordinatim poſitione datas. Quo facto undæ, ſeu Synchronæ, erunt curvæ quæſitæ radiis normales. Quid vero ſi ordinatim poſitione datæ non habeant initium commune, quomodo tunc radios applicabimus? Reſpondeo, ne ſic quidem deficere Methodum, poſſunt enim radii ab uno puncto originarie venientes colligi prius in acamptam ſeu focum linearum ſive cauſticam. Et ita radii rurſus emiſſi ex hoc foco lineari debebunt in medio pergere, per quod curvaturas linearum ordinatim datarum aſſumant. Fateor hæc facilius proponi, quam præſtari: puto tamen conſideratu digna Tibi viſum iri.

Non eſt cur diſputemus, utrum ex verbis Domini *Fratris* Tui utrumque Problema ſolvere tenearis, quandoquidem utrumque ſolvere potes; quemadmodum jam tum notavi; alioqui res litigioſa foret.

Gratum eſt quod meas in CARTESIUM *Animadverſiones* percurriſti; gratius quod placuere. Non tamen putem maximam partem circa motum verſari, etſi fortaſſe potiſſimam; ſed alia quoque attingi, quæ itidem a Te expendi deſidero, ſi ſcilicet vacat. *Lex Continuitatis*, cum uſque ado ſit rationi & naturæ conſentanea, & uſum

uſum habeat tam late patentem, mirum tamen eſt eam a nemine [quantum recorder] antea adhibitam fuiſſe. Mentionem ejus aliquam feceram olim in *Novellis Reipublicæ Litterariæ*, † occaſione collatiunculæ cum R. P. Malebranchio, qui ideo meis conſiderationibus perſuaſus, ſuam de Legibus motus in *Inquiſitione veritatis* expoſitam Doctrinam poſtea mutavit; quod brevi Libello edito teſtatus eſt, in quo ingenue occaſionem mutationis exponit. Sed tamen paulo promptior, quam par erat, fuit in novis Legibus conſtituendis in eodem Libello, antequam mecum communicaſſet; nec tantum in veritatem, ſed etiam in illam ipſam Legem continuitatis, etſi minus aperte, denuo tamen impegit; quod nolui Viro optimo objicere, ne viderer ejus exiſtimationi detrahere velle. 1697 Jul.

Nec minus gratum eſt quod mea explicatio duritiei, per motum conſpirantem, ad mentem tuam fuit. Cum anno 1670 vel 1671 ederem *Hypotheſeos Phyſicæ novæ Specimen*, jam propugnabam duritiem non a quiete ſed a motu eſſe. Et Dominus Wallisius in *Tranſactionibus Anglicis* meam illam hypotheſin tunc recenſens notavit *Guill.* Neilium quoque [eum cui primam dimenſionem curvæ Algebraïcæ tribuunt] judicaſſe, firmitatem a motu, non, ut vult Cartesius, a quiete, petendam. Motus autem conſpirans non tantum reſiſtit turbanti; ſed & ſe reſtituit & quæ dura ſunt, ea revera ſunt elaſtica admodum prompta. Interim quantacunque vis motus conſpirantis ponatur, nunquam tamen revera erit infinita, neque adeo ullæ atomi dabuntur in natura; & motus utique ſemper vinci, ac debilitari poteſt, imo debet, ob corporum perpetuum colliſum inter ſe. Itaque nullum ego puto vel perfecte durum vel perfecte fluidum extare; ſed in omni corpore eſſe quemdam gradum firmitatis & fluiditatis. Et multæ ſunt aliæ rationes, quæ atomos & vacuum quoque in natura non patiuntur. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 2. Julii 1697.

Deditiſſimus
G. G. Leibnitius.

† Juillet 1687. p. 744.

P. S. Beneficium in me conferes, ſi locum, in quo me putas mentem Cartesii ſiniſtre [ſalva licet objectionis vi] accepiſſe, in melius mutes, ſchedula inſerta.

EPISTOLA LVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Synchronis. De curva ex infinitis Ellipſibus arcus æquales reſecante. De Iſoperimetris. De Trajectoriis orthogonalibus. De atomis. De legibus motus. Malebranchii *ſententia.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1697 Jul. Poſtremas Tuas accepi recte; ſchedulam incluſam ad Dominum Bellvallium poſtridie rite curavi. An Epiſtolam meam jamdiu ipſi miſſam impreſſerit, neſcio. Interim,.......... miror ingentem numerum negotiorum diverſiſſimorum, quibus quotidie occuparis, ſed magis miror humeros Tuos qui illa ferre valeant; habes ſane ſingulare donum ſingulis eodem die vacandi & attentionem præbendi, quod nihil difficilius mihi videtur: id ſaltem in me experior; adeo enim non ſui juris eſt mea attentio, ut non ſine ſumma animi moleſtia illam avocare poſſim a re cui ſemel affixa, & alii adhibere. Hinc, ſi Lectiones, quorum quotidie tres, nonnunquam plures, tam publice quam privatim, in Mathematicis & Philoſophicis mihi habendæ ſunt, non ita in promptu haberem, ſed ſi illa in charta conſignare deberem, quod plerique Profeſſorum facere ſolent, neſcio an huic oneri par eſſem. Sunt tamen & alia mihi peragenda quæ pariter non multum otiandi tempus mihi relinquunt, unde vides nec me ſemper rem meditari ſatis poſſe, prout vellem, atque adeo eamdem mereri veniam

niam quam petis. Quod ſi igitur non ſtatim alteri vacaverit attente conſiderare quæ ab altero proponuntur, credo nos optime facturos, quando nihil urget, ſi utrique opportunitati noſtræ conſulentes otium ſponte ſe prodens exſpectaverimus, ut negotiis ordinariis non interruptis, eo attentius & accuratius rem examinare queamus. 1697 Jul.

Interim, cum putem me mature ſatis perſcrutatum fuiſſe Synchronarum naturam, & diu multumque in hac materia fuiſſe, jam ſine ſcrupulo pronuntiare audeo, quæ mihi veriſſima videntur. Facile credam, quod tumultuaria conſideratio inter ſcribendum Tibi ſuggeſſit, Synchronas ſemper poſſe per quadraturas haberi: primum enim hoc eſt quod ſe ſe offert in contemplatione harum curvarum, quod ſcilicet, dato tempore, determinari queat punctum in curva data, ad quod mobile pervenit, & quod hoc fieri poſſit pro eodem tempore in qualibet curva ordinatim poſitione data, & ſic tota Synchrona conſtrui. Sed hujuſmodi conſtructio eo ipſo non eſt æſtimanda, quia non per continuam Quadraturam unius ejuſdemque indeterminati ſpatii peragitur, & quia per conſequens exinde non haberi poteſt modus ducendi tangentes ad Synchronam, qui tamen hic ſumme neceſſarius eſt. Rogo itaque ut paulo penitius inſpicias negotium; forſan revocabis tua verba, quando dicis, *Aſſumatur aliqua ex Synchronis, & ad eam ducatur tangens data recta parallela, quod utique fieri poteſt, ſaltem tranſcendenter*; nam nondum video quomodo vel tranſcendenter, vel algebraïce duci poſſit tangens, ope conſtructionis illius per quadraturas diverſorum ſpatiorum. Ego quidem in hoc puto latere maximum artificium, ut diverſæ iſtæ quadraturæ reducantur ad quadraturam indeterminatam unius ſpatii continui, quod ego feliciter præſtiti: unde mihi facile fuit tangentes Synchronæ determinare, non ſolum tranſcendenter, ſed algebraïce prorſus. Ne ſine ratione hæc me dixiſſe putes, dabo exemplum ſimpliciſſimum, ubi ſtatim Tibi apparebit quam neceſſaria ſit iſta reductio, ſi modo animum vel tantillum advertere voles; quod rogo ut facias; eſt enim Tua applicatione dignum, quod forſan ad novas ſpecu-

Digitized by Google

1697 Jul. TAB XII. lationes curvarum anſam præbebit. Concipe (*Fig. 66.*) ſuper axe dato AB deſcriptas Ellipſes infinitas ACB, ACB, ACB, &c. Quæritur æquatio differentialis, & proinde modus ducendi tangentes Curvæ CCC, cujus conſtructio talis eſt, ut ductis applicatis CD, CD, CD, &c. ſegmenta Ellipſium CDB, CDB, CDB, &c. omnia inter ſe ſint æqualia. Hoc Problema per reductionem ſegmentorum CDB, CDB, &c. Ellipſium diverſarum ad ſegmenta Ellipſis ejuſdem facillime ſolvo. At ſi curva CCC, non ſegmenta, ſed arcus Ellipſium BC, BC, BC, &c. æquales abſcinderet, licet priori quodammodo ſimplicius appareat, hîc tamen methodi meæ imbecillitatem agnoſco: Jam enim arcus diverſarum Ellipſium ad arcus ejuſdem reduci nequeunt; neque hactenus perſpicere potui ullam viam perveniendi ad tangentes: ſi aliquam mihi monſtrabis, etſi tranſcendenter, habebo Tibi gratias haud mediocres. Vides ergo in quo methodus mea conſiſtat, ſcilicet in reductione illa quadraturarum vel rectificationum; hæc autem reductio perpetuo locum habet, quando curvæ ſunt ſimiles, & ſimiliter poſitæ, adeo ut Synchronarum æquatio differentialis, proindeque tangentium determinatio algebraïca, hac methodo, nunquam non reperiri poſſit. Quoniam vero etiam Problema celerrimi appulſus ſolvi, citra Synchronæ conſiderationem, ſingulari & eleganti quadam conſtructione; communicabo libens ſi deſideraveris. Cæterum, ſi loco lineæ rectæ poſitione datæ, adhibeatur curva; res non æque facilis eſt, ut credis: tunc enim recta parallela tangenti hujus curvæ in puncto appulſus duci non poteſt; ipſius enim inclinatio jam non datur, ut antea.

Fateor methodum meam pro Iſoperimetris eſſe indirectam, ſed non puto aliam habere *Fratrem*; cum enim olim multus fuerit in curvatura lintei a liquore expanſi .... ſuſpicor hoc idem ipſi anſam dediſſe ad conſiderationem Problematis de Iſoperimetris. Interim Tuam methodum [quæ utique magis analytica eſſet] bene procedere nondum aſſerere auſim; dicis Te, illius ope, determinaſſe revera Brachyſtochronam, memini quidem Tuæ ſolutionis, quam mihi communicaveras; erat autem ſimilis fraternæ: Optarem itaque ut mihi oſtenderes, quomodo per Calculum determinares Circulum

Circulum oſculatorem, ex inventione ſitus trium punctulorum. Fac ſi placet applicationem in Iſoperimetris noſtris, ut videam an pervenias ad ſimpliciſſimam illam determinationem radii oſculantis, quem oſtendi ſemper ſecari a baſi curvæ in ratione data 1 ad *n*. Præterea ſi hæc methodus rite valeret, deberes etiam poſſe ſolvere Brachyſtochronam inter duo puncta determinatæ longitudinis; id eſt, ſi (*Fig.* 67.) data duo puncta A, B, conjungenda ſint cum linea curva AMB, ipſi datæ rectæ C æquali; determinare poteris curvaturam AMB, quæ ex omnibus curvis ejuſdem longitudinis citiſſime percurratur. Problema utique poſſibile eſt; ſed ingenue fateor, meæ methodi hic nihil præſtant. * Si Tua eo uſque penetrat, agnoſcam præſtantiam ejus; gratiſſimum facies ſi calculum communicaveris. 1697 Jul. Tab. XII.

Iterum dicis *Fratrem* meum vidiſſe connexionem inter Brachyſtochronam & curvaturam radii; ſed puto ego non vidiſſe; nullibi enim mentionem facit hujus connexionis; ſed dicit dumtaxat, inſiſtendo iiſdem veſtigiis etiam inveniri poſſe curvaturam radii, & ſic identitatem illam non animadvertit; alias ridiculum eſſet dicere, inſiſtendo iiſdem veſtigiis reperiri poſſe curvam radii, quæ jam ſimul reperta eſt cum Brachyſtochrona.

Methodus, quam mihi examinandam proponis, quamque deſumſiſti ex convenientia undarum & Synchronarum; revera peringenioſa eſt; de illa etiam jam ante annum, cum primum huic ſpeculationi vacarem, cogitabam. Uſus vero acamptarum, ſeu cauſticarum, quas acute huic negotio accommodas, mihi tunc non venit in mentem. Interim hæc methodus ducendi normalem ad curvas ordinatim poſitione datas maxima laborat difficultate: quia ſi in uno exemplo procedit, infinita alia ſunt, ubi inutilis eſt; licet curvæ ordinatim poſitione datæ commune initium habeant; quod vel exinde intelliges, quod plerumque impoſſibile ſit fingere medium qualiscunque reſiſtentiæ variantis, quod exhibeat omnes illas

* *Dedit tamen ſolutum id Problema; & univerſaliter quidem, in* Act. Erud. 1718. Febr. p. 74. *aut* Mem. de l'Ac. Roy. des Sc. 1718. p. 120. *Vide* Opp. Tom. II. N°. CIII. pag. 254.

1697 Jul. illas lineas ordinatim poſitione datas; quin-imo eſt purum putum accidens, ſi id contingat. Verum quidem eſt omne medium exhibere infinitos radios, ſeu curvas ordinatim poſitione datas; ſed viciſſim una linea jam ſufficit ad determinandam reſiſtentiam medii quæſiti, ut omnes reliquæ poſitione datæ ſint ſuperfluæ; & ſic ſæpiſſime eveniet, ut quælibet ex curvis ordinatim poſitione datis peculiare medium requirat; atque adeo methodus evadat impoſſibilis; unde vides Problema hoc, *Quærere medium reſiſtentiæ variantis, quod exhibeat ordinatim poſitione datas*, eſſe ex eorum numero, quæ dicuntur plus quam determinata: id eſt, quæ habent conditiones ſuperfluas; quæ nunquam [niſi per accidens] ſimul impleri poſſunt. E re tamen eſt notare caſum, quando hæc methodus uſui eſſe poteſt: tunc nempe, ut plurimum, [non auſim dicere ſemper] quando curvæ ordinatim poſitione datæ ſunt ſimiles, & ex puncto dato ſimiliter poſitæ; Interim, hoc caſu, non opus habeo recurrere ad Methodum indirectam; eſt enim mihi alia naturalior, ex fundamento ſupra memoratæ reductionis quadraturarum & rectificationum deſumta; mediante qua, directe determino curvam ordinatim datis normaliter occurrentem, quando ſcilicet ordinatim datæ ſint tranſcendentes; quod olim * Tibi, ſi meminiſſe velis, tanquam difficile quid proponebam; nam ſi algebraïcæ ſunt, res adeo facilis eſt, ut proponi non mereatur.

Concedo non dari corpuſcula perfecte dura; ſed non ſequitur non dari atomos: per atomum intelligo corpuſculum, mente quidem diviſibile, ſed quod actu diviſum non eſt, neque diviſum fuit: non quod actu dividi non poteſt; tales enim atomi, ut vere ſentis, non darentur, quia requirerent perfectam duritiem; ſed per meam definitionem ſufficit, ut dentur talia corpuſcula, quorum particulæ, a Mundo condito in hunc uſque diem, nunquam fuerunt ſeparatæ; quod forſan motum conſpirantem habeant ſatis validum, ad reſiſtendum. Non tueor vacuum, neque atomos a GASSENDO propugnatas; interim meas meo modo conceptas mihi largiri debes, nihil derogant Tuæ hypotheſi, ſed de his alias.

Libellus

* Epiſt. XXIX.

Libellus Malebranchii in quo novæ Leges motus conſtituuntur, conſcriptus fuit cum *Pariſiis* eſſem, me præſente & approbante; nihil enim in eo poſuit Author, niſi prius conſultis nobis, Hospitalio & me; quod autem etiamnum in pluribus a veritate alienus ſit, hoc ne mirere; veram enim quantitatem virium tunc nondum admittebamus. Quod autem Tecum non communicaverit, antequam ederet, ratio eſt quod Te hac in parte falſo principio nixum credidit. Audivi Tractatum aliquem Hugenii poſthumum propediem lucem viſurum, de Mundo Saturni; neſcio an id ipſum ſit quod a Bellavallio quæris de *Coſmotheoro*. Vale & ama. 1697 Jul.

Groningæ, *d.* 17. Julii. 1697.

Amplitudinis Tuæ

Cultorem aſſiduum.

J. Bernoulli.

EPISTOLA LVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Synchronis. De trajectoriis orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Iſoperimetris. De Malebranchio. *De Atomis. De Synchrona iterum.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

. . . .

. . . .

Vellem me multis poſſe ſufficere, quemadmodum pro benignitate Tua pronuntias. Ego vero cogor agnoſcere, ſæpe id 1697 Jul.

Digitized by Google

1697 Jul. id parum procedere, quoties ſcilicet occurrunt, quibus profundius immergendus ſit animus, qualia ſunt Analytica illa Tua, in quibus plus ſatis experior Tecum, non poſſe me diſtractum Tibi ſatisfacere, prout vellem: ſed bene habet, quod non indiges ope mea.

Video non tam facile eſſe, quam mihi primo aſpectu viſum erat Synchronæ quadratorie determinatæ tangentem ducere; quod ſi quadratura effici poſſet, vel algebraïce, vel tranſcendenter quidem, ſed tamen exponentialiter, eo caſu ceſſaret difficultas. Exponentialiter autem exhibere licet non tantum quæ ex Hyperbolæ quadratura pendent, ſed & quodammodo, quæ pendent ex quadratura Circuli. Interim nondum hoc præſtare licuit in altioribus, & jam aliquoties dicere memini perfectiſſimam Tranſcendentium expreſſionem eſſe per Exponentiales. Recordor, & mihi olim occurriſſe iſtos tranſitus a quadraturis ad quadraturas, & difficultatem apparuiſſe; ſed nullam tunc apparuiſſe ſuperandi rationem, niſi vel per Series, vel per Exponentiales. Illa imperfecta eſt, niſi cum a Serie rurſus deinde regreſſus ad æquationem differentialem quadratoriam haberi poteſt: hæc eſt limitata hactenus. Itaque Tuum artificium reducendi rem ad unam quadraturam continuam non parvi momenti erit, & licet etiam limitatum ſit, deſideretque ut curvæ ordinatim poſitione datæ ſint ſimiles & ſimiliter poſitæ, fortaſſe tamen aliquando vel a Te ipſo vel ab alio inventum ulterius promovebitur. De his ergo plurimum Tibi debebimus; grata etiam & utilis conſtructio Tua erit, ſine Synchronæ conſideratione. Et cum tale ſit quod Tibi in mentem venit; video utique habuiſſe Te cauſam, cur genio admonenti tribueres, quod ingenio erueras; ſolet ſcilicet nobis momento quodam lux ſubita interdum affulgere.

Sed quod ais Problema eſſe plus quam determinatum, quoties quæritur medium, in quo radii in datas lineas tranſeant; id velim denuo examines; fortaſſe enim rem ſemper poſſibilem deprehendes. Nam in omni ſuperficie, adeoque & plano aſſumi poſſunt non tantum infinita, ut in linea, ſed infinities infinita. Si igitur varies medium uno tantum modo, ita, verbi gratia, ut (*Fig.* 68.) varietas ſolum aſſumatur ſecundum lineam A B C D E, & ut linea TAB. XII.

A A,

AA, tota BB, tota CC, &c. unam ſubeat legem variationis, ſeu ejuſdem ſit denſitatis; tunc fateor, Problema fore plus quam determinatum; [nec refert BB verbi gratia recta ſit an curva;] ſed ſi rurſus alia variatio concurrat ſecundum lineam ALMN ſeu ut variatio ſit duarum dimenſionum, ita ut, quodlibet plani punctum a quolibet denſitate differat; ſeu ut punctum BL non tantum differat a puncto BM, ſed & a puncto CL, tunc poſſibile utique eſt variationem diverſitatis in quovis puncto eam eſſe, ut ibi linea radii tranſeat, prout deſideramus. 1697 Jul.

Nuſpiam memini me dicere rem æque eſſe facilem in appulſu ad rectam & ad curvam.

Cum Tibi methodus mea pro maximis & minimis ſit perſpectiſſima; quæ in eo conſiſtit, ut lex minimi vel maximi & in particula locum habeat, Tibi ipſi facillimum erit, & multo facilius quam mihi, applicationem ad Iſoperimetra conſtituere, & puto hanc Methodum etiam applicari poſſe ad Brachyſtochronam datæ longitudinis, inter duo puncta interceptam, in qua experimentum Methodi fieri vellem. Ecce enim, quæritur (*Fig.* 67.) AMB in TAB. XII. qua grave breviſſimo tempore perveniat ab A ad B, ſed ea lege ut ſit AMB æqualis datæ C. Poſito igitur has leges etiam in particula quavis indefinite parva LMN eſſe veras, ut LMN ſit recta, ſemel fracta, datæ longitudinis breviſſimique deſcenſus; utique manifeſtum eſt Tibi ipſi, rem prius poſſe reduci ad hoc Problema ordinarium. Datis (*Fig.* 69.) focis L & N & fili longitudine TAB. LM + MN, vel LQ + QN, deſcriptaque Ellipſi PQR, invenire in ea punctum M ita ſe habens, ut deſcenſus LMN ſit XIII. talium citiſſimus; poſito dari A initiale punctum deſcenſus, adeoque quæ ſit velocitas gravis in L vel M. Hoc autem Problemate ſoluto, exinde jam conſiderando LM, MN eſſe infinite parvas, habebitur proprietas aliqua ſaltem differentio-differentialis curvæ quæſitæ.

Aliud eſt Dominum *Fratrem* Tuum vidiſſe connexionem Brachyſtochronæ & curvaturæ radii, aliud vidiſſe, aut attendiſſe identitatem. Poſſumus connexionem videre imperfecte, ut non ſtatim videamus ejus gradum. Keplerus vidit connexionem, vel

 conve-

1697 Jul. convenientiam, inter Diaclaſticam & Hyperbolam, ſed non vidit Hyperbolam eſſe ipſam Diaclaſticam, quod CARTESIUS fortaſſe ex KEPLERI meditationibus admonitus invenit.

Agnoſces ipſe, credo, Dnum MALEBRANCHIUM melius facturum fuiſſe, ſi me, cujus admonitione correxerat regulas ſuas, de ipſa correctione conſuluiſſet, antequam eas in publicum denuo præcipitaviſſet, quantillum enim erat aliquot ſeptimanas expectare? Nec tam facile ſibi de me perſuadere debebat, falſis me principiis niti, cum res oſtenderit ipſum potius talibus fuiſſe nixum.

Præterea error ab eo commiſſus eſt in Regulis novis, non tantum contra principium meum, cui non aſſentiebatur, ſed & contra illam ipſam meam continuitatis Legem, cui aſſentiebatur: quod ego admoniturus eram, ſi tempeſtive me conſuluiſſet, diſſimulaturus ea, de quorum principiis pugnabamus.

Ubi meas ad CARTESIUM *Animadverſiones* remittere voles; quod rogo ne ſine Tuis notis ſeparatim ſcriptis facias; poteris dirigere ad Dominum *Gerardum* MEJERUM Theologum *Bremenſem.*

Circa corpora indivulſa poſſunt conſtitui gradus. Et *ſummus quidem gradus* eſt, cum partes eumdem ſemper ſervant ſitum inter ſe, ſeu cum corpus eſt perfecte rigidum, atque hoc eſt, quod omnes hactenus atomi nomina accepere, & quod *Democritici* & *Gaſſendiſtæ* & ex *Carteſianis* CORDEMOIUS in rerum natura eſſe credidere; quibus etiam nuper acceſſit HARTSOEKERUS; eo tantum diſcrimine, quod *Democritici* ex ſolis atomis omnia componunt, eiſque vacuum interjiciunt, ſed HARTSOEKERUS materiam perfecte fluidam inter atomos perfecte duras diffudit, duo extrema inter ſe conjungens. Ego vero prô demonſtrato habeo, nec perfecte dura, nec perfecte fluida dari. Et gaudeo quod nunc video Te mecum perfecte dura, ac vacuum etiam rejicere. Nam omne corpus etiam quantuluncunque, meo ſenſu, dividitur in partes actu & quidem non tantum mente aſſignabiles, ſed & diverſitate motuum reapſe diſcretas, ut in vorticibus ipſiſque jactibus aquarum; ita ut pars quidem in tali corpore a parte recedat, non tamen ſtatim a toto.

Ita

Ita jam venimus ad *ſecundum indivulſi gradum*, ut licet partes mutent ſitum inter ſe, nulla tamen pars unquam recedat a toto, ſeu ut ſemper ſervetur continuitas partium omnium. Huc, ſi bene Te intelligo, inclinare videris, & fateor me quoque ſæpe deliberaſſe an talia dentur corpora, nec dum impoſſibilitatem videre, nec tamen hactenus demonſtrare poſſe quod dentur. 1697 Jul.

Tertius gradus indivulſorum eſt in corporibus, quæ aliquas quidem partes mutant, ſed tamen aliquas ſervant; ubi rurſus quæritur, an datur corpus *a*, in quo aliqua pars *b* ſemper fuerit, ſemperque futura ſit; aliqua, inquam, pars *b*, non quidem ita ut totum *b* ſemper fuerit unum continuum, [id enim recideret in gradum præcedentem,] ſed ita tamen ut, licet ipſum *b* divulſum fuiſſe ponatur, partes nihilominus omnes ipſius *b* ſemper manſerint, manſuræque ſint in *a*, adeoque nunquam niſi intra certos limites a ſe invicem recedant.

Quartus gradus eſt, an detur *a* & in eo pars *b* ſic, ut non quidem totum *b*, nec etiam aliqua determinata ipſius *b* pars *c* ſemper maneat in *a*, [eo enim caſu recideremus in gradum tertium] ſed ut aliqua tantum pars ipſius *b* indefinita *x* maneat in *a*, licet forte ſemper imminuenda; vel ut diſtinctius loquamur, quæri poteſt an dentur in *a* duæ partes *b* & *p*, ſic ut ſemper ipſius *b* aliqua pars *x* & ipſius *p* aliqua pars *y* nunquam niſi intra certos limites, quos per ipſum *a* definimus, a ſe invicem recedant. Quanquam rurſus diſtingui poſſit, an limites per *a* definiti ſint certæ magnitudinis, ſi ponamus ipſum *a* eam magnitudinem nunquam excedere; an vero ſint potius limites certi officii, ut ſi *a* [velut animal] etiam ipſum indefinite creſcere, vel minui intelligeretur. Et poſſent multo plura adhuc in conſiderationem venire non parvi momenti ad penetrandum in rerum interiora; ſed hæc Tu, pro acumine Tuo & pro ætate Tua, melius proſequere. Vale.

P. S. Cogitavi annon artificium Tuum puncta Synchronæ una quadratura continua inveniendi aliquid cognatum habeat methodo ſequenti. Aſſumta (*Fig.* 70.) una AC ex curvis poſitione datis, Tab XIII. & in ea aſſumto quoque puncto 1C, ad quod tempore certo BT perveniendum eſt, quæratur id tempus per quadraturam, atque ita

1697 Jul. quadratorie exhibeatur linea temporum AT, ſeu cujus ordinatæ ſint ut tempora ordinatim reſpondentia punctis C, curvæ aſſumtæ AC. Jam pro alia curva A (C) ſimili cum aſſumta, & ſimiliter poſita ad A, quærendum eſt punctum 1 (C) in curva A (C) ad quod in ea perveniatur a gravi eodem tempore, quo ad 1C in curva priore AC. Eam ob rem redeamus ad curvam AC; & ut ſe habet curvæ novæ A (C) parameter, ad parametrum curvæ AC, ita [nova hypotheſi] eadem proportione in AC ponamus vim gravitatis fuiſſe fortiorem; ſic omnia in curva AC hac nova gravitate fient proportionaliter ad ea quæ in curvæ A (C) priore gravitate. Porro linea temporum nova A (T) pro AC, auctæ gravitatis vi percuſſa, habebitur nulla nova quadratura, ſed ordinatis prioris lineæ temporum in eadem ratione imminutis in qua vis gravitatis fuit aucta. Ita habebimus etiam punctum 2C in ipſa AC, ad quod, aucta vi gravitatis, perveniretur eodem tempore, quo priore gravitate antea ad 1 C. Cui puncto 2 C ſimiliter poſitum punctum quæramus in curva ſecunda A (C); id erit punctum 1 (C) quæſitum, quo grave in ea curva, vi priori ſeu ordinaria gravitatis, eſſet perventurum eo tempore, quo, eadem vi gravitatis ordinaria, perveniret grave ad 1 C in curva prima AC. Sed hæc nonniſi per tranſennam nunc intueri poſſum. Itaque parum omnia aſſequenti veniam dabis.

Dabam *Hanoveræ* 25. Jul. 1697.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPIS-

EPISTOLA LIX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Differentiationis de curva in curvam Principia.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Litteras meas nuperrimas acceperis. Interea ***Moſcorum*** Monarcham, ejuſque Legationem in vicinia videmus, & quidam ex comitatu in ſe recepit mihi procurare reſponſiones ad quæſita mea circa res ***Moſcorum*** ſcripto conſignata. Dum huc redeo, more meo in itinere meditatus, deſideratam a Te Methodum generalem inveni, per quam Tangentes ducuntur ad curvam, cujus puncta per ordinatim diverſarum curvarum figurarum quadraturas determinantur, ut jam neceſſe amplius non ſit, vel curvas eſſe ſimiles, & ſimiliter poſitas, vel quadraturas diverſarum ordinatim curvarum reduci ad unam, vel recurri ad Series, vel rem revocari ad Exponentiales, quorum nihil generalem methodum præbet. Exemplum exhibebo, quod primum in mentem venit, unde facile ad Ellipſes tuas applicabis; & licet exemplum, quod affero, etiam particularibus illis Methodis obedire poſſit, videbis Methodum, quæ adhibita eſt, nullis limitibus coerceri. Sint (*Fig.* 71.) Lineæ Logarithmicæ quotcunque VC, $V(C)$ $V((C))$ &c. quarum axis communis AB, aſymptota AS, commune in axe punctum V: ducenda eſt $1C\theta$ tangens curvam $1C.\ 1(C),\ 1((C))$ quæ curva talis ſit naturæ, ut arcus logarithmicarum $V1C$, & $V1(C)$ itemque $V1((C))$, ſint æquales inter ſe. $A1B$ ſit x, parametri harum curvarum ſint a, (a), $((a))$ &c. ita ut $1B1C$, $1B1F$, $1B1G$ ſint reſpective $a\int dx : x$, vel $(a)\int dx : x$ vel $((a))\int dx : x$ &c. manente x, variataque tantum parametro a; porro patet ſi habetur ratio ipſius $1C1F$ ad $1F1(C)$ habitum iri tangentem curvæ $1C1(C)1((C))$, ducta enim $1B\theta$ quæ ſit parallela ipſi $1F1(C)$, 1697 Auguſt.

ſeu

1697 Auguſt. ſeu tangenti curvæ $V1C$ in $1C$, & ad partes $1(C)$, & quæ ſit ad ipſam $1B1C$ ut $1F1(C)$ ad $1F1C$, tunc juncta $1C\theta$ erit tangens quæſita. Porro ex dictis patet $1F1C$ eſſe $da\int dx : x$; ſupereſt ergo, ut inveniatur apte etiam $1F1(C)$ atque in hoc conſiſtit negotii cardo. Jam $1F1(C)$ eſt differentia inter duos arcus $V1C$ & $V1F$, & ſumma ex differentiis partium eſt differentia totorum. Ergo ſi ducantur parallelæ innumeræ, indefinite ſibi vicinæ, nempe $1B1C$, $2B2C$, $3B3C$, &c. & his interceptarum reſpondentiumque ſibi portionum ex curvis $V1C$ & $V1F$, quærantur differentiæ, nempe $1C2C - 1F2F$, & $2C3C - 2F3F$ &c. & harum differentiarum quæratur ſumma, ea exhibebit ipſam differentiam totarum linearum, $V1C$, & $V1F$ nempe ipſam $1F1(C)$. Jam ut reſpondentium, veluti $1C2C$ & $1F2F$ quæramus differentiam; conſiderandum eſt ipſam $1C2C$ & $1F2F$ communi expreſſione fore $\sqrt{(dxdx+dydy)}$, ſeu quia hic $dy = adx : x$ [poſita tamen a variabili, non quidem in eadem curva, ſed tamen pro tranſitu a curva ad curvam] ideo $1C2C$ vel $1F2F$ fore $dx\sqrt{(aa+xx)} : x$. Unde ad habendum differentiam inter $1C2C$ & $1F2F$ patet tantum $\sqrt{(aa+xx)}$ differentiari debere ſecundum a, manente x more meo dudum expoſito; & differentiam multiplicandam per $dx : x$, unde reperietur $1C2C - 1F2F$ fore $adadx : x\sqrt{(aa+xx)}$. Jam contra in ſummandis rurſum omnibus talis differentiis, eleganter evenit, ſemperque evenire debet, ut a vel da rurſus ſint conſtantes; Ergo ſumma omnium $1C2C - 1F2F$ & $2C3C - 2F3F$ &c. ſeu $1F1(C)$ erit $ada\int dx : x\sqrt{(aa+xx)}$, qualis quantitas ſemper habetur per quadraturas: Ergo jam habetur tangens quæſita. Nam tantum oportet facere $1B\theta$ ad $1B1C$ ut $a\int dx : x\sqrt{(aa+xx)}$ ad $\int dx : x$ ſeu ut $1F1(C)$ ad $1F1C$, ubi communis utrique rationis terminus inaſſignabilis da neceſſario & ſemper evaneſcit. De ipſis iſtis quadraturis amplius reducendis, quemadmodum ſane hic fieri poteſt, nunc equidem non laboro.

Si $1B1C$, vel $1B1F$ etiam habitæ fuiſſent per quamdam quadraturam, ubi a fuiſſet ingreſſa vinculum quadratorium, eodem modo fuiſſet procedendum ut proceſſimus in exhibenda differentia inter $V1C$ & $V1F$, nempe differentianda fuiſſet quantitas ſub vinculo

culo quadratorio contenta, ſed ſecundum a, & proveniens rurſus ſummandum, ſed ſecundum x. Nec video quid hunc proceſſum impedire unquam poſſit; uſque adeo ut adhiberi etiam ſuo modo queat, cum quantitates ne quadratorie quidem, ſed tantum differentialiter, vel quacunque alia expreſſione ex ſummis differentiiſque cujuſcunque gradus complicata dantur; etſi tunc etiam determinatio tangentis quæſitæ non ſemper conſtructione quadratoria, ſed tamen aliqua differentiali explicatione utcunque poſſit haberi. Hanc novam noſtrarum methodorum applicationem, qua defectus aliquis Calculi differentialis tollitur Tibi non diſplicituram puto, Tuoque ingenio præclare illuſtrari atque augeri poſſe confido. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 3°. Auguſti 1697.

Deditiſſimus
G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA LX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De methodo differentiandi de curva in curvam.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Binas meas acceperis. Priores Tuis reſpondebant: ſequentes novam Methodum differentiationis a Te deſideratam continebant. Has nunc ſcribo, ut aliquid addam, quod nuperrimas ſcribenti effluxit. Sententia nimirum mea eſt, recte nos facturos ſi nonnihil adhuc novam hanc Methodum diſſimulemus, donec ipſi ſatis uſi ſimus; nam multa ibi latent majoris momenti, quam quis prima fronte ſuſpicetur. Itaque optimum puto, ut neque proponamus aliis quærendam hanc differentiandi vel tangentes ducendi rationem, neque a nobis inventam dicamus, multo minus expo- 1697 Auguſt.

Digitized by Google

1697 Auguſt. namus in quo conſiſtat artificium, donec nobis ipſis licuerit proſequi pro dignitate. Nam ex nova differentiandi Methodo neceſſe eſt viciſſim novas etiam ſummandi rationes oriri, ad quas aliter fortaſſe aditus vix pateret. Exempli cauſa, in figura & caſu Epiſtolæ meæ noviſſimæ, patet Arcum VC dare ſummam omnium $a\,d\,a\int dx : \sqrt{(aa + xx)}$ atque ita cum binæ ſunt variationes inter ſe diverſæ, inſtitui poteſt ſummatio; quod ſæpe requiri jam olim deprehendi. Quin amplius cum a poſſit variam accipere ſignificationem, conſequens eſt tum pro quadraturis, tum pro reductione æquationum differentialium, hac ratione obtineri poſſe, quæ antea Methodis noſtris obſtinate ſe ſe opponebant, ut res ipſa Te mox docebit.

Et ea multorum Problematum natura eſt, ut nonniſi per quadraturas iſtas diſgregatas, ut ita dicam, ſeu ordinatim diverſas conſtrui poſſint; quas utique evitare non licet, quoties illæ quadraturæ ordinatim diverſæ ad unam reduci non poſſunt. Sed cogor nunc abrumpere, quoniam *Brunſvigam* diſcedendum eſt, paulo ante nundinas, ita jubente Sereniſſimo *Brunſvicenſium* Duce, quod in ipſis nundinis exterorum multitudo otium ei mecum ſatis colloquendi neget. Dominus BEAUVAL BASNAGE mihi ad nuperam ſchedam a Te curatam reſpondit. Mea in CARTESIUM, cum Tuo judicio Tuiſque animadverſionibus demum ſuo tempore expecto, Vale,

Dabam *Hanoveræ* 9°. Auguſti. 1697.

Deditiſſimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

EPIS-

EPISTOLA LXI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad Epiſtolam LVIII.

De Synchronis. De Curva citiſſimi appulſus. De Trajectoriis Orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Iſoperimetris. De Atomis. De Hartzoekero & La Montræo. *Methodus differentiandi de Curva in Curvam promovetur. De Trajectoriis.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

. . . .

GRatum eſt quod tandem agnoſcis non tam facile eſſe Synchronæ quadratorie determinatæ tangentem ducere. Dolebam ſane, cum viderem a Te verbis meis parvam adeo fidem haberi, ut nolueris tantiſper cedere in iis, quæ tumultuarie tantum conſideraſti, ego vero improbo meditandi labore penitus enucleavi & plus ſatis examinavi. 1697 Auguſt.

Methodum puncta Synchronæ una quadratura continua inveniendi, cujus adumbrationem in fine litterarum adjeciſti, velim ut accuratius perficias; videtur pulchri quid habere: nondum recte video, quo tendat, aut quid faciat ad determinationem tangentis Synchronæ; neque ſatis capio mentem Tuam, quod ſcilicet intelligas per *vim gravitatis fortiorem factam*, & per hæc verba; *ſic omnia in curva* AC *hac nova gravitate fient proportionaliter ad ea, qua in curva* AC *priore gravitate*; mihi quidem videtur, prout ego rem concipio, jam per ſe, gravitate non mutata, omnia eſſe proportionalia in utraque curva, ſiquidem ſimiles ſupponantur. Ecce jam ſolutionem & meam conſtructionem pro breviſſimo appulſu, quia illam gratam fore dicis. Videbis ipſe optime an aliquid cum idea Tua cognati habeat; peragitur quidem ſine Synchronæ

1697 Auguſt. Tab. XIII. conſideratione; interim & hujus tangentes facillime per illam ducuntur. Problema ita ſe habet. *Datis* (*Fig.* 72.) *ordinatim poſitione curvis ſimilibus ex eodem puncto* A *ſimiliter deſcriptis* AIF, AHD, AGB, *&c.* [NB. non neceſſe eſt ut habeant commune initium] *& data poſitione recta* CD; *quæritur ex omnibus iſtis curvis illa, per quam grave, a puncto* A *deſcendens, tempore breviſſimo appellat ad rectam* CD. Solutio. Aſſumatur ex curvis ſimilibus una quædam conſtans, ut AGB; ſintque duæ variabiles AIF, AHD, ſitum proximum habentes. Jam ſi AHD, vel AIFE, illa ſit per quam grave celerrime deſcendit ad datam CE, oportet ut *t* AIFE ſit = *t* AHD (per *t* AIFE, *t* AHD, intelligo tempus per AIFE & per AHD,] utrumque enim tempus minimum, & hinc inde creſcere ſupponitur. Ductis per D & E, rectis ADB, AEN, ſecantibus curvas in F, D, & N: Intelligatur ducta NP parallela ipſi CD, quæ ſecet AB, productam in P; ita fient Triang. ſimilia FED, & BNP, in quorum laterum FE, FD, vel BN, BP, ratione invenienda conſiſtit caput rei, ut videbis; jam facile demonſtratur tempora per arcus ſimiles eſſe in ſubduplicata ratione eorum ſubtenſarum, aliarumve linearum homologarum: Ergo *t*AHD, [*t*AIFE]: *t*AIF $= \sqrt{AD} : \sqrt{AF} = \sqrt{AP} : \sqrt{AB}$ Eſt autem iterum, ob ſimilitudinem curvarum *t*AIFE : *t*AIF = *t*AGBN : *t*AGB ideo *t*AGBN : *t*AGB $= \sqrt{AP} : \sqrt{AB}$ & dividendo *t*BN : *t*AGB $= \sqrt{AP} - \sqrt{AB} : \sqrt{AB} =$ [ob BP infinite parvum] BP : 2AB. Exprimitur autem *t*BN per BN : $\sqrt{NL}$ adeoque *t*AGBN per $\int(BN : \sqrt{NL})$ unde $\frac{BN}{\sqrt{NL}} : \int \frac{BN}{\sqrt{NL}} = (BN : \sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}) = BP : 2AB$, permutando BN : $BP = \frac{1}{2} \sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}} : AB$. Producto itaque latere NB ad R, id eſt ducta ad curvam AGB, tangente BA, illaque ſumta æquali $\frac{1}{2} \sqrt{NL} \int (BN : \sqrt{NL})$, jungatur AR: erit triangulum BAR ſimile parvo triangulo NBP, vel EFD, & proinde AR parallela poſitione datæ CD. Ex inventa hac proprietate, ſeu ratione laterum

laterum trianguli BNP Problema facillime conſtruitur ſic: In omnibus punctis curvæ aſſumtæ conſtantis AGB, ducantur tangentes; & fiant ſingulæ æquales huic reſpective quantitati $\frac{1}{2}\sqrt{NL}\int(BN:\sqrt{NL})$ [quod utique ſemper per unam continuam quadraturam peragitur] tunc habebitur nova curva AOR; per A ducatur ipſi poſitione datæ CD parallela AR, ſecans Curvam AOR in puncto R, a quo ſi ducatur tangens RB ad datam curvam AGB, determinabitur punctum B, quod quæſito eſt analogum; ducta enim recta AB. & ſi opus producta, ſecabit poſitione datam CD in puncto breviſſimi appulſus D; per quod ſi deſcribatur AHD ſimilis ipſi AGB, erit hæc AHD illa ipſa quæ quæritur. *Q. E. F.* Vides quam brevem & ſimplicem conſtructionem repererim hujus difficillimi alias Problematis; vix puto aliam ſimpliciorem vel concinniorem adinveniri poſſe. 1697 Auguſt.

Id hic notabile exiſtimo, quod licet Synchronam non conſideraverim, hujus tamen tangens eadem opera inventa eſt, ſed conſtructione omnino inverſa; quia quæ antea data ſunt, jam ſunt quæſita, & viciſſim; datur enim punctum D, & quæritur recta DC tangens Synchronæ tranſeuntis per D; quod ſic retrogrado ordine efficio. Duco per D rectam ADB ſecantem curvam aſſumtam AGB, in puncto B; ex quo ducta tangens BR occurret curvæ AOR in puncto R, quod ſi jungatur cum A, recta RA huic ducenda eſt parallela DC, quæ erit tangens Synchronæ quæſita.

Jam ſpero Te mihi aſſenſurum, quod ſummo jure dixerim, illum qui ſolverit Problema breviſſimi appulſus in Cycloïdibus, non ideo etiam ſtatim id ſolviſſe in aliis curvis ſimilibus; quia in Cycloïdibus ſolutio facile habetur, ſed indirecte, ex fundamento optico, nempe ex normalitate undæ cum radiis, ſeu Synchronæ cum Brachyſtochronis; id quod in aliis non obtinet. In Circulis, ex conſtructione mea univerſali res adeo facilis eſt, ut quadratura continua reducatur ad rectificationem curvæ alicujus. Scis enim, quod ſi radius ſit a, & NL, x; erit $BN:\sqrt{NL} = adx:\sqrt{(aax - x^3)}$, cujus ſummatio dependet a rectificatione curvæ Lemniſcatæ, per quam conſtruximus olim Tuam Iſochronam paracentricam. Et ſic,

 quod

Digitized by Google

1696 quod notabile eſt, duo hæc Problemata Iſochronæ paracentricæ & Auguſt. breviſſimi appulſus in Circulis, licet utrumque tranſcendens, inter ſe tamen habent connexionem algebraïcam; id eſt uno conſtructo, alterum algebraïce conſtruitur.

Cæterum artificium meum reducendi diverſas quadraturas ad unam continuam, agnoſco hic limitatum eſſe, & deſiderare ut curvæ ordinatim poſitione datæ ſint ſimiles & ſimiliter poſitæ; in aliis autem occaſionibus quamplurimis eo commode utor, licet curvæ ordinatim datæ non ſint ſimiles; ut in exemplo Ellipſium ſuper eodem axe deſcriptarum, cujus in præcedentibus meis mentionem injeci, ſed, quod miror, in reſponſione non attingis. Imo, ope hujus artificii, ſolvo infinita alia hujuſmodi Problemata, ubi nunquam curvæ ſimiles requiruntur; horum aliquot curioſe perſcripſi nuper Domino VARIGNONIO, quæ proponat ſuis Geometris. * Unde colligere poteris hoc artificium latius patere, nec adeo limitatum eſſe, quam ſtatim Tibi viſum eſt.

Et ego ſemper cenſui perfectiſſimam tranſcendentium expreſſionem eſſe per exponentiales: ſed mihi videtur fruſtra illam quæri in iis quæ non dependent a quadratura Hyperbolæ; unde imaginari non poſſum quomodo etiam exponentialiter exhiberi poſſe velis, quæ ſupponunt quadraturam Circuli. Optarem unicum exemplum. Certiſſimum puto omnem quantitatem exponentialem; quam voco percurrentem, per Logarithmicam conſtrui poſſe; ſed forte aliud genus exponentialium habes, cujus participem me reddas, rogo.

Cedo manus; Problema radii non eſt plus-quam determinatum, prout intelligis medium variari juxta duas dimenſiones: ſed, ſi placet, attende quod longe difficilius ſit determinare leges harum variationum, ut radii in datas lineas tranſeant, quam earumdem linearum invenire curvas normaliter ſecantes; unde gratis hoc ex illo quæreres. Præterea obſervo quod ſuperficies, verbi gratia verticalis, repræſentans medium varians ſecundum ambas dimenſiones, id eſt ſecundum rectam verticalem & horizontalem, conſiderari tamen

* Videatur *Journal des Sçavans* 1697. 33. Journal du 26. Aouſt. vel Opp. Tom. I. N°. XXXIX. pag. 204.

men poſſit tanquam varians ſecundum unicam tantum dimenſionem 1697
ſi vis, verticalem. Si enim (*Fig.* 73.) varies medium quocunque modo ſecundum A B C D E F; ita etiam, quovis alio modo, ſecundum A L M N O P A; manifeſtum jam eſt, etiamſi omnia puncta in horizontali F F ſint diverſæ denſitatis; dari tamen aliquod punctum G, in proxima linea E E, quod ſit ejuſdem denſitatis cum F & aliud H in proxima D D, item I in C C; K in B B, P in A A, &c. omnia æque denſa ac F; quocunque enim modo medium ſuper ſuperficiem A F F A, variari concipiatur, hæc tamen ſucceſſio punctorum æque denſorum perpetuo locum habet; quod, ni fallor, clarum eſt ex ipſiſſima Tua continuitatis Lege: datur ergo integra linea F G H I K P, ſecundum quam medium æqualiter eſt denſum: Jam ſi eodem modo concipias reliquas lineas E O; D N, C M, B L &c. tranſire per puncta ejuſdem reſpective denſitatis gradus; habebis medium, cujus variatio, quæ licet duarum ſit dimenſionum, jam unius tantum dimenſionis eſt. Hinc concludo a Te non ſat bene dictum eſſe, *ſi varies medium uno tantum modo, tunc fateor Problema fore plus-quam determinatum (nec refert*, B B *verbi gratia, recta ſit, an curva)* refert enim maxime recta ſit curva. Vidiſti enim, ſi curva admittenda eſſet, omne medium quocunque modo varietur, uno tantum modo variari intelligendum eſſe; quod itaque palmarium eſt in determinatione medii, ut radios tranſmitat per lineas ordinatim poſitione datas; perſpexi rem eo recidere, ut determinentur lineæ F G H I K P, E O, N N, &c. quod autem, ut ſupra monui, longe difficilius eſt quam inventio curvarum ad datas normalium. Sed hæc, pro perſpicacitate Tua, me multo melius penetrabis; velim per otium cogites, offert ſe ſe mihi difficultas inſuperabilis, in eo quod infinitæ lineæ curvæ ſunt determinandæ, forſan omnes diverſæ naturæ.

Aug.

TAB. XIII.

Nuſpiam quidem diſerte dixiſti rem æque eſſe facilem in appulſu ad rectam & ad curvam; id tamen ex verbis Tuis ſequi credebam, cum dicis, *Eadem methodus videtur etiam ſervire, ſi celerrimus appulſus quæratur, non ad rectam, ſed ad curvam poſitione datam.* Si duo diverſa per eamdem methodum ſolvantur, illa duo mihi ſunt æque facilia.

Video

Digitized by Google

1697. Aug. Video veriſſimum eſſe, legem minimi vel maximi & in particula curvæ minima locum habere; ſed ſane non poſſum applicationem ad Iſoperimetra conſtituere; neque etiam ad Brachyſtochronam datæ longitudinis. Verum non minus eſt rem poſſe (*Fig. 69.*) TAB. XIII. conſiderari in Ellipſi ordinaria & finita P Q R [hoc enim jamdiu & ego concipiebam] & determinari in ea punctum M, ut ex focis ductæ L M, M N, percurrantur citiſſime ex data altitudine. Demus porro hæc deinde poſſe applicari ad infinite parva, ita ut ratio L M ad M N dari poſſit: Nondum tamen video, nec videbo, donec mihi oſtenderis, quomodo poſtea iterum regreſſus detur a cognitione ſpeciei trianguli infinite parvi L M N, ad cognitionem ordinarii, curvæ ſcilicet quæſitæ, vel ſaltem ad æquationem differentio-differentialem. Quomodo, quæſo, eo pervenire poſſes, cum in æquatione litera reperiri neceſſe ſit, quæ determinet longitudinem curvæ, [alias indifferens eſſet pro omnibus Brachyſtochronis] illa littera vero, vel quidquid ſit quod determinet longitudinem curvæ, nequidem ingrediatur in conſiderationem, quærendo ſpeciem trianguli L M N. Dixi perpetuo inveniri poſſe ſpeciem trianguli L M N, ita ut deſcenſus per L M N ſit citiſſimus; ſed fateor me id nondum quæſiviſſe; quia a me impetrare non poſſum, ut abſolvam calculum prolixiſſimum qui requiritur. Interim ut obſtacula omnia removeam, ponamus calculum nobis oſtendiſſe in Ellipſi ordinaria & finita punctum M ita ſe habere, ut triangulum L M N habeat unum latus, L M duplum alterius M N, atque adeo idem etiam obtinere in Ellipticula infinite parva. Quo pacto mihi jam quæres curvam datæ longitudinis, ex eo quod ejus particulæ minimæ L M N faciant ubique triangulum cujus unum latus, L M, duplum ſit alterius M N? Si triangulum L M N poſuiſſem iſoſceles, prævideo quod mihi reſponſurus eſſes curvam quæſitam eſſe circulum, quamvis id nullo calculo invenire poſſes: ideoque ut ſuperfluam diſputationem evitem, pono unum latus duplum alterius; vel ſi mavis triplum, quadruplumve, modo non ſit iſoſceles.

P. Malebranchius utique non egit ut decet, quod Te inconſulto libellum ſuum in lucem protruſerit; diſſuaſiſſem id ego ipſi,

ipſi, ſi tum temporis cogitaſſem quod jam cogito, aut ſaltem ſi de privato inter vos commercio, quod Malebranchius apud me ex parte diſſimulaverat, conſtitiſſet magis. Quid in iſto Libello contra continuitatis Legem contineatur, jam non memini, ex quo enim *Galliam* deſerui, Libellum amplius haud vidi. 1697 Aug.

Corporum indivulſorum gradus Tuos admittam; mihi tamen videtur partes eumdem ſervare poſſe ſitum inter ſe, abſque ut ſtatuatur corpus perfecte rigidum [loquor de corpuſculis exiguis, ex quibus majora componuntur]: ſufficit utique motum conſpirantem partium alicujus corpuſculi tantum eſſe, ut ab ambientibus diſturbari non poſſit; quo caſu primus indivulſi gradus habetur, ſine perfecta rigiditate, ſeu duritie. Video clariſſime perfecte dura non dari poſſe, eaque proin abſolute rejicio, ſed vacuola interſperſa Democriti & Gassendi eatenus tantum rejicio, quod jam videam iis non opus eſſe ad explicandos naturæ effectus; contra quam olim credebam, motum ſcilicet nullum fore in Univerſo, ſi omnia eſſent plena, vulgari opinione nixus, duritiem dependere ab immediato contactu & preſſione materiæ ambientis: quod autem actu iſta vacuola non dentur, credo non tam facile demonſtrari poſſe, ab illis præſertim qui corporis eſſentiam non in nuda extenſione ſtatuunt. Et ſane multis ex locis haud obſcure colligo etiam Hugenium vacui fautorem fuiſſe. Cæterum *Democriticorum* & *Gaſſendiſtarum* atomos perfecte duras ſtatuentium, illiſque vacuum interjicientium opinio non tam abſona mihi videtur, quam Hartsoekeri, duo extrema inter ſe conjungentis, nempe perfecte durum & perfecte fluidum; quo abſurdius nihil excogitari potuit; nihil enim magis continuitatis Legi adverſatur, quam ſaltus ille ab uno extremo ad alterum.

Parum ſoliditatis Hartsoekerus oſtendit in ſcriptis ſuis, multoque minus alter ille Profeſſor Matheſeos Pariſinus La Montre.......... Quid obſecro boni ab homine expectandum, qui in notiones communes peccat, ut factum fuit ab iſto La Montre, qui 47*am* propoſitionem Euclidis demonſtrare volens per Axiomata, * craſſum adeo & palpabilem commiſit paralogiſmum

* Journal des Savans 1691. 24. Journal du 2. Juillet.

1697 Aug. mum ut Mathematicorum nemo eum refutare dignaretur; ſed oportebat, ... ut quædam de ſequiori ſexu eum caſtigaret; id quod revera fecit Domini *Marchionis* Hospitalii Uxor, ut forte vidiſti in *Diario Pariſienſi.* * Hiccine Profeſſor eſt, qui alios Matheſin docere debet? .... Quid id ad nos; dices, ignoſce; verum eſt, ejus errores nobis parum imponent; interim quia incidenter de iſto homine cogito, non poſſum non ſtomachari, quod tam male conſultum ſit illis qui ſcientiam ab eo haurire volunt. Vale.

Groningæ die 14. Aug. 1697.

Amplitudini Tuæ

Devotiſſimus

J. Bernoulli.

Reſponſio ad Epiſtolam LIX. P. S. Præterito die Lunæ haſce Litteras jam ſcriptas habui poſtridie dimiſſurus, cum eodem die acciperem noviſſimas Tuas 3. Aug. datas, quæ fecerunt ut dimiſſionem in hunc diem diſtulerim; quo interea tuas diligenter perlegere, & quod forte notaturus eſſem huc adjicere poſſem. Ut dicam quod res eſt, incredibili gaudio perfuſus ſum cum viderem eumdem genium Tibi totum myſterium pandiſſe; ſed indignor quod Te altius admiſerit quam me. Utique rem probe penetraſti, annotando totius negotii cardinem in eo conſiſtere, ut inveniatur ratio laterum trianguli characteriſtici 1 C 1 F 1 (C) in Tua figura (*Fig.* 71.); colligere poteris ex ſolutione mea ſupra allata Problematis celerrimi appulſus, ubi pariter rationem aſſigno laterum trianguli, PBN vel DFE, methodum meam eodem artificio niti. Sed fateor mihi unicum defuiſſe, quin perfecerim mehodum; quod ſcilicet mihi non venit in mentem differentiatio parametrorum, ſeu quantitatum in eadem curva invariabilium. De hujuſmodi differentiatione, licet jam olim etiam inter nos actum fuerit; nunc tamen, ingenue fateor, non cogitavi.

TAB. XIII.

* Ibid. 1691. 27. Journal du 23. Juillet.

vi; quam vero ingenioſe, quam acute illum huic negotio accommodaveris ſatis mirari nequeo: profecto nihil elegantius eſt, neque excogitari poteſt, quam modus differentiandi curvam per ſummam differentiuncularum numero infinitarum. Quin crebrius conſcendis currum, ſi tunc Tibi vena Mathematica aperitur. Imo vero defectus haud mediocris Calculi differentialis, ſublatus eſt. Hinc quid cenſes? An non poſſent depromi Problemata, qualia jam dedi in Ellipſibus, quibus....... exercere poſſemus Geometras, in interiori Geometria licet maxime verſatos. Viderent ſane omnes ſuos conatus irritos, quamdiu in noſtrum artificium non penetrarent, ſuamque infirmitatem tanto magis mirarentur, quod hujuſmodi Problemata videantur facilia & ex directa tantum methodo tangentium deſumta. Haud dubie quadraturæ illæ $a\int(dx : x\sqrt{(aa+xx)})$ & $\int(dx : x)$ quas in Logarithmicis pro ratione linearum $B\theta$, BC inveniſti, amplius poſſunt reduci. Ambæ enim dependent a quadratura Hyperbolæ, & per conſequens per ipſiſſimas Logarithmicas conſtrui poſſunt. Potuiſſes explicare methodum brevius & univerſalius, per figuram abſtractam, id eſt non ad certum exemplum Logarithmicorum adaptatam. Spero non ingratum fore, ſi hic methodum generaliſſimam expoſuero. Sint ergo [vide Fig. tuam 71.] curvæ ordinatim poſitione datæ, quacunque lege cognita progenitæ VC, V(C)V((C)) quarum axis communis VB, & parametri variabiles a; (a), $((a))$. Sint jam portiones curvarum VC, V(C), V((C)), quas Tu æquales poſuiſti, data lege creſcentes vel decreſcentes, id eſt, ſit VC $= \alpha$, V(C) $= (\alpha)$, V((C)) $= ((\alpha))$ per α, (α), $((\alpha))$ &c. intelligo quantitates datas per a, (a), $((a))$, &c. Quæritur jam tangens curvæ C, (C) ((C)) tranſeuntis per extremitates illarum portionum; quod ſic facio. Quoniam VC, ſeu α, datur per a, ejus differentialis dabitur per da. Sit itaque VC — V(C) ſeu $d\alpha = \alpha' da$ (per α', α'', α''', &c. intelligo quantitates diverſimode datas per a.) Sit jam VB $= x$: ergo particula curvæ 1C2C dabitur per dx, affecta quantitate compoſita ex x & a [hujuſmodi quantitates datas per x & a, quæcunque hic occurrere poſſunt, vocabo, a', a'', a''', &c.] Sit itaque 1C2C $= a dx$: jam 1697 Aug.

1697. Aug. jam ſi differentietur $1C2C$, ſecundum a, manente x: habebitur $1C2C - 1F2F$ ſeu $d(adx) = \alpha' dx da$, hoc ſi iterum ſummetur . ſed ſecundum x, manente a, erit $VC - VF = da\int \alpha' dx =$ [quia $\int \alpha' dx$ datur per a & x] $\alpha'' da$; quoniam vero ſupra inventum eſt $\alpha' da = VC - V(C) = VC - VF - 1F(C) = \alpha'' da - 1F(C)$ habebitur $F(C) = \alpha'' da - \alpha' da$: Tandem, quia BC datur per x & a, ſi ſecundum a differentietur, manente x, proveniet FC data per da; Eſto ergo $FC = \alpha''' da$. Unde ſi ducatur $\beta\theta$ parallela ipſi F(C), id eſt tangenti curvæ datæ VF & ſi fiat $C\beta : \beta\theta = FC : F(C) = \alpha'' da - \alpha' da : \alpha''' da = \alpha'' - \alpha' : \alpha'''$, tanget ducta $C\theta$ curvam C(C) ((C)) in puncto C. Si nunc regula generalis inventa ad certum exemplum eſſet applicanda, diſpiciendum tantum eſſet, quid ſit α'', α' & α''': primum enim & ultimum ſemper dabuntur per a & x promiſcue, medium vero per a tantum dari per a & x, vel per a, comprehendo etiam, quando tranſcendenter, vel ut Tu vocas, quadratorie dantur; hoc enim proceſſum Regulæ generalis non impedit.

Quod ſi hanc methodum ad Problema breviſſimi appulſus applicare velimus, reperiemus quidem facile tangentes Synchronarum, licet ordinatim poſitione datæ curvæ non ſint ſimiles, ut in ſuperiore mea ſolutione ſuppoſui: ſed fateberis, rem nondum confectam eſſe. Etenim per hanc methodum quæritur tantum poſitio tangentis ex dato puncto contactus in data Synchrona; interim in celerrimo appulſu res ſecus ſe habet, quia ex data poſitione tangente, quæritur punctum contactus. Supereſt itaque, quo exerceas ingenium, ut tam nobile inventum omnibus numeris completum reddas. Mihi videtur id præſtari poſſe per ſectionem duarum aliarum curvarum, quæ ſemper conſtrui poſſunt.

Sed hiſce jam miſſis, pervenio ad aliud egregium inventum pariter generaliſſimum, in quod harum occaſione incidi, & quod defectum tollit maximum methodi Tangentium inverſæ, ſicuti Tuo ſublatus eſt aliquis methodi Tangentium directæ. Conſiſtit illud in ſolutione hujus Problematis: *Conſtruere curvam datas ordinatim poſitione curvas, ſive ſimiles, ſive non ſimiles in dato angulo ſive*

in

invariabili ſive data lege variabili ſecantem. Suppoſita ſimilitudine curvarum ordinatim poſitione datarum, Problema jamdudum ſolutum habui: nunc vero quomodo in diſſimilibus, & generaliter, id ſolverim paucis explicare haud ingratum Tibi fore puto: Sint (*Fig.* 74.) curvæ ordinatim poſitione datæ AP, AE, AC, &c. ſecandæ a curva quæſita PEC, in angulo dato, quem hic exempli loco ponamus ubique rectum, ut videas quam facile ſolutu ſit, quod operoſe ex Opticis deducere volebas. Ad AH axem communem intelligatur applicari HG parameter curvæ AE, cujus interſectio cum GH producta, determinet punctum E in curva quæſita. Si hac ratione ubique parametri applicari concipiantur, fiet curva AG, quam ſi determinaverimus, eadem opera etiam PEC erit determinata. Eſto itaque AH, x; HG, parameter variabilis a, HE vel HB [data per x & a] a; quæ ſi differentietur ſecundum a, manente x, habebitur BE; ſit itaque BE $= a' da$: differentiando vero BH ſeu a, ſecundum x, manente a, proveniet CI, ſeu BD, ſit itaque BD $= a'' dx$, & proinde DE $= a' da - a'' dx$; eſt autem DC $= dx$: Ergo, quia ex conditione problematis angulus BCE eſt rectus, erit DCq = Rect. BDE, id eſt $dx^2 = a' a'' da dx - a''^2 dx^2$, ſeu $dx^2 + a''^2 dx^2 = a' a'' da dx$. Hæc igitur æquatio differentialis determinat curvam AG, qua conſtructa conſtruitur etiam quæſita FEC. Nam data GH parametro, dabitur curva AE, cujus illa eſt parameter; adeoque producta GH, occurret curvæ AE in puncto E quod erit ad curvam quæſitam FEC: Hujuſmodi conſtructio per parametrorum variabilium applicationem, non inelegans mihi videtur, non dubito quin alibi etiam poſſet inſervire, Tuo, præſertim accedente ingenio. Vale.

1697 Aug.

TAB. XIII.

Notare hic convenit, quod ſi curvæ ordinatim poſitione datæ ſint Algebraïcæ; erit curva parametrorum AG tranſcendens primi generis. Si illæ ſint tranſcendentes primi generis, erit hæc tranſcendens ſecundi, & ita conſequenter. Patitur quidem hoc exceptionem in nonnullis exemplis particularibus, quando, ſcilicet, quantitas a' evadit Algebraïca; id quod per accidens fieri poteſt, etiamſi AP, AE, AC ſint tranſcendentes. Iterum vale.

EPISTOLA LXII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Trajectoriis. De curva citiſſimi appulſus. De virium æſtimatione, & legibus Motus.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1697 Nov. CUm multa mihi eſſent dicenda, litteris Tuis pro merito reſpondere volenti; & tempore excluſus, ob negotia de die in diem, proferrem ſcribendi officium; tandem malui neceſſariis defungi, quam prorſus ſilere; ſperans interim Tuum ſilentium diuturnum ex cauſa ingrata non oriri.

Gaudeo Tibi tantopere methodum meam novam, quo pomeria calculi noſtri proferuntur, placuiſſe, ſane hac ratione non tantum ad æquationem differentialem primi gradus reducitur inventio curvæ ordinatim poſitione datas perpendiculariter ſecantis, aut eis angulo vel conſtanter, vel ordinatim dato occurentis; ſed etiamſi angulus non ſit ordinatim datus, modo quæ ipſum determinant, cum aliis functionibus conſtituant aliquid ordinatim datum, idem obtineri poteſt, multaque adhuc ampliora inſunt.

Solutio Problematis breviſſimi appulſus non eſt quod Te jam amplius moretur, licet curvæ ordinatim poſitione datæ non ſint ſimiles & ſimiliter poſitæ. Quæritur nimirum per quam ex his grave breviſſime appellat ad rectam poſitione datam. Ad quamvis Synchronarum ducatur recta ipſam tangens, ſed datæ rectæ parallela. Habebitur curva quæ tranſibit per omnia puncta contactuum, cujus cum recta data interſectio dabit quæſitum appulſus punctum, unde cætera pendent.

Dominus *Marchio* HOSPITALIUS mihi ſolutionem Tuorum quorumdam Problematum in *Diario Gallico* propoſitorum miſit, demto

demto primo neſcio quo, ut eas in *Actis Lipſienſibus* edi curem, quod & fiet *, tunc cum Tua edetur ſolutio. Tibi ipſi ſe ſe de ea re ſcripturum eſſe indicavit, nec dubito factum. Mihi hæc Problemata Tua non innotuerant. Solutiones *Hoſpitalianæ* ad caſus nova Calculi promotione ſolvendos non pertingunt. Vidi quæ *Hiſtoriæ operum Eruditorum* † inſeri curaſti, ubi æmulos eleganter defricas. 1697 Novem.

Durat adhuc, etſi per longa intervalla ſubinde dilata, diſputatio inter Dnum. Papinum & me. Valde innititur ei, quod duo corpora reciprocis ad corporum rationem celeritatibus concurrentia ſe mutuo ſiſtunt. Hinc putat vim eorum eſſe æqualem; non conſiderans æqualia ab ipſis abſolute non poſſe effici, etſi ſe mutuo poſſunt impedire.

Inter alia objecerat: Si fingamus corpora A & B eſſe perfecte dura & inflexibilia, A, maſſa 1, celeritate 4, & B, maſſa 4, celeritate 1, & concurrendo elaſtrum tendere, atque ita eo tenſo ſimul ad quietem redigi; tum D, maſſa 8, fingi ſubſtitutum in locum B, idque ipſum D recipere totam vim quam dederat elaſtro corpus B, ſeu quam corpus B ab eo reciperet, & tamen celeritatem, quam recipit D, eſſe celeritati ejus quam recipit A reciproce proportionalem: hinc infert, nunc plus, nunc minus virium in mundo eſſe, diverſo tempore, contra ſententiam meam. Reſpondi verum eſſe A & D hic recipere ab Elaſtro ſe reſtituente velocitates molibus reciproce proportionales; ſed verum non eſſe, quod D tantum recipiat virium, quantum recepiſſet B; itaque dixi rem perinde fore ac ſi A 1, & D 8, concurriſſent velocitatibus A, ut $\frac{4}{3}\sqrt{10}$, & D ut $\frac{1}{6}\sqrt{10}$; ita enim eiſdem velocitatibus ab Elaſtro reflexam iri & conſervatum iri, tum reciprocam celeritatem ad corpora rationem, tum etiam virium ſummam.

Nunc novum caſum objicit, nempe ut concurrant A, maſſa 10, velocitate 4; B, maſſa 1, velocitate 10, & ubi B in concurſu

* Factum eſt A°. 1698. Januar. pag. 51.

† 1697. Juin. p. 452. & Opp, Tom. I. N°. XXXVIII. p. 194.

Digitized by Google

1697 Novem. curſu ad quietem redactum eſt, ſubſtituit ei D duplum, ſeu cujus maſſa 2. Et putat nunc perinde omnia eventura eſſe, ac ſi concurriſſent A, ut prius maſſa 10, velocitate 4, ſed D, maſſa 2, velocitate 5. Quo facto, facile colligit eventum proditurum, quo minorem in corporum a ſe invicem diſceſſu virium ſummam habituri eſſemus, quam ante. Supponit autem, ut ante corpora A, B, D eſſe perfecte rigida; elaſtrum autem non in ipſis eſſe, ſed in corpore intercepto, quod fingendum eſt, ſtatim iterum tolli, ubi libertatem recuperavit, ne forte corporis progreſſui obſtet. Etſi conſtet has fictiones revera locum non habere.

Reſpondi, negando D, maſſa 2, velocitate 5, abſolute idem efficere quod B, maſſa 1, velocitate 5, aut unum pro alio ſubſtitui poſſe; cum caſus ipſius B ſit duplo fortior caſu ipſius D, ſeu duplo altius pondus ad eamdem altitudinem elevare poſſit. Interim operæ pretium eſſet definire paulo diſtinctius, quantum celeritatis retineat A, quando B reductum eſt ad quietem, & quantum tunc virium ſit translatum in elaſtrum; ut ſcilicet, melius determinari queat quid futurum ſit, ſi eo momento, quo B reducitur ad quietem, ſubſtitui fingatur ejus duplum D. Hoc igitur per otium a Te conſiderari non inutile erit; res certe in poteſtate eſt.

HUETIUS, aliique amici in Gallia, deſiderant meas *ad* CARTESIUM *Animadverſiunculas*. Erunt mox mittendi occaſiones, itaque rogo, ut ad Dnum. MEJERUM *Bremam* cures. Interim Vale.

Dabam *Hanoveræ* 2. Novembris 1697.

Deditiſſimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

EPIS-

Digitized by Google

EPISTOLA LXIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De methodo differentiandi de curva in curvam. De ſolutione Hoſpitaliana *Problematum ſuorum. De viribus æſtimandis.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Silentium tuum diuturnum me anxium reddebat de valetudine tua; ſed bene eſt quod valeas, & gaudeo: ſubverebar initio ne forte poſtremæ meæ intercidiſſent. . . . . 1697 Nov.

Etiam ego lætor Tibi probari modum meum, ex Methodo Tua nova differentiandi curvas deductum, quo curvam invenio curvas ordinatim poſitione datas ſecantem, vel perpendiculariter, vel in angulo conſtanti, vel denique in angulo utcunque variante ſecundum datam legem; nec per hæc aliud intellexi, quam ut angulus, vel per ſe ſit determinatus, vel per certas quaſdam, uti vocas, functiones quæ conſtituant aliquid ordinatim datum. Non nego alia plura ineſſe, quæ Te nemo melius rimari poterit; optarem præprimis, ut, quemadmodum in præcedentibus Tuis ante abitum ad Nundinas *Brunſwicenſes* ſcriptis innuis, inde eliceres novam ſummandi rationem; raro occurrunt hujuſmodi ſummationes, qualis, exempli gratia, eſt hæc $\int(da\int(xdx:\sqrt{2ax-x^2}))$ quæ per quadraturam ſegmenti circularis conſtruitur: ſed id alicujus momenti eſſet, ſi exinde pateret modus ſeparandi indeterminatas in æquatione differentiali; hoc enim unicum eſt, quod ſe methodis noſtris adhuc obſtinate opponit: Aſſeris quidem hujuſmodi æquationem conſtrui poſſe, ſi non per quadraturam continuam, ſaltem per iſtas diſgregatas, ſeu ordinatim diverſas; fateor autem me id nondum potuiſſe aſſequi, licet id tentaverim in leviſſimo hoc exemplo $xxdx+yydx=aady$, cujus conſtructionem vellem ut mihi dares,

ſive

1697 Nov. ſive id fiat per quadraturam continuam, ſive per diſgregatas; nec profecto majorem capies fructum ex novo Tuo invento; præſertim ſi hanc ſeparandi difficultatem hactenus inſuperabilem non ſolum in hac, ſed generaliter in omni alia æquatione tollere poſſes.

Solutionem generalem Problematis breviſſimi appulſus non abſimili modo conceperam; reſtat tamen aliquid quod deſideratur; ſcilicet, quod ad Synchronam tangens duci poſſe aſſumatur poſitione datæ parallela; id quod haud adeo facile judico. Sed habeo etiam alias ſolutiones, quæ id non ſupponunt. Propoſueram Problemata, de quibus Dominus Hospitalius ad Te ſcripſit, ante novam Calculi promotionem; alias non propoſuiſſem: non ideo tamen ſtatim alii in artificium noſtrum penetrabunt.

Verum dicis, ſolutiones Hospitalii ad caſus curvarum diſſimilium non pertingunt; quod idem tum objeciſſem; me ſcilicet per *curvas ejuſdem ſpeciei* non tantum intelligere *curvas ſimiles*, ſed quaſcunque alias ordinatim datas; exempli gratia, omnes Ellipſes ſuper eodem axe deſcriptas, atque adeo ipſum Problemati nondum plenarie ſatisfeciſſe. Reſpondit nuper ſe agnoſcere aliquid amplius requiri pro curvis diſſimilibus, *Je vous avoue*, inquit, *que lorſque les courbes ne ſeront pas ſemblables, il faut quelque choſe de plus; en tout cas je ne prétens avoir reſolu vos derniers Problémes, que dans ce ſens, & j'attends de l'apprendre de vous, lorſque les courbes ſeront diſſemblables.* Si urget Dominus Hospitalius ut edas ſolutiones ſuas, poteris edere meis non exſpectatis; operæ vero pretium non eſſet ſolutiones imperfectas publicare, tantum ſcilicet pro curvis ſimilibus; cum enim perfectæ ſolutiones pro omnibus curvis ordinatim datis, ipſo Tuo judicio, adhuc diſſimulandæ ſint, ne aliis illico artificium detegamus, præſtat omnino ſilere & nihil dare, quam pauca dare. Quandoquidem nondum videris illa Problemata, mitto hic foliolum ex *Diario Gallico* *. Tua forte applicatione dignum cenſebis primum, ubi quæro modum ducendæ in ſuperficie convexa lineæ breviſſimæ

a

* 1697. 33e. Journal du 26. Aouſt. vel Opp. Tom. I. N°. XXXIX. pag. 204.

Digitized by Google

ā puncto ad punctum. HOSPITALIUS de eo deſperavit; Ego vero illud reduxi ad æquationem differentialem, quæ, ſi ſeparentur indeterminatæ, conſtrui poterit. 1697 Nov.

Quæ Dominus PAPINUS de novo movet contra æſtimationem virium, ſpecioſa quidem ſunt; ſed ſi penitius inſpiciantur, fundamentum nullum habent. Aptiſſime ipſi reſpondiſti, quod quando duo corpora velocitatibus reciprocis ad maſſarum rationem concurrentia ſe ſe ſiſtunt, non ideo ſequatur eorum vim eſſe æqualem; nam vis vim non deſtruit, ſeu vis vi non eſt contraria; eodem modo quo quadratum lineæ affirmativæ, & quadratum lineæ negativæ, non dicuntur contrarium efficere, utpote utrumque affirmativum. Dicendum itaque duo illa Corpora ſe ſe ſiſtere, quia habent æqualem quantitatem directionis ſibi mutuo contrariam; quæ, ſi reſpective conſideretur, nulla eſt: eſt enim directio reſpectiva progreſſio communis Centri gravitatis corporum, quod, cum non progrediatur ante concurſum, pariter non progredi poterit, poſt concurſum. Secus ſequeretur, aliquid quod quieſcit a ſe ipſo moveri poſſe; quod eſt abſurdum. Hinc, ut Centrum gravitatis quieſcat poſt concurſum, ut ante concurſum, oportet ut, vel & ipſa corpora in conflictu ſiſtantur, tenſo elaſtro interpoſito manente; vel, ſi elaſtrum ſe ſe reſtituat, ut priſtina celeritate repellantur. Hi enim duo ſoli caſus poſſibiles ſunt, quibus Centrum gravitatis in quiete conſervatur. Hanc puto genuinam cauſam eſſe ejus quod PAPINUS æqualitati virium adſcribit, ſicque paralogiſmum commiſit, non cauſæ pro cauſa. Ex hoc errore etiam reliqui ejus errores pullulant; ut in priori exemplo. Si A maſſa 1, velocitate 4, & B maſſa 4, celeritate 1 concurrant, & elaſtro tenſo, ipſis ad quietem redactis, ſubſtitui intelligatur D, maſſa 8, in locum B. Quis non ſtatim videret PAPINUM gratis hic ſupponere, Corpus D tantumdem virium ab elaſtro recipere, quantum ipſi dederat Corpus B, ſeu quantum jam B ab elaſtro iterum reciperet, ſi maneret? Ut autem inveniatur, quantum præciſe celeritatis Corpus D recipiat ab elaſtro, & quantum item celeritate repellatur corpus A; conſiderandum eſt, quod tota vis quam habebant ante concurſum corpus A & corpus B ſit, in concurſu, translata in elaſtrum interjectum;

 hoc

1697 Nov. hoc proinde elaſtrum ita tenſum, quod ope vinculi in tenſione iſta manere concipio, ſi e medio duorum illorum Corporum A & B eximi, & inter duo alia corpora quieſcentia C & D interponi intelligatur; evidens utique eſt, quod jam ſubito, ſoluto vnculo, totam ſuam vim transferat in Corpora C & D, quarum periconſequens aggregatum idem præciſe debet eſſe, quam aggregatum virium corporum A & B; res itaque eo recidit, ut diſtribuatur hoc aggregatum virium Corporum A & B in duas partes, quarum una, quæ C communicabitur ſe ſe habeat ad alterum ipſi D communicandum, reciproce ut D ad C; atque iſtæ vires dividantur per moles C & D, & demum ex quotientibus extrahantur radices quadratæ, quæ dabunt velocitates, quas Corpora C & D ab elaſtro recipient. Hinc in caſu particulari Papini, ubi corpora A & C ſunt æqualia, vel potius eadem, utrumque Maſſæ 1, B maſſæ 4, D maſſæ 8, & A celeritate 4, B celeritate 1; reperietur reflexum iri A & D velocitatibus, ut $\frac{4}{3}\sqrt{10}$, & $\frac{1}{6}\sqrt{10}$; prorſus ut Tu inveniſti.

In altera objectione quando concurrunt A, maſſæ 10, velocitate 4; B, maſſæ 1, velocitate 10, ubi in concurſu, reducto B ad quietem, ei ſubſtituit D duplum, ſeu cujus maſſæ 2, putans tunc perinde omnia eventura eſſe, ac ſi concurriſſent A, ut prius, maſſa 10, velocitate 4, ſed D, maſſa 2, velocitate 5; petit principium, ſupponitque quod probare nititur; ſcilicet D, maſſa 2, velocitate 5. idem efficere, ſeu tantumdem habere actionis, quantum B, maſſa 1, velocitate 10: id quod abſolute falſum eſt, & nil niſi vetus error. Interim cum a me deſideres, ut per otium me applicem ad definiendum quantum celeritatis retineat A, quando B reductum eſt ad quietem, & quantum tunc virium ſit translatum in elaſtrum; ut ſcilicet melius determinari queat, quid futurum ſit, ſi eo momento quo B reducitur ad quietem, ſubſtitui fingatur ejus duplum D: fateor id eſſe in poteſtate; requirit tamen plus meditationis quam præcedens, quæ quia jucunda admodum mihi viſa fuere, & digna quæ penitius inſpicerem, tanto fortius me compulere ad deſiderio Tuo ſatisfaciendum, & quidem poſt brevem medita-

ditationem generaliter omnia determinavi, poſitis tum corporibus, tum velocitatibus, in quacunque ratione. Dico itaque, in hoc Papini caſu, corpus A, eo momento quo B reducitur ad quietem, retinere celeritatem 3, vel in elaſtrum translatam eſſe integram vim ipſius B, & præterea ſeptem decimas ſextas partes vis ipſius A; quæ quidem facile patent; ſed, quod caput rei eſt, dico porro, quod ſi, eo momento quo B reducitur ad quietem, ſubſtituitur D, amittet A gradatim de ſua velocitate reſidua 3, D vero gradatim acquiret, & quidem decrementa illius & incrementa hujus erunt reciproce ut moles; ita ut tandem, quod contingit eo ipſo inſtanti quo elaſtrum eſt in maxima ſua tenſione, A & D habitura ſint æqualem, ſeu communem, velocitatem; quæ proinde erit $\frac{5}{2}$: tunc autem elaſtri vis, ſeu tenſio maxima, erit æqualis vi integræ ipſius A, & ſimul quartæ parti vis ipſius B, earum ſcilicet, quas ante concurſum habebant. Inventa itaque vi elaſtri, invenietur, per modum ſupra exhibitum, quantum celeritatis elaſtrum, a tenſione ſua ſe ſe reſtituendo, corporibus A & D imprimet; nimirum ipſi A dabit celeritatem $\sqrt{(37:12)}$ ipſi D vero $5\sqrt{(37:12)}$ in plagas contrarias. Hinc ſi illa a celeritate communi auferatur, hæc vero ad eamdem addatur, habebitur quæſitum. Dico itaque quod, poſt ſubſtitutionem illam factam, A ſeretur velocitate $5:2-\sqrt{(37:12)}$ D autem $5:2+5\sqrt{(37:12)}$ in plagam eamdem. Hoc ratiocinium egregie confirmatur, ſi analytice quæratur, ſupponendo quantitatem tum virium tum directionis poſt concurſum, & ſubſtitutionem debere manere eamdem quæ ante concurſum. Sic, ſi ponatur velocitas futura ipſius A, x; velocitas futura ipſius D, y: erit quantitas virium $10xx+2yy=260=$ quantitati virium ante concurſum; & quantitas directionis $10x+2y=30=$ quantitati directionis ante concurſum; ex his enim duabus æquationibus reperietur $x=5:2-\sqrt{(37:12)}$, & $y=5:2+5\sqrt{(37:12)}$ ut ante. 1697 Dec.

Cum hactenus nulla occaſio ſe ſe obtulerit mittendi *Bremam* Tuas in Cartesium obſervationes, miſi illas tandem per Curſorem ordinarium. Rogo ut Domino Menckenio transmittas has lit-

1697 Nov. teras . . . . adjunctas, una cum ſchediaſmate *Actis* inſerendo, * quod apertum reliqui, ut ſtatim legere poſſis, quid ad nupera TSCHIRNHAUSIANA reſpondeam. DE LA HIRE...... paralogizantem paulo acrius caſtigo, ſed qui noſtra ita contemnit, meliora non meretur: Diſcat inpoſterum abſtinere ab iis quæ non intelligit. . . . . Vale.

Amplitud. Tuæ

Devotiſſimus

J. BERNOULLI.

* *De Arcuum Parabolicorum comparatione Vide* Epiſt. ſequentes LXVIII. & LXIX.

EPISTOLA LXIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De integrationibus ad quadraturas revocandis. De Synchrona. De Problemate Iſoperimetrico. De virium æſtimatione. De TSCHIRNHAUSII *errore circa arcuum Parabolicorum comparationem. De linea breviſſima in ſuperficie curva.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1697 Decemb. JUſto rigoroſius mecum ages, ſi nihil mihi Tuorum perſcribes, niſi cujus meæ Tibi occaſionem ſuppeditent; quæ vereor ne inpoſterum cogantur eſſe ſteriliores quam vellem. Inanes non fuiſſent Tuæ, ſi eorum participem me feciſſes, quæ interim a Te acta video. Idque, ut inpoſterum facias, rogo.

Pro differentialibus ad quadraturas revocandis habui ſane meditationes,

tiones, quarum executio nunc novo differentiali genere egregie juvatur. Sed mihi non licet quæ meditor mature exequi. Itaque cogor comperendinare. 1697 Decemb.

In tangente Synchronæ ducenda quæ ſit datæ rectæ parallela, difficultatem eſſe non puto. Idem eſt ſi pro recta data ſit curva, tunc ordinatim ſimiles ducendæ.

Putem ſufficere . . . . ut Domino *Fratri* Tuo in *Actis Eruditorum*, ſatisfacias ut in *Diario Gallico* * jam feciſti, nec opus eſſe ut omnia des, quæ interim es aſſecutus. Miſi in hanc rem Tua *Lipſiam*, † ſed neſcio an ipſi ex *Gallico* verſuri ſint Tua; fortaſſe feciſti ipſe, & ut exhiberi debeant perſcripſiſti in Tuis ad Dominum Menckenium litteris.

Ut Domino Papino melius ſatisfacerem, ipſe calculandi laborem, poſt litteras Tibi ſcriptas, in me ſumſeram, & quantum judico, eadem qua Tu methodo ſum uſus. Certe & mihi provenit: eamdem manere quantitatem progreſſus, ſeu vim directivam, præter vim abſolutam totalem. Mitto Tibi meæ ad ipſum Epiſtolæ duplicis præformationem; rogoque ut remittas, quo integrum habeam meum cum ipſo de hoc argumento commercium.

Vim directivam hic manere potuiſſem aſſumere, nam id hoc quoque caſu demonſtrari poteſt. Sed malui rem aliunde derivare, ex ipſa ſcilicet diſtincta conſideratione conflictus, quod a Te quoque recte factum video. Spero & numeros conſenſuros.

Miror Dominum Tschirnhausium, Virum alioquin ingenioſiſſimum, in rebus non difficilibus & in poteſtate exiſtentibus tam ſæpe labi. Id diſtractionibus tribuo, & feſtinationi non ſatis conſiderata proferendi. La Hirium uſque adeo *παραλογίζειν* in re clara magis adhuc miror.

Problema minimæ lineæ in ſuperficie curva a puncto dato ad datum ducendæ olim conſideraveram, ſed mihi non ſatisfeceram; cum vero proponeres mihi Brachyſtochronam, meditationem abſolvi; ſunt enim hæc Problemata ſic ſatis cognata. Sed ad praxin Methodi non acceſſi.

. . . .

Domi-

* 1697. 39e. Journal du 2e. Decemb. *Vide* Opp. Tom I. N°. XL. p. 206.
† *Vide* Act. Erud. 1693. Janu. pag 52.

Dominus *Ezechiel* SPANHEMIUS mihi *Berolino* ſcripſit, ſe ſe juſſu Electoris ſui ad Regem Galliæ proficiſci, & *Hanovera* tranſiturum. Ea occaſione *Animadverſiunculas ad* CARTESIUM HUETIO tranſmittam deſideranti. Itaque gratias ago quod eas Domino MEJERO *Bremam* miſiſti. Vale & mihi ſubinde quid agas ſignifica, & ſi videtur etiam communica.

Dabam *Hanoveræ* 17°. Decembris 1697.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA LXV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad penultimam.

De Virium æſtimatione. De legibus motus. Philoſophiam experimentalem docendi munus ſibi impoſitum monet.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1698 Januar. GRatias ago quod mea curaveris *Lipſiam*. . . . .
. . . .

Remitto ecce ſcripta Tua, ubi quid Domino PAPINO reſponderis, abunde perſpexi. Gaudeo nos concurriſſe, non ſolum in determinatione velocitatum, quibus A & D ſeparantur, ſed in eadem prorſus methodo, qua uterque uſi fuimus.

Calculi Tui examine facto, video etiam numeros conſentire, nam in figura Tua, ubi velocitas A ante concurſum, ſeu AP eſt 44, velocitas B ſeu BP $= 110$, facis P(G) $= 27\frac{1}{2}$ & retro

troſumis $(G)(A) = \frac{1}{6}\sqrt{13431}$; a puncto A verſus anteriora accipis $(A)(D)\sqrt{13431}$; erit per conſequens $P(A)$ ſeu velocitas poſt-futura $A = 27\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{13431}$, & $P(D)$ ſeu velocitas D erit $27\frac{1}{2} + \sqrt{13431}$. Ego vero poſitis AP, 4, & BP, 10 dixi eſſe $P(G) = 5:2 - \sqrt{(37:12)}$ & $P(D) = 5:2 + 5\sqrt{(37:12)}$ ſunt autem $44.4::110.10::27\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{13431}.\frac{5}{2} - \sqrt{(37:12)} = 27\frac{1}{2} + \sqrt{13431} : -\frac{5}{2} + 5\sqrt{(37:12)}$, omnia proportionalia; Ergo conſentimus. Quid ad reſponſionem Tuam repoſuerit Papinus, libenter viderem; dic ipſi quod nos uterque eadem reperimus, alter alterius neſciens cogitata; forſan agnoſcet tandem e noſtris eſſe partibus veritatem, niſi nos ambos præ ſe vidente coecutire arbitretur. Cum nuper, La Hirii errore deprehenſo, etiam reliqua *Tractatus mechanici* * ejus pervolverem, inveni Regulas pro communicatione motus, quas noſtris conſentire reperio; abſque tamen, ut Author veram æſtimationem virium, vel ſtatuat, vel præſupponat: deducit illas ex natura elaterii, ſeu, ut vocas, lege vis mortuæ, quæ celeritates imprimit in ſimplici reciproca ratione molium. Unde hoc lumen hauſerit La Hirius neſcio; a ſe habere non puto. Videtur ex ipſis illis Regulis tanquam jam ſuppoſitis, La Hirium alioſque qui cum eo faciunt [etiam Papinum, ſi La Hirii ratiocinium admitteret] convinci poſſe de vera quantitate actionis; quippe facile ex illis demonſtrabitur, eamdem perpetuo conſervari ſummam producti quadrati velocitatis in molem, non vero ſimplicis velocitatis in molem, ut haud dubie ipſe La Hirius putat, qui proinde proprio ſe jugulat gladio. Domino *Marchioni* Hospitalio, Tua, ut dixit, venia, communicavi Tuam methodum, pro ſolvendo ſecundo meo Problemate Programmatis ante annum impreſſi, quæ Newtonii ſimilis eſt. Hic abrumpere cogor, 1698 Januar.

 deficiente

* *Traité de Méchanique*, &c. Paris 1695. 8°. pag. 384. & ſeq.

Digitized by Google

deficiente ſcribendi copia, & Ego vereor ne meæ inpoſterum futuræ ſint interdum ſteriliores, quam vellem. Ordines noſtri novam mihi impoſuerunt docendi Provinciam, atque in eum finem certam decreverunt ſummam ad emenda inſtrumenta experimentalia, ut, exemplo VOLDERI *Lugdunenſis*, Studioſos noſtros etiam exemplis Mathematico-phyſicis exerceam. Hiſce vale, & cum novi anni auſpiciis nova fruere valetudine.

Amplitudinis Tuæ

Groningæ 8. Januar. 1698.

Obſequentiſſimus

J. BERNOULLI.

EPISTOLA LXVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De LA HIRIO *&* OZANAMMO. *De Philoſophia experimentali. De viribus corporum.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

. . . .

1698 Januar. LA HIRII Mechanica aliquando ut legere poſſim, operam dabo. Quæ de concurſibus corporum habere ais, recta ea ſuſpicor ex MARIOTTI ſcriptis habuiſſe, cujus ſchedæ in manus ejus venere. Ego autem cum MARIOTTO de his contuli jam *Pariſiis*, & licet ipſi ſententiam meam de vera virium æſtimatione non ſatis

ſatis expoſuiſſem, alia tamen ratione, per vim ſcilicet mortuam ab elaſtro exercitam, rem explicabam. 1698 Januar.

Interim ex ſolo principio vis mortuæ vix poterit definiri gradus tenſionis Elaſtri a corporum concurſu factus, aliaque multa.

Non laudo, quod Viri docti interdum non nominant eos a quibus profecere. Sic Dominus Ozanam auſus eſt meam Quadraturam arithmeticam in ſua *Geometria Practica*, Authore diſſimulato, proferre, & demonſtrationem pene verbotenus meam ſibi aſcribere. * Et Dominus La Hirius ipſe, quod non ſatis mirari poſſum, Epicycloïdum uſum ad figuras dentium ſibi tribuere videtur in peculiari de iis diſſertatione, † cum tamen certum ſit inventum eſſe Roemeri *Dani*; nam eram *Pariſiis*, eo tempore quo is invenit, remque non tantum ab ipſo Roemero, ſed & Hugenio intellexi; quo tempore nondum La Hirius in Academiam Scientiarum Regiam erat receptus, nec in hoc genere quicquam præſtitiſſe dicebatur.

Roemerum, qui in *Dania* agit Regi æſtimatus, miror ſibi ſua non vindicare.

Gaudeo præclarum conſilium cœpiſſe Ordines veſtros, ſuppeditandi ſumtus in experimenta, tantumque abeſt ut ea re putem litteras tuas futuras ſteriliores, ut contra tantum expectem abundantiores, niſi me ſcilicet ſolis abſtractis delectari putas.

Interea a Tua benevolentia id mihi ſpondeo, ut tum de Tuis meditatis, tum & de aliis, quæ Tecum communicantur nova, aliquam notitiam mihi non invideas; neque enim dubito a Domino *Marchione* Hospitalio vel Domino Varignonio, & aliis ſubinde aliqua ſcitu digna ad Te perſcribi, & magis etiam a Te ad illos. Gratum eſt quod Domino *Marchioni* communicaſti Methodum meam, pro locis datæ ad plura puncta proprietatis. Etſi enim *Newtoniana* non ſit abſimilis; tamen ex his quæ dicit Newtonus non æque ac ex meis origo inventi apparet.

Dominus Papinus, quod miratus ſum, non ſatis ad rem

Xx 2 reſpon-

* *Vid.* Epiſt. VIII. & IX. & ſeq.

† *Traité des Epicycloides & de leurs uſages dans les Méchaniques.* Paris.

1698 Januar. reſpondit; perſuaſus diſtinguendum eſſe inter hæc quæ fiunt apud nos, ob inſenſibilis materiæ actiones, & ea quæ fierent in concurſu corporum libero; ſimilibus præjudiciis & MALEBRANCHIUS laborat. Hortatus ſum ut dicat, quas Regulas liberis corporibus tribuat; ſignificabo ipſi conſenſum noſtrarum determinationum. Dum litteras meas a Te remiſſas inſpicio; nolo verum eſſe ut dixi, quod celeritates in corporum concurſu amiſſæ ſunt reciprocæ molibus; idem tamen non verum eſſe de celeritatibus recuperatis, cum corpora ſe reſtituunt, & rurſus a ſe incipiunt recedere; At verum eſſe quodammodo de recuperandis. Vale vigeque, & in hunc annum & in alios multos.

Dabam *Hanoveræ* 18. *Januar.* 1698.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA LXVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De LAHIRIO, *&* ROEMERO. *De* OZANAMMO *& Marchione* HOSPITALIO. *De* VARIGNONIO. *De viribus corporum.*

Vir Ampliſſime ac Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

. . . .

1698 Febr. GRatum eſt ſcire quod LA HIRIUS, quæ de Corporum concurſibus habet, ex MARIOTTI ſcriptis hauſerit; non modo Authorem diſſimulat, ſed eum bis vel ter citat, tanquam contrarium ſentientem.............. quis...... ſuſpicari auſit LA-HI-

HIRIUM a MARIOTTO didiciſſe, quem in ea re ab ipſo diſſenſiſſe dicit? Vitium ſane.......... in LA HIRIO non ſemel animadverti, virorum Doctorum nomina contemtim nimis.............. ſubticet; infra ſuam dignitatem cenſens quicquid ab aliis provenit, quando interim, vel maxime illorum inventa ſibi arrogare affectat. 1698 Febr.

Diſſertationem *De Epicycloïdibus* nondum vidi, ſed aliquid de ipſorum uſu ad figuras dentium, etiam in ipſo *Tractatu mechanico* * habet; inter alia conſtructionem alicujus rotæ hoc modo dentatæ, omni notabili frictione carentis, quam ſe ipſum executioni dediſſe ait prope *Lutetiam*; cujus tamen primam inventionem Domino DES-ARGUES tribuit. Unde vero figuram dentium ad procurandum motum æquabilem didicerit, altum eſt ſilentium. Credebam equidem primo non niſi conjecturando voluiſſe divinare figuram debere eſſe Cycloidalem, quia forſan hæc ipſi præ alia aptior viſa fuerit: etenim, ut modo dixi, Diſſertationem *de Epicycloïdibus* non vidi, neque in *Tractatu mechanico* demonſtrationem addit: poſtea vero, ut rei certior fierem, figuram debitam ex me ipſo quæſivi, atque ex calculo comperi, Cycloïdem communem ſatisfacere, ſed illam non ſolam, namque [quod LA HIRIUS non habet] & protracta, & contracta, idem præſtant. Mirabar itaque quis genius hunc hominem, Calculi noſtri aliuſve novæ methodi omnino rudem & oſorem, in cognitionem harum figurarum deduxiſſet: ſed poſtquam ROEMERI inventum eſſe ex Te cognovi, ceſſo mirari, & tecum jam potius miror, quî ille vivo etiamnum & legitimo Parenti prolem ſubducere & pro ſua publice obtrudere audeat............. Non dubito ROEMERUM ſua ſibi vindicaturum; ſi hæc ad cognitionem ſui pervenerint: ſed ut audio ex *Fratre* meo juniori, qui illum *Hafniæ* ſæpius adiit, in rebus Aulicis jam totus eſt, quibus haud dubie tempus utilius teret quam plagiario reſpondendo.

Cum olim *Genevæ* agerem, Domini OZANAM *Geometriæ practicæ* forte in manus incidit; quam volvendo, cum reperiſſem Quadraturam arithmeticam, memini me dixiſſe ad Dominum FATIUM

* *Traité de Méchanique* Paris 1695. pag. 368.

1698 Febr. DE DUILLIER, qui præſens erat, me antea hanc progreſſionem quanquam ſine demonſtratione, vidiſſe in *Actis*, quæ Te auctorem agnoſceret: mirari me cur OZANAM aliena ſibi adſcribere auſus fuiſſet; me enim non dubitare illum demonſtrationem ſuam à Te ipſo edoctum fuiſſe........ Ego etiam tale quid expertus ſum in ipſo *Marchione* HOSPITALIO [inter nos dictum]......... quando nuperum ſuum Opuſculum vulgavit. Licet in Præfatione mihi multum debere profiteatur; vaga nimis eſt hæc confeſſio, nec eo melior quod Author *Diarii Pariſini* recenſendo hoc Opuſculum, eam a neſcio qua generoſa modeſtia profectam deprædicet, ſi vere modeſtus fuiſſet imitari debuiſſet *Eraſmium* BARTHOLINUM, qui candide edixit ſe, quæ conſcripſiſſet tantum, *Principia matheſeos univerſalis* a SCHOTENIO accepiſſe: non majori jure HOSPITALIUS dicendus eſt Author ſui Opuſculi; totum enim quantum eſt, paucis paginis exceptis, [Tibi in aures dico, & nemini alii] a me partim ſcriptum, partim in calamum dictatum accepit, partim etiam, poſtquam *Pariſios* deſeruiſſem, per litteras communicatum accepit: in cujus documentum omnium copiæ a me aſſervantur, & quandocunque libuerit produci poſſunt; quas etiam ante vulgatum Opuſculum nonnulli amici viderunt, & bonam partem deſcripſerunt; & quid multum! habeo litteras HOSPITALII ad me ſcriptas, quæ teſtantur quantum mihi arrogare liceat. Præcipuum quod ibi præſtitit, illud eſt quod in ordinem digeſſit, & gallico idiomate nitide conſcripſit, quæ ipſi confuſe, modo latine, modo gallice exhibueram;.........

Pecunia, quam Ordines noſtri erogaturi ſunt in experimenta, tanta non eſt, quantam forſan tibi imaginaris, deſtinata eſt ſumma 1000 vel 1200 florenorum ad ſummum, ad emendum tantum inſtrumenta communia & ordinaria, quibus non magni quid, vel extraordinarii, præſtiturum polliceor; neque adeo dignum quod Tibi communicetur. Delectamentum forſan ipſi capient Ordines, ſi primis vicibus, ut ſpero, intereſſe dignentur & ſpectatores agere; id quod facile majori liberalitati anſam præbere poſſet.

Diu eſt quod nihil neque a Domino *Marchione*, neque a Domino VARIGNONIO litterarum acceperim, cum tamen uterque mihi

hi debeat. Varignonius diſcendi cupidus eſt, & docilis; proficit in noſtris inſigniter, & unde profecerit agnoſcet ingenue. Laudo hunc Virum, propter mirum candorem, & raram modeſtiam; .... noſtra contra invidos ſtrenue defendit. 1698 Febr.

Papinus utique diſtinctione ſua ſubterfugium quærit: abſtrahimus ab inſenſibilis materiæ actione; alium enim non conſideramus concurſum corporum quam liberum; ſufficit ergo nobis, ſi pro hoc noſtras regulas concedat. Non ſatis capio, cur in corporum concurſu celeritates recuperandas molibus reciprocas eſſe dicas, recuperatas non item: mihi ſaltem videtur Elementa celeritatum, & amiſſarum, & recuperatarum ſeu recuperandarum [nullam differentiam hic capio] molibus eſſe reciproce proportionalia; quod utique ſequitur ex natura vis mortuæ. Vale.

Amplitudinis Tuæ

Obſequentiſſimus

J. Bernoulli.

EPISTOLA LXVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Problemate Iſoperimetrico. De La Hirio. *De* Tſchirnhauſiana *arcuum parabolicorum comparatione, Varia.*

Vir Celeberrime, Fautor & Amice Honoratiſſime!

Mitto ecce quæ Dominus *Frater* Tuus *Diario Eruditorum Gallico* * inſeri curavit, tametſi ſuſpicer ea Tibi jam eſſe viſa. Vides 1698 Mart.

* 1698. 7. Journal du 17. Fevr. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLI. p. 214.

1698 Mart. Vides quam habuerim gravem cauſam declinandi receptionem arbitrii, antequam conſtaret ab utraque parte ad me deferri. Vides enim Dominum *Fratrem* Tuum aliam rei definiendæ rationem proponere.

Domini La Hirii Librum *de Epicycloïdibus* habeo, ſed attente legendi otium non eſt. Inſpiciens obiter obſervavi paſſim inter demonſtrandum ad infinite parva delabi, atque ita a rigore Veterum deflectere; non male quidem, niſi aliud profeſſus videretur. Hoc enim ſemel admiſſo, non erat opus tanto apparatu. Eſt tamen, fateor, Doctrina ejus mathematica non vulgaris; nam Conicas meditationes univerſales Desarguesii & Pascalii egregie perſecutus eſt. In Aſtronomia Obſervator diligens & in aliis quoque rebus excutiendis accuratus habetur; & cum delineationibus valeat, perutilem Academiæ Scientiarum Regiæ operam navat. Contra Dominum Tschirnhausium quædam recte monuit; vellem tamen uſus fuiſſet majore moderatione. Quemadmodum & ipſum Dominum Tschirnhausium optarem apertius agere, ne dum præclariora premit, cogatur inferioribus applicare nomina, quorum menſuram non implere ſubinde deprehenduntur. Ille tamen in Litteris ad me ſuis, ac publicis etiam ſcriptis, teſtatur gloriam a ſe non curari, nihilque eo affectu eſſe nocentius, quoad ſcientiarum incrementa; idque nuper quoque repetiit ea occaſione quam nunc dicam.

Nempe Dominus Menckenius, qui non libenter aliquid *Actis Eruditorum* inſerit quod Domino Tschirnhausio diſplicere poſſit, rem eo deduxit, ut is Litteras ad me dederit humaniſſimas, iiſque inſeruerit reſponſionem ad nuperum ſchediaſma tuum * *de Comparatione arcuum parabolicorum*, rogans ut Tibi eam communicare velim. Cur autem hanc Tibi reſpondendi elegerit rationem, duas attingit rationes; unam, quod ſi qui gloria ducuntur, qualem Te eſſe appareat, in publicis concertationibus facillime offendunt, offenduntur que, tum etiam quod apertiſſime Tibi oſtendere poſſit, erroneam eſſe Tuam regulam, atque ita Tua intereſſe eam

* De quo in Epiſt. LXIII.

eam non prodire. Nam ſi cum Tua regula conjungatur id quod 1698 Mart.
jam conſtat, areas Hyperbolicas, ſecundum progreſſionem geometricam linearum aſſumtas, eſſe æquales, oriri abſolutam quadraturam Hyperbolicæ areæ. Addit Te non debuiſſe ſpernere eam rationem ſecandi areas, qua ipſe ſit uſus, licet magis remotam, quoniam per ipſam præſtetur aliquid aliud magni momenti, nempe ipſius areæ quadratura, quoties eſt poſſibilis. Hoc ſi verum eſt, fatebor ego maxima elogia hanc Domini Tschirnhausii methodum mereri. Jam deberem Tibi ipſam reſponſionem Domini Tschirnhausii communicare, ſed cum excerptum tantum ex Epiſtola ſua Tibi mitti juſſerit, nec alius commode exſcribere recte poſſit, mihi vero non vacet, differenda in proximas erit hæc communicatio.

Miror jamdudum nihil amplius a Domino *Marchione* Hospitalio ad nos perſcribi, ſpero nec a valetudine adverſa, nec ab aliqua erga nos animi mutatione ſilentium hoc oriri. Videtur autem in amicitia ejus ineſſe aliquid inæquabilitatis, ut nunc incaleſcere, nunc refrigerari videatur, nulla manifeſta cauſa.

Vellem eſſet Tibi amicus *Pariſienſis*, per quem diſcere liceret, quæ illic, præſertim apud Academicos Regios Scientiarum alioſque, non in his geometricis tantum, ſed & in aliis, geruntur. Nam Dominus Hospitalius, a quo talia ſubinde perſcribi, vel amicum, qui faciat, parari mihi petii, ab eo commercii genere videtur alienior. Ego vero non arcana peto, ſed quæ *Pariſiis* nota in vulgus. Neſcio an per Dominum Varignonium tale aliquid efficere poſſis, ſed ita ut a me non quæſitum videatur, & ut ipſe non nimis oſtendas cupiditatis............................ Fortaſſe tamen & alius extra Academiam ſatisfaceret liberius.

Si diſtinctionem inter celeritates recuperatas & recuperandas, qualem feci, attentius conſideraris, non inanem reperies. Quod ſupereſt vale & Fave: Dabam.

Hanoveræ, 25. Martii 1698.

Deditiſſimus
G. G. Leibnitius.

EPISTOLA LXIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad Præcedentem.

De controverſia Fraterna. De TSCHIRNHAUSIO, HOSPITALIO & VARIGNONIO.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1698 Mart. ACcepi Tuas poſtremas recte, cum *Fratris* mei admonitione *Diario Gallico* inſerta, * quæ jam antea bis mihi fuerat miſſa, a Domino VARIGNONIO primum, & deinde a Domino *Marchione* HOSPITALIO; gratias tamen ago pro cura Tua. Video maxime *Fratrem* nolle ſe ſe arbitrio ſubjicere; ſed aliam rei definiendæ rationem, imo in longum producendæ rationem, quærere & ſubterſugia; quod forſan cauſæ ſuæ timeat, ſed non eſt cur diutius tergiverſetur: reſpondi † enim me non accepturum, quidquid inpoſterum replicaturus ſit, niſi ipſe prius oblatum a me Judicem acceperit, aliumve mihi nominaverit: me namque idem de ipſius ſolutione poſſe dicere quod ipſe de mea; utri tunc publicum plus fidei haberi debeat: ipſine, an mihi? Hanc ergo litem dirimendam eſſe a tertio. Me ſuſtinere etiamnum Problema in ea extenſione ſumtum, in qua *Frater* propoſuit, a me in *Diario* legitime fuiſſe ſolutum: Me tamen non negare, ex feſtinatione irrepſiſſe leviuſculum aliquem errorem, qui autem ortum ſuum habeat, non ex falſitate methodi, ſed unice ex applicatione non rite inſtituta; præterquam quod ille lapſus non tangat Problema, prout illud autem a *Fratre* ſpecialiter propoſitum ſit, [hoc enim ut jam

* 1698. 5. Journal du 17. Fevr. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLI. pag. 214.
† *Journal des Savans.* 15. Journal du 21. Avril. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLII. pag 215.

jam monui, plenarie ſolutum eſſe] ſed tantum quatenus ego ipſe univerſaliter conceptum illud exhibuerim. Quicquid ſit, hunc lapſum paucis verbis emendari poſſe, & revera emendationem in reſponſione adjeci .... Unde colligi poſſe methodum ipſam bonam eſſe, licet in applicatione ad omnes circumſtantias non ſatis adtenderim, & quidem directam invenerim [quod Tibi, ut puto, nondum ſignificavi] quæ mihi eamdem ſolutionem, quam altera illa indirecta, qua ab initio uſus fueram, ſuppeditaverit: mirumque conſenſum non ſolum in hiſce, ſed etiam in aliis ſpeculationibus detexerit: Me præterea in anteceſſum poſſe divinare, quid *Fratri* occaſionem dederit credendi ſe divinaturum Analyſim meam; ſcilicet quod in ſolutione mentionem fecerim de curvatura lintei a fluido expanſi, unde illum conjecturaſſe me in Analyſi uſum fuiſſe conſideratione maximi deſcenſus Centri gravitatis in fluidis ſtagnantibus: ſed ipſum falli; me enim, præter hanc viam, quæ dextre adhibita etiam eo porrigatur, poſſidere etiam directam, quam ille nunquam divinaturus ſit: me itaque, ut *Fratrem* decet, *Fratris* commodo conſulentem, ipſi ſuadere ut decertationem oblatam revocet. Sed hæc amplius videbis in ipſa reſponſione impreſſa. 1698 Mart.

De Domino La Hirio nihil eſt quod dicam: valeat ejus Doctrina mathematica non vulgaris, per me licet; modo aliorum quoque apud ipſum valeret, nec tantopere ſperneret, quæ ab aliis proveniunt, ſi diſplicent; nec ſtatim ſibi arrogaret, quæ placent.....

Quod Dominum Tschirnhausium attinet, miror quod Dominus Menckenius ſchediaſma meum de comparatione arcuum Parabolicorum *Actis* inſerere noluerit; cum tamen ibi uſus fuerim verbis humaniſſimis & modeſtiſſimis, quibus vix efficaciora invenire potuiſſem ad perſuadendum, quanto apud me ſit in pretio. Si talia diſplicent, nihil eſt quod inpoſterum placebit, nihilque amplius imprimetur. Non ſane verborum meorum acerbitas, [nulla enim fuit] bonum Tschirnhausium urit, ſed res ipſa quæ ipſius errores detegit, ipſi eſt inviſa...................... Dicit porro ſe poſſe apertiſſime mihi oſtendere, meam regulam eſſe erroneam, atque ita mea intereſſe eam non prodire: Terriculamenta ſunt, quibus pueros deterreat: mihi vero permittat ut edam,

Digitized by Google

1698 Mart. aut ipſo invito prodibit......... Aſt facile ſuſpicor, cur ſchediaſma meum ſupprimendum ſuadeat, ne ſcilicet ſua regula pro comparandis arcubus Parabolicis, * quam ipſe pro falſa agnoſcit, tanquam inutili, rejecta, jam ab alio meliorem editam approbare cogatur; imitando vulpem in fabula quæ, neſcio quo infortunio, amiſſa cauda, ſociis perſuadere conabatur, ut pariter caudas amputarent, tanquam impedimentum inutile & indecorum. En hic alterum *ſchediaſma*, † quo fundamentum meæ regulæ explico: rogo ut paulo attentius legas; judicabis deinde, quo jure Dominus TSCHIRNHAUSIUS meam regulam falſitatis accuſet, aut quam aperte, ut jactat, oſtendere mihi poſſit, eam eſſe erroneam. Lectum, Domino MENCKENIO, ſi placet, tranſmitte, cum litteris adjectis; non dubito quin illud jam ſine ſcrupulo ſit *Actis* inferturus, & vel ideo, quia nulla ibi ſit mentio Domini TSCHIRNHAUSII. Quantum ad ejus rationem ſecandi areas; ſprevi eam, quia remota eſt & magno conatu parum præſtat. Judicare utique debui ex iis quæ vidi. Si præterea aliquid aliud in ſe habet, ſcilicet, ut jactat, modum determinandi areæ quadraturam, quoties eſt poſſibilis; id ego non ſomniavi: oſtendat ergo; tum demum laudabo ejus methodum..................................

Dominus *Marchio* HOSPITALIUS nuper quidem ad me ſcripſit tribus quatuorve lineis, ſed tantum ut mihi mitteret *Fratris* ſchedulam; nihil plane de rebus mathematicis attingens, ut olim facere ſolebat........ Spero quam-optime deſiderio Tuo ſatisfieri poſſe per Dominum VARIGGONIUM, qui mihi multis nominibus obſtrictus eſt, & ſe etiam obſtrictum agnoſcit: nec obſtat quod ipſe ſit membrum Academiæ; tanto enim commodius, quod petis efficere poterit. Vir eſt officioſus & aperti cordis, faciet, ſi poteſt; ſi non poteſt, rationem dicet: prima occaſione hac ſuper re ipſi ſcribam. Vale. Amplitud. Tuæ

Devotiſſimus

J. BERNOULLI.

EPIS-

* *Inſerta Schediaſmati cui Titulus*, Nova & ſingularis Geometriæ promotio circa dimenſiones quantitatum curvarum, *Act. Er.* 1695. Nov. pag. 489. Vel *Joh.* BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. XXVIII. pag. 149.

† *Inveſtigatio Algebraica arcuum parabolicorum aſſignatam inter ſe rationem habentium* &c. Act. Erud. 1698. Jun. p. 261. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLIX. p. 242.

EPISTOLA LXX.

LEIBNITIUM AD BERNOULLII.

Reſponſio ad præcedentem.

De Arcuum Parabolicorum comparatione, & TSCHIRNHAUSII *objectionibus. De* LA HIRIO. *De* BIGNONIO & HOSPITALIO.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Litteras Tuas, & perelegans *Schediaſma* pro ſecando arcu Parabolæ, ad Dominum MENCKENIUM miſi, & hortatus ſum, ut tuo meoque periculo edat, quando nihil in eo eſt quod Dnum TSCHIRNHAUSIUM noſtrum tangat. Quantum mediocri attentione judicare licuit, & recte & pulchre procedis. *1698* Mai.

Hujus autem objectionem jam Tibi mitto, ex litteris ad me excerptam. Miſiſſem citius, niſi oblitus fuiſſem litteras ejus mecum deferre *Guelfebytum*, ubi ferias & unam alteramve ſeptimanam animi gratia exegi. Nunc reverſus officio ſatisfacio. Examinandi nec otium nec voluntas fuit; præſertim cum alias a Tuis notas aſſumens, duplicaverit laborem comparationem inſtituere volenti, quam ipſum abſolvere maluiſſem; ut facile ſuſpicer aliquid ipſum fugiſſe, ſive in calculo, ſive in calculi applicatione, cum id ipſi ſæpe evenire, ob diſtractiones, jam ſim expertus, & fieri poteſt ut quas ille diverſas habet æquationes, quarum ope arcum incognitum rectificari debere judicat, coincidant in extremo & in identicum aliquid deſinant, ut incognita arcum deſignans poſtremo, præter opinionem, evaneſcat; quod in talibus etiam ſæpe ſum expertus, cum ſingulares methodos excogitatas in rem contuliſſem, quibus quadraturæ particulares Hyperbolæ, vel partium Circuli haberi poſſe videbatur.....................

Cæterum de Domini LA HIRII modo agendi ſecum coram

 parum

† *De quo in Epiſt. præcedente.*

1698 Mas. parum humano, parumque etiam urbano etiam Dominus Tschirnhausius olim apud me querebatur. Ego Dominum La Hirium de facie non novi, ſed, quod poſtea didici, inſcius ei obſtaculum dedi, nam cum diu id fuiſſet actum ab ejus amicis, ut in Academiam Scientiarum Regiam reciperetur, me demum a Duce *Brunſvicenſi* Sereniſſimo Johanne Friderico in *Germaniam* evocato, res confici potuit, quod antea de me retinendo ageretur, eo autem tunc res ob bellum loco eſſent, ut ipſum pariter & me vocare Colberto non placeret. Ego vero libens fateor, Virum, qualis ipſe eſt, induſtrium in obſervando atque etiam in delineando utiliorem fuiſſe ad ſolitos Academiæ Regiæ labores, quam me qui in varia diffundor, & aptior ſum ad conſulendum, quam ad laborandum, quem vereor ne ipſi dicturi fuiſſent, hominem *ignava opera, philoſopha ſententia*: Ita fata utrique noſtrum recte proſpexere; præſertim cum ego, non minus quam Hugenius, mutationem poſtea ſecutam, ſublato Nannetenſi Edicto interdictaque Religionis libertate, haud dubie fuiſſem diſceſſu præventurus.

Cæterum neſcio quomodo litteræ in *Gallia* declinant, nec mortuis Viris egregiis alii pares ſuccedunt. Sed meliora jam ſpero ſtudio *Abbatis* Bignonii, qui Pontchartrainio eſt ex ſorore nepos, & res Academiæ Scientiarum Regiæ curat. Eum enim puto eſſe ſimul bene animatum & intelligentem. In Domino *Marchione* Hospitalio aliquid inæqualitatis obſervo, quod valetudini ejus, an genio adſcribendum ſit neſcio. Vides opinor, quam recte conſilio meo uſus ſuppreſſeris apud ipſum illam nuperam meam tangentium calculi promotionem, cujus quam late pateat uſus ipſe obſervaſti. Et danda opera eſt, ut ne ſuſpicetur quidem tale aliquid nobis eſſe; ſed neſcio quas alias potius artes indirectas a nobis ad ſimilia conficienda adhiberi arbitretur; ita enim non tam facile ipſi in mentem veniet methodus noſtra; quanquam ipſa per ſe ſatis ſit abſtruſa.

Cum credibile ſit relationem inter areas ejuſdem curvæ, in Conicis cœptam, longius progredi certa ſerie in altioribus curvis; optandum eſſet lucem aliquam nobis in hoc genere accendi. Id ſi poſſet

Digitized by Google

poſſet Dominus Tschirnhausen, faceret operæ pretium; nunc quæ promittit de ſectionibus; quæ ubi non ſuccedant, impoſſibilis ſit quadratura; vereor ut ſit præſtiturus; neque enim ſatis ea in re video connexionis. *1698* Mai.

Singulari nos beneficio obſtringet Varignonius, ſi quæ in *Gallia* per varias Matheſeos partes geruntur ſignificare ſubinde Tibi velit, ut per Te ad me porro eorum notitia perveniat. Grata mihi erit via Tua directa, pariter & indirecta, omniſque adeo Analyſis pro Problematibus Fraternis. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 15. Maii 1698.

Deditiſſimus

G. G. Leibnitius.

EXCERPTUM.

EX LITTERIS TSCHIRNHAUSIANIS.

8. Martii 1698. Latine verſum.

De arcuum parabolicorum comparatione.

P*Rateritis Anni novi nundinis Lipſienſibus*, *Vidi* modum *quo D.* Bernoullius *arcus Parabolicos comparat. Potuiſſem* ex tempore *reſpondere*, *quamvis* mediis aulæ occupationibus & diverticulis *diſtinerer. Sed ne quid* præcipitanter *facerem*, *expectandum decrevi tempus quo* ordinario otio *fruor*, *quod & ſtudiis deſtinare ſoleo. Quoniam vero*, *etiamnum mihi eadem mens eſt*, *ejus* inventum *ad* arcus Parabolicos *inter ſe* comparandos abſolute falſum *eſſe*, & *præterea ille mihi multa* affingit, *quæ nunquam in mentem mihi venerunt*, *primum tam clare demonſtrabo*, *ut valeat illud in dubium revocare nemo eorum qui* aliqualem cognitionem in his ſtudiis

TAB.XIV. diis *habent*. Sit (*Fig.* 75.) CFILN Hyperbola æquilatera, cujus aſymptoton AM angulum CAO biſariam dividens, dupla AC tanquam latere recto deſcribatur Parabola ARSTV. Notum eſt vel ab HEURATII tempore, *rectangulum* ex recta CA in curvam AS æquari ſemper ſpatio hyperbolico CAQ. Secundo, *notum eſt pariter*, ſi duo ſpatia ſint hyperbolica FDGI & LKMN hac ratione in ſe poſita, ut AD ſit ad AG, ſic AK ad quartam proportionalem AM; ſpatia hæc fore æqualia, *quod facillime poteſt* per methodum indiviſibilium CAVALERII demonſtrari. *Ponatur nunc* arcus parabolicus RS eſſe æqualis x, & arcus TV, ſit, exempli gratia duplus prioris, ſit $AB = a = BC$. $AD = b$. $AG = c$. $AK = f$. $AM = g$. Area = K. *

Quandoquidem ſpatium ex AC in RS, & TV æqualia *ſint* ſpatiis hyperbolicis PFIQ, *&* NLNO, *&* ex his ſpatiis *facile deduci poſſunt* ſpatia FDGI, *&* LKMN, ponamus hæc jam æqualia, & obtinebitur æquatio talis: $f^4 = (bbccff + a^4ff) : cc + akbbccffx : (c^4 - bbcc) - a^4bb : cc$, *in qua* ad determinandam f nihil obſtat, quam quantitas x, ſeu arcus Parabolici menſura. *Sed huic facile remedium eſt*, nam quia ad determinandas AN & AO, a Domino BERNOULLI æquatio inventa, ubi arcus parabolicus non comprehenditur; ope duarum harum æquationum non ſolum determinabitur Arcus duplus, ſed etiam abſoluta menſura arcus Parabolici dati [quia duæ æquationes *Johannis* BERNOULLI, & hæc mea, & duæ hic incognitæ ſunt arcus $RS = x$ & $AK = f$] adeoque certo hinc ſequitur, vel ſpatii Hyperbolici menſura hactenus deſiderata; vel quod Methodus, quam nobis exhibuit falſa ſit, & quia ipſe prius negat [quadraturam nimirum Hyperbolæ hinc impetrari] ſuſpicor Calculi lapſum Auctori inanimadverſum alicubi hærere, prout expertiſſimo circa ſimilia facile accidere poteſt.

Et Methodus a me huc uſque adhibita per generalem calculum *facillime* verificari *poteſt*; nam multiplicando datum arcum *prout libuerit*, *nunquam* intentum geometrice, *obtineri poteſt*, *abſque* quadratura

* Hic manu Celeb. LEIBNITII margini adſcripta leguntur hæc verba: *Non potui* valorem K in *Epiſtola Dn.* TSCHIRNHAUSII, *recte legere*.

Digitized by Google

dratura hyperbolæ, *niſi quando* arcus æquales deſiderantur. *Sed tunc orietur* arcus ab altera Parabolæ parte exiſtens, *quod non* novum inventum *vocari poteſt* eo reſpectu *quaſi huc-uſque incognitum* fuerit. *Attamen novum eſt* ea ratione, quod *demonſtrari poſſit hoc abſque* quadratura Hyperbolæ *haberi non poſſe ut nunc factum eſt. Quamvis aliam plane methodum norim* ſolam naturam curvæ parabolicæ conſiderando, *nullo ad* Hyperbolam *reſpectu, qua idem* conclusum *obtinetur, &* ea ratione credo, me minus intempeſtive id aliquid novi vocaſſe: † *Quia mea* Methodus univerſalis non ejuſdem ſaltem curvæ ſed qua quarumvis diverſarum curvarum inter ſe comparandos *arcus*, non abſolute *ſubſiſtere poteſt, prout mihi affingitur, ſed nihil aliud indicat, niſi quouſque res eſt poſſibilis aut impoſſibilis, quemadmodum D.* Bernoulli *ſimiliter tentavit in Parabola, licet* infelici ſucceſſu.

Præterea nullibi unquam dixi quod, ſecare curvam rectificationis ignotæ & ſecare ſpatium curvilineum quadraturæ ignotæ, ejuſdem difficultatis res ſit: *Non igitur video quam ob cauſam talia mihi affingantur. Denique non parum miratus ſum, Dnum.* Bernoullium *ſequentia mihi objicere. Nam quamvis ante* Cavallerii *tempora notum ſit, id quod hanc in rem dicit, nempe* Ellipſin per infinitas Ellipſes, *& omnia pariter* ſpatia curva, per curvas ejuſdem generis in data ratione *dividi poſſe*: *Quamvis etiam alicui, oculos conjicienti in* Titulum *hujus mei* inventi, *idem in mentem venire poſſet, non tamen arbitror quod, ſi ipſe rem omnem ulterius deducat videret has* curvas *inde produci, & ut ſpeciatim affertur D.* Gregorii Scoti 62. Propoſitio, *ejus* Geometriæ univerſalis, *Dico tamen neminem poſſe hanc mihi objicere, quoniam hac methodo non* curvæ ejuſdem gradus *inveniuntur, ſed* diverſæ naturæ, *licet ſimiles, nam in.* Hyperbola *&* Circulo, curvæ *dari poſſunt, in quibus* indeterminatarum dimenſio ſaltem ad 3 dimenſiones aſcendit.

Reſpondet quidem Dnus. Bernoulli, ſe non videre, quid me permoverit ad indagandum per aliena & remota, quod in ipſo ſtatim veſtibulo nulli non obvium; *Cum enim in mea Metho-*

† Hic rurſus manu Celeb. Leibnitii margini adſcripta leguntur ſequentia, *Non ſat recte intelligo.*

do ſpatia in data ratione ſecandi *ſemper etiam & ſimul* quadratura ſpatii, *ſi poſſibilis ſit habetur, quod notum eſt per præcedentem methodum obtineri non poſſe; facile cernitur, quid me ad hoc indagandum permoverit, & id* non cuilibet obvium *eſſe, ſed potius* eruditi Orbis conſpectum mereri.

De Circulo *etiam nuſquam dixi, illum per* lineas rectas in data ratione ſecari *poſſe. Unde ſequitur ultima verba non poſſe me reſpicere, quod tamen omnes judicabunt* Lectores. *Siquidem ex mea* methodo *clare ſequitur, infimam* Curvam Geometricam, *per quam hoc præſtari poſſit*, ad tertium gradum *aſſurgere; itaque hoc impoſſibile eſſe; quod non exiguum* eſt ſpecimen quanti momenti hæc Methodus *ſit, tantoque magis, quod* cuivis curvæ *applicari poſſit. Hoc erat, quod dixeram me in* Actis *inſerturum, quodque Tibi, ut examines communicabo, & ex Tuo reſponſo diſcam, quid hanc in rem faciendum ſit.*

Quoad Cycloïdem, *Tibi mihique jam dudum eſt cognita ratio qua* ſingularis proprietas HUGENII *facile demonſtrari poſſit, ſicut etiam* PARDIES *publice demonſtravit, & in* Actis Anglicanis, *jam dudum, publici juris facta eſt.*

EPISTOLA LXXI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Reſponſio ad Objectiones TSCHIRNHAUSII. *De* HOSPITALIO. *De Parabolarum rectificationibus & transformationibus.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1698 Mai. QUamvis non opus ſit defendere modum meum ſecandi arcus parabolicos contra objectionem *Tſchirnhauſianam*, quippe quem vidiſti & approbaſti; percurram tamen breviter principaliora hujus objectionis capita, inibique ſequentia notabo. . . . .

Calcu-

Calculum quem iniit, ut Tibi, ita nec mihi, animus fuit ob prolixitatem examinare; præſertim cum etiam Tecum divinare nequeam, qualem valorem per litteram *k* intelligat: examinavi tantum modum procedendi; ubi oppido paralogiſmum detexi evidentem adeo, ut mirer tanto Viro, & vel leviter attendenti, nedum ſerio meditanti, excidere potuiſſe. Supponit enim ad quærendum arcum TV, duplum ipſius RS, debere neceſſario ſpatium hyperbolicum LKMN, correſpondens arcui TV, æquari ſpatio alteri hyperbolico FDGI, correſpondenti arcui RS: At vero unde hæc neceſſitas? Quid, quæſo, me cogit ad ſupponendum potius LKMN æquale ſimplici FDGI, quam cuivis alii multiplici ejuſdem. Adeoque hoc unicum omnibus fidiculis deducere poterit Dominus Tschirnhausius ex ſua objectione, quod nempe ſine quadratura Hyperbolæ, vel rectificatione Parabolæ, inveniri non poſſit arcus TV, qui ſit duplus ipſius RS, & ſimul ut ſpat. Hyperbol. LKMN ſit æquale ſpat. Hyperb. FDGI. Exinde vero quod, ſecundum hanc ultimam conditionem, comparatio arcuum ſit impoſſibilis, male concludit, illam eſſe abſolute impoſſibilem. Peccavit ergo [ut Logici dicunt] argumentando a dicto ſecundum quid, ad dictum ſimpliciter; & quidem, meo judicio, non minus abſurde, ac ſi quis ex eo quod Dominus Tschirnhausius jam non *Romæ* exiſtit, inferre vellet illum plane non exiſtere. Ex dictis ſequitur fruſtra ſperari rectificationem parabolæ ex bonitate methodi meæ; quia illam conditionem LKMN = FDGI, præter neceſſitatem, a Domino Tschirnhausio adjectam non ſupponit; ſed contra potius ſupponit LKMN eſſe duplum FDGI, & generaliter LKMN eſſe totuplum ipſius FDGI, quotuplus arcus TV eſſe debet ipſius RS. Et ſimul mea ex methodo patet, cur hæc ſola ſuppoſitio apta ſit ad præſtandum quæſitum; hæc enim ſola facit, ut x, quam Dominus Tschirnhausius pro arcu RS aſſumit, in æquatione finali evaneſcat; atque adeo valor ipſius f. Seu quæſita AK proveniat in meris lineis rectis, loco quod in omni alia ſuppoſitione, x in æquatione maneat; atque adeo ſine rectificatione hujus arcus x valor f obtineri non poterit · vel poſſit. 1698 Mai.

Non abs re fore puto ſi Dominus Tschirnhausius hanc

Digitized by Google

1698 Mai. meam ad ipſius paralogiſmum reſponſionem communicaveris; ut videat quanto magis e re ipſius fuerit, quam e mea, errorem ſuum non in lucem prodiiſſe, & quanto majori jure ego ipſi conſulere potuiſſem ſuppreſſionem ejus, quam ille mihi conſuluerit, ne methodum meam publicari paterer; atque ut diſcat poſt hac modeſtius judicare de propriis, & æquius de alienis, nec ſtatim manifeſtæ falſitatis arguere quæ veriſſima ſunt. Sed pergo ad reliqua objectionis illius reſpondere: Miſere itaque hallucinatur, quando ait, „ *quod* multiplicando datum arcum *prout libuerit*, *nunquam* intentum geometrice obtineri poterit [oſtendi enim ſemper obtineri poſſe] ſed porro, inquit, *niſi*, *quando* arcus æquales *deſiderantur*, *tum enim orietur* arcus ab altera Parabolæ parte exiſtens, *quod non* novum inventum *vocari poteſt*, eo reſpectu, *quaſi* hucuſque *ignotum fuerit*, *ſed forſan* novum ea ratione, quod demonſtrari *poteſt*, *id abſque* quadratura Hyperbolæ *haberi non poſſe, quemadmodum factum eſt*". O elegans inventum, quo ſcimus duos arcus in Parabola ſibi mutuo e regione oppoſitos eſſe inter ſe æquales; ſed elegantius longe, quod demonſtraverit arcus in ratione inæqualitatis abſque quadratura hyperbolæ obtineri non poſſe! En duo inventa, me hercle! cedro digna. Immediate ſubjungit; „ *Quamvis aliam plane methodum norim*, ſolam naturam „ curvæ parabolicæ conſiderando, *nullo ad* Hyperbolam *reſpectu*, „ *idem* concluſum obtinendi". Qualiſnam ſit hæc altera via equidem ſcire non cupio, ſufficit dixiſſe, idem per illud concluſum emergere, ut quanti ſit æſtimanda tuto concludere poſſimus. Verba quæ ſequuntur, cum nulla conſtructione inter ſe cohæreant, ut Tu, ita nec ego, probe intelligere poſſum, videtur tamen Dominum Tschirnhausium innuere velle, ſe poſſidere univerſalem methodum, non hujus, vel alterius ſaltem curvæ, ſed omnium curvarum portiones inter ſe comparandi, quotieſcunque poſſibile ſit; ſed vereor ne univerſalis hæc methodus cum ſuperiori ſpeciali pari paſſu ambulet. Ridiculum hic eſt, quod queritur ſibi a me affictum eſſe, quaſi dixiſſem ſe habere methodum curvæ cujuſque portiones abſolute comparandi, cum tamen ipſe, idem & ibidem, perſuadere conetur, ſe ſe per ſuam methodum determi-

nare

nare poſſe quouſque illa comparatio ſit poſſibilis nec-ne; „ *ſed ni-* 1698.
„ *hil aliud indicat, niſi quouſque res poſſibilis ſit, aut impoſſibilis.* “ Mai.
Quid? Dicere habere methodum rem præſtandi quotieſcunque poſſibilis eſt, & ſi impoſſibilis, impoſſibilitatem demonſtrandi, quid hoc aliud eſt, quam dicere, ſe habere methodum abſolutam & perfectam? Quis enim unquam aliquid impoſſibile exigit? Rideo quæ modo citatis ſubjungit, „ *quemadmodum Dn.* Bernoullius *tentavit in* Parabola *licet* infelici ſucceſſu “; feſtucam in oculo meo quærens, trabem in proprio non animadvertit. Porro dicit, „ *Praterea nullibi unquam dixi, quod* ſecare curvam rectificationis ignotæ, & ſecare ſpatium curvilineum quadraturæ ignotæ, ejuſdem difficultatis res ſit. *Non igitur video quam ob cauſam talia mihi affingantur* “ Miror profecto quod dicat me hoc ſibi affinxiſſe, an-non multa in diſcurſu quæ incidenter obveniunt memoramus, non tamen ſtatim alteri, cum quo nobis res eſt, affricamus; fateor quidem me dixiſſe, illa duo non eſſe ejuſdem difficultatis res, ſed nego quod dixerim Dominum Tschirnhausium contrarium affirmaſſe. Quod autem D. Tschirnhausium male habeat, quod vilipenderim ipſius methodum ſecandi ſpatia curvilinea, dum oſtendi nihil omnino novi, ſed rem eſſe perfacilem, & Lippis & Tonſoribus notam, eamque infinitis modis abſolvi poſſe; ſibi imputet, ſi non pro merito de illa judicavi; oſtendat enim quomodo per illam ſimul quadraturam, ſi poſſibilis eruere, vel ſi impoſſibilis impoſſibilitatem ejus exhibere poſſit; tum pluris æſtimabo; ſin minus, meliori jure de ea dicere poſſum *eruditi Orbis conſpectum non mereri*, quam quod ipſe eiſdem verbis de curva mea rectangula, vel poteſtates inter ſegmenta rectarum e puncto communi eductarum, faciente æqualia, contemtum ſuum manifeſtaverit; quod tamen inventum & Tibi, & aliis, non parvi momenti videbatur.

Tandem ait, „ de circulo, *talia nunquam dixi, illum* per lineas „ rectas in data ratione *ſecari poſſe* “: neque ego dixi illum dixiſſe, ſed hoc ipſi propoſui, tanquam quod foret alicujus ponderis, ſi per ſuam methodum ſolvere poſſet; alias nihil novi facturus, ſi non per rectas, ſaltem per curvas circuli ſegmentum ſecaret.

1698 Mai. Claudunt objectionem hæc verba; „*Quoad* Cycloïdem, *eſt tibi* „*mihique jam dudum cognita ratio* qua ſingularis proprietas HUGENII *facile demonſtrari poſſit, ſicut etiam* PARDIES publice „*demonſtravit*, & in *Actis Anglicanis jam dudum publici juris* „*facta eſt*". Sed ſcire velim Dominum TSCHIRNHAUSIUM me meam demonſtrationem non voluiſſe venditare tanquam quid ſingulare vel difficile, ſed contra potius ut, cum facillima ſit, oſtenderem LA HIRII lapſum in re facili tanto turpiorem eſſe. Interim, ſi volet meam demonſtrationem comparare cum illa quam PARDIES publicavit, peſſime agit: nullam enim vidi obſcuriorem, prolixiorem, ſimul & tædioſiorem demonſtrationem, quam *Pardieſianam*; loco quod mea tribus quaſi verbis abſolvitur. Quid in *Actis Anglicanis* hac de re prodierit, nunquam vidi.

Dominus *Marchio* HOSPITALIUS ſuſpicatur utique novam nos poſſidere Calculi promotionem; idque ſuſpicandi anſam habuit, ex eo quod ipſi dixerim nos Problemata illa, quæ pronuper in *Diario Gallico* propoſui, etiam pro curvis diſſimilibus, & quidem generaliter ſolvere poſſe. Ex litteris ejus ſatis colligo, quod hæc ipſi ſalivam moverint, non tamen petere audet; ego vero diſſimulo, quaſi non perciperem quo collimaret.

Cum non ſuppetat tempus excerpendi, en ipſas Litteras VARIGNONII, cum adjunctis ſchedulis. Litteras remittes, reliquis non indigeo. . . . . An relatio inter areas ejuſdem curvæ in Conicis cepta longius progrediatur, nondum mihi videre contigit. Interim modus meus comparandi arcus parabolicos etiam ad alias curvas extenditur; exempli gratia, ad Parabolam cubico-biquadraticam, $ax^3 = y^4$. Notavi præterea curioſam proprietatem circa hanc Parabolam $ax^3 = y^4$, & Parabolam communem $ax = yy$: nempe neutra quidem exiſtente rectificabili, poſſunt tamen ſimul ſumptæ rectificari. † Optarem ut aliquis modum generalem traderet ad datam curvam algebraïcam, irrectificabilem inveniendi aliam curvam algebraïcam, quæ ſimul rectificari poſſent; habeo quidem talem modum, qui in plurimis ſuccedit; quemque ſi Dominus TSCHIRN-

† *Vid.* Act. Er. 1698. Oct. pag. 462. *vel* Opp. Tom. I. N°. LI. pag. 249. item Tom. IV. N°. CLXIV. pag. 95.

Digitized by Google

chirnhausius haberet pro univerſali depraedicaret; Ego vero nonniſi ſpecialem agnoſco. Denique habeo modum omnes Parabolas & Hyperbolas, cujuſcunque gradus, ut & innumeras alias curvas algebraïcas, transformandi in alias alterius generis curvas ejuſdem cum ipſis longitudinis, † nec non reducendi quamplurimas quadraturas ad extenſionem curvarum algebraïcarum; Sed pro his aliiſve ſimilibus deſiderarem methodum univerſalem. Vale. 1698 Mai.

Amplitudini Tuæ

Groningæ 31. Maii 1698.

Addictiſſimus

J. Bernoulli

† Opp. Tom. IV. N°. CLXIV. pag. 92.

EPISTOLA LXXII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Tschirnhausio. *De Oinometro quodam. De Barometro portatili. De Aſtronomiæ & Geographiæ progreſſu apud Gallos. De Tautochroniſmo Cycloïdis. De artium deſcriptione, & libello* Mariotti *huc pertinente. De infinito & variis infinitorum ordinibus.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Mirum eſt Dominum Tschirnhausium in talem paralogiſmum incidere potuiſſe, qualem indicas. Multi ſpernunt vulgarem Logicam, & tamen plerumque paralogiſmi committuntur peccando in præcepta Logicorum. Faxo ut de reſponſione tua certior fiat, tametſi ex ſchediaſmate tuo noviſſimo, [ſiquidem id Dominus 1698 Jun.

Digitized by Google

1698 Jun. Dominus Menckenius, ut ſpero, edet] ipſe ſatis ſit errorem ſuum percepturus. Vellem etiam agnoſceret candide, nec dum de eo deſpero.

Gratias ago pro communicatione Varignonianæ Epiſtolæ, quam remitto; Deſiderem deſcribi nonnihil diſtinctius, ſaltem verbis [ſi figura commode non poteſt] fundamentum machinulæ, qua artifex quidem æſtimare ſe poſſe putat, quantum ex dolio ſit emiſſum. Mihi hæc ſcribenti modus aliquis in mentem venit, ſed oportet ut inſtrumentum in dolium immittatur initio, cum liquorem ſuum accepit, & ab eo tempore ibi hæreat. Nempe pondere liquoris inſtrumentum, aut in eo contentus aër comprimetur; liquoris autem parte detracta, laxabit ſe rurſus inſtrumentum. Quod ſi artificio tali conſtructum ſit, ut tam progreſſus, quam regreſſus diſtinctim animadverti poſſit, ope forte dentium ſingulariter; non turbabitur æſtimatio, etiam reimmiſſione, dicique poterit, quantum ablatum, quantum redditum ponderis. Gravitas tamen ſpecifica liquoris hinc agnoſci nequit, ſed mutatio tantum ponderis columnarum. Hactenus ergo præſtari deſideratum poteſt, ſed neſcio an magno fructu; cum etiam in vaſis amplioribus non ſit notabilis variatio altitudinis, multo licet liquore exhauſto. Alium uſum habere poſſet talis machinula, fortaſſe pro Barometro portatili, quale olim animo concepi; nam integra noſtra athmoſphæra dolii inſtar ſe habet. Volebam autem adhiberi folliculum clauſum, qui & comprimeretur & dilataret ſe ſe, pro pondere aeris aucto, vel diminuto. Nomen etiam horologiarii illius *Galli* † diſcere non ingratum erit.

Interroga, quæſo, Dominum Varignonium de progreſſu Aſtronomiæ apud ipſos, & præſertim quouſque producta ſit methodus calculandi Eclipſes, & an Dnus La Hirius ſuas Tabulas abſolverit, & quid ſentiatur de lineis quas Dnus. Cassinus voluit ſubſtituere Eclipſibus *Keplerianis*, quarum tamen novarum linea-

† *Hujus ſcilicet, qui* Oinometrum *invenit, quod* Varignonius *cum* Bernoullio *communicavit. Hujus nomen* Langlois Vid. Epiſt. LXXVI, LXXVIII., & LXXX.

lineãrum cauſas Phyſico-mathematicas dare difficile erit, quas nobis utique facilius præbent Ellipſes. 1698 Jun.

Memini & Hugenium olim demonſtrationem Tautochroniſmi Cycloïdis *Pardieſianam* non magni facere. Ea, quæ in *Tranſactionibus Anglicanis* olim a me viſa potius eſt quam examinata, Vice-Comitis Brounkeri erat; de qua judicat Hugenius, ob nimiam brevitatem ſupponi quædam, nec ſatis abſolvi demonſtrationem, etſi inſint argumenta unde abſolvi ipſa poſſit. Tua ratio demonſtrandi mihi videtur perelegans & commendanda imprimis.

Quæri etiam ex Domino Varignonio utile erit, quo ſit loco emendatio Geographiæ, & annon aliquis reſponderit, aut reſponſurus ſit Vallemontio [Auctori libri *de virgula divinatoria*] qui nuper in *Elementis Hiſtoriæ* agens de Geographia, *Iſaaci*que Voſſii ſecutus ſententias, impugnat novam Geographiam, & præſertim correctiones, quas dedit Academia Scientiarum Regia; male quidem, cum illo, improbans uſum obſervationis Eclipſium Lunæ aut Satellitum Jovis pro conſtituendis locorum longitudinibus, alia tamen fortaſſe monens notatu digna. Nam Voſſius, quem ſequitur, erat in Geographia valde verſatus, habueratque in manu itineraria ſocietatis Indicæ Batavæ, & varia etiam Hodoeporica aut Diaria Itinerum Anglicana nondum edita, quemadmodum mihi Boylius olim confirmavit. Accepi etiam Samsonium, doctum apud *Gallos* Geographum, Tabulis ex Academiæ Regiæ ſententia concinnatis contradicere. Ego non dubito præferre judicium Academiæ in rebus primariis; puto tamen inventorum Voſſii & Samsonii aliquam fortaſſe rationem alicubi habendam. Cassinus alicubi dixit, Regem miſiſſe Aſtronomos *Alexandriam*, ut Obſervationes illic inſtituant comparandas cum obſervationibus Ptolemæi. Scire oportet operæ pretium eſſet, quid illi attulerint.

Dominus *Abbas* Bignonius collegium quoddam inſtitui curavit, cujus membra occupantur deſcriptionibus variorum opificiorum; quod ego inſtitutum perutile eſſe judico, & noſſe velim quem habuerit progreſſum. Vel ſola deſcriptio manuficiorum ad rem veſtiariam pertinentium rem mathematicam plurimum augeret.

1698 Jun. Conſcripſerat olim Dominus MARIOTTUS libellum mechanicum in uſum Ingeniariorum, in quo proponebat experimenta ad praxim utilia; verbi gratia, quantum pondus ſuſtineant tigna, ſcalæ, ſaxa, aliaque id genus. Libellus iſte nunquam fuit editus, quod Auctor morte præventus eſſet; non dubito tamen quin in nonnullorum verſetur manibus. Si poſſet impetrari, ego libenter ſumptus perſolverem.

Optime facis, & ex condigno, quod novam differentiandi rationem per ſummas differentiuncularum premis, quod ſi forte urgeat Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS, poteris eum remittere ad me. Miror eum tam inæquali ratione cum amicis agere, ut nunc magni eos facere, nunc eorum oblivisci videatur. Dominum *Fratrem* Tuum præſtat ad alia potius quærenda adhuc flecti; nam ſi detegeret, fortaſſe ſtatim in lucem protruderet, ut fecit in Methodo directa pro lineis maximum præſtantibus, quam alias fortaſſe nondum noſſet Dnus. HOSPITALIUS.

In Dno. VARIGNONIO laudandum eſt, quod agnoſcere videtur quantum Tibi debeat, officiiſque id teſtari pergit....... .... Agnoſco ex ejus reſponſione, Te quædam ad ipſum ſcripſiſſe profunda & ingenioſa de corporibus varie infinitis. Videor mihi intelligere mentem Tuam, ſæpeque de iſtis deliberavi, ſed nondum tamen adhuc pronuntiare audeo. Fortaſſe infinita, quæ concipimus, & infinite parva imaginaria ſunt; ſed apta ad determinanda realia, ut radices quoque imaginariæ facere ſolent. Sunt iſta in rationibus idealibus, quibus velut legibus res reguntur, etſi in materiæ partibus non ſint. Quod ſi ſtatuimus lineas reales infinite parvas, conſequitur etiam ſtatuendas eſſe rectas utrimque terminatas, quæ tamen ſint ad noſtras ordinarias, ut infinitum ad finitum; quo poſito, ſequitur eſſe punctum in ſpatio, ad quod hinc nullo unquam tempore aſſignabili per motum æquabilem perveniri poſſit; oportebitque ſimiliter concipere tempus utrimque terminatum, quod tamen ſit infinitum, atque adeo dari quoddam genus æternitatis, ut ſic dicam, terminatæ; ſive poſſe aliquem vivere ita ut nullo unquam aſſignabili annorum numero moriatur, & tamen aliquando moriatur; quæ omnia ego, niſi indubitatis demonſtrationibus coactus

coactus, admittere non auſim. Reale infinitum fortaſſe eſt ipſum abſolutum, quod non ex partibus conflatur, ſed partes habentia, eminenti ratione, & velut gradu perfectionis comprehendit. Si daretur aliquid perfecte rigidum, & perfecte æquabile, haberentur ſane, quæ nos concipimus in noſtra Geometria; ſed vereor ut natura hæc patiatur. 1698 Jul.

Interim laudo ingenii Tui vim ad abſtruſiſſima eruenda promtam. Si quando colloqui dabitur, fortaſſe multa adhuc mira circa rerum ſummam & principia a me audies, quæ habeo pro demonſtratis. Nunc Vale & Fave. Dabam Hanoveræ.

7. Junii 1698.

Deditiſſimus.

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA LXXIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Vinometro duplici ratione conficiendo. De Thermometris calorem præteritum indicantibus. De Geographia. De TSCHIRNHAUSIO *&* MENCKENIO. *Solutionum ſuarum Problematis Iſoperimetrici communicatio. De infinitorum ordinibus. De ejuſdem corporis reſurrectione controverſia. De itinere ſuo in Bataviam. De* VOLDECO. *De Logogripho* Hugeniano, *ejuſque Coſmotheoro.*

Vir Ampliſſime & Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

POſtremas Tuas accepi, cum nuper in *Batavis* eſſem, ad quos animi gratiâ trajeceram, ut ibi partem feriarum tranſigerem. Placet modus, quem excogitaſti, parandi Vinometrum per elaſticitatem aëris; ſed neſcio an in praxi tam utile eſſet, quam in theoria ingenioſum; quomodo enim dentes adaptares inſtrumento, ut

 laxa-

Digitized by Google

1698 Jul. laxationes & conſtitutiones aëris oſtenderet? præterquam quod, ut ipſe animadvertis, multo liquore detracto, columnarum altitudo notabiliter non minuitur. Hoc cum legerem, ſtatim mentem ſubiit, an non melius intentum obtinere liceret, ope phialarum liquore ſemi-plenarum, quibus Boylæus, ni fallor, primus oſtendere ſolebat preſſionem columnarum. Ita ergo phialæ exempli gratia, (*Fig.* 76.) quatuor A, B, C, D, parari poſſent, ut, dolio exiſtente pleno, omnes demerſæ hærerent in fundo, detracto vero liquore, exempli gratia uſque ad $\alpha\alpha$, tunc phiala prima A [aëre in illa, ob diminutum pondus columnæ, ſe ſe expandente & liquorem per orificium apertum expellente] jam levior facta, ſurſum peteret, reliquis B, C, D, ob gravitatem adhucdum præpollentem in fundo manentibus; ſin autem porro liquor ex dolio emitteretur ad $\beta\beta$, tunc B aſcenderet; ſic ſubſidente ad $\gamma\gamma$, emergeret C, & tandem ubi ad $\delta\delta$ perventum eſſet, emitteretur D. Redimpleto dolio phialæ in ſuperioribus natabunt, nec fundum repetent, niſi vi eo detrudantur. Pronunciaturus itaque quantum liquoris ante redimpletionem fuerit exemtum, reſpicerem tantum ad numerum phialarum in ſummo natantium; Exempli gratia, A, B, C, unde concluderem tantum ad minimum fuiſſe exhauſtum, quantum continetur in ſpatio $\gamma S \gamma$. Interim quo minores eſſent differentiæ columnarum cum quibus phialæ ſunt æquilibratæ, & quo plures eſſent talium phialarum, eo accuratius detracti quantitatem explorare poſſemus. Poſtea alii modi idem præſtandi, ſine elaſticitate aëris, mihi inciderunt, e quibus duos hic apponam, qui effectu faciles mihi videntur.

TAB. XIV. [beside "gratia, (Fig. 76.)"]

TAB. XIV. Concipe (*Fig.* 77.) tubum recurvum A, ab utraque parte apertum, & liquore plenum, ita immitti in dolium plenum, ut orificium cruris brevioris pertingat, exempli gratia, ad ſuperficiem imaginariam $\alpha\alpha$: jam finge detrahi aliquid liquoris ex dolio; patet utique, quod quamdiu orificium cruris brevioris intra liquorem latet, tamdiu totus tubus plenus manebit, ſed ſtatim ac liquoris ſuperficies intra orificium ſeu intra ſuperficiem imaginariam $\alpha\alpha$, ſubſiderit; tunc omnis liquor, qui in eminenti parte tubi exiſtit, per crus longius deſcendet, aëre in ejus locum per crus brevius ſuccedente;

te; qui aër, licet dolium poſtea omnem ſuum liquorem ad ſummitatem uſque reſumat, cum neutrorſum evadere poſſit, in tubo manere cogitur: hinc ſi plures tales tubos recurvos A, B, C, D, quorum orificia crurum breviorum gradatim aſcendant, in dolium immiſeris; poteris iterum judicare, ex numero tuborum aërem continentium, quouſque dolium depletum fuerit; vel ſi malueris loco tot tuborum aſſumere unicum tubum rectum F E inſtructum pluribus ramulis inflexis *a*, *b*, *c*, *d* per minima intervallula a ſe diſtantibus, eundem uſum obtinebis. Illi enim ramuli, qui ſemel a liquore evacuati ſunt, poſt redimpletionem dolii, retinebunt in flexuris ſuis ampullas aëreas. Infimus ergo ramulus, tali ampulla conſpicuus, indicabit quouſque dolium fuerit exhauſtum. *1698 Jul.*

Ecce jam alterum inſtrumentum, quod mihi in mentem venit. AB, (*Fig.* 78.) tubus eſt utrinque apertus, multos habens varices, ſeu tumores excavatos, æmulantes venarum valvulas, quem liquore plenum, [poterit autem facile impleri ſi invertatur & obturato A per B. infundatur], immitto in dolium liquore pariter plenum. Jam, ſi tantum liquoris ex dolio effluxerit, ut ejus ſuperficies ſubſiderit ad *αα*, adeoque etiam omnis liquor, qui in parte tubi eminente A *b c* extitit, deſcenderit, illamque totam cavitatem aër ſuccedens impleverit; manifeſtum utique eſt, ob affuſum novum liquorem, quo dolium redimpletur, totum quidem tubum AB etiam redimpletum iri, relictis tamen aëre plenis omnibus illis varicibus, qui ſupra *αα* exiſtunt; cum enim varicum convexitates ſurſum ſpectant, aër qui ſemel in illos ſe recepit a liquore amplius expelli nequit. Ergo & hoc modo infimi varices *b*, *c*, aërem continentes, monſtrabunt quouſque dolium fuerit evacuatum. TAB. XIV.

Hujuſmodi Tubus varicoſus etiam alibi uſum obtinere poteſt, exempli gratia, ad Thermometra conficienda, quæ non ſolum præſentem aëris temperiem, ſed etiam præteritam oſtenderent, & ſimul limites caloris & frigoris. Ut ſi obſervator medio Aprilis [quo tempore, ceu notum, aëris temperies maxime variabilis] certo quodam die explorare vellet maximum & minimum gradum caloris aëris, ſeu quantum aër mutari potuerit intrà 24 horas; certe continua obſervatio 24 horas durans, tædioſiſſima eſſet; imo etiam

1698 Jul. inutilis, quia experientia docet præſentia hominum, eorum ſcilicet halitu & continua tranſpiratione inſenſibili, aërem ambientem alterari, ideoque liquorem in Thermometro plus juſto deſcendere. Huic igitur duplici incommodo remederi licet, ſi duo nobis comparemus thermometra, ordinariis ſimilia, excepto quod habeant tubos varicoſos, unius varicibus ſurſum (*Fig.* 79.) & alterius varicibus deorſum (*Fig.* 80.) ſpectantibus. Illud enim (*Fig.* 79.) obſervatori, licet per totum diem abſenti, & ſub finem tantum diei obſervatum redeunti, oſtendet maximum deſcenſum liquoris, id eſt maximum gradum caloris, quem aër illo die habuit; id quod arguere poterit ex infimis varicibus *a*, *b*, aërem includentibus: alterum vero (*Fig.* 80,) determinabit maximum aſcenſum liquoris, ſeu maximum gradum frigoris varicibus nempe ſummis *c*, *d*; pauxillum liquoris retinentibus. Dum hæc ſcribo video non opus eſſe duobus thermometris, unum enim utrumque præſtare poterit, ſi nempe conſtet tubo contrarios habente varices, ut heic delineatum vide (*Fig.* 81.) Cæterum, hoc modo explorare poſſemus limites intenſiſſimi frigoris & ferventiſſimi æſtus totius anni; ſed talis eligendus eſſet liquor, qui in varicibus *c*, *d*, ob modicam quantitatem non exſiccaretur.

TAB. XIV.

Quæ me ex Dno. VARIGNONIO quærere jubes, curabo diligenter, ut ad notitiam perveniant Tuam. Ego etiam legi, quæ VALLEMONTIUS de Geographicis habet, videtur ideo imprimis impugnare correctiones Academiæ ſcientiarum, ut tanto liberius depectere poſſit, ſuum popularem DE FER, cujus Tabulas iſtis correctionibus fundatas [ut ait] turpiter traducit. Maximum argumentum quo nititur, eſt quod dicit, longitudinum differentias per Eclipſes determinatas ſemper juſto minores eſſe, teſte experientia, quam refert de certamine *Hiſpanorum* & *Portugallorum*, quorum utrique *Japoniam*, aliaſque regiones circa *lineam demarcationis* ſitas, in ſuum Hemiſphærium, à Papa utriſque aſſignatum, tranſtulerunt Eclipſibus nixi.

Gaudeo meam rationem demonſtrandi Tautochroniſmum *Hugenianum* * Tibi placere: ſcire vellem an lucem viderit, aut quid de

* Act. Erud. 1698. Jun. pag. 267. vel Opp. Tom. I. N°. XLIV. pag. 248.

de ea fecerit Menckenius: ſi ſuppreſſerit, per me licet, modo id non feciſſet ſuaſore Tschirnhausio: hunc enim pro Judice meo non agnoſco. Miror ſane Dnum Menckenium tantum deferre huic Viro ad lapſum adeo proclivi, ut propterea aliorum inventa nihili habeat. 1698 Jul.

Si Dnum Hospitalium novam differentiandi rationem denuo forte poſtulantem ad Te remiſero, quid quæſo ipſi reſponſurus es? Propoſui * ***Fratri*** meo, aut potius ***Non nemini*** ficto, hujuſmodi Problemata, ut par pari referam, & ille videret, ſe non ſolum tam mirabilia & tam inaudita Problemata proponere poſſe.

Ecce hic methodum meam, tum directam quam indirectam †; examina quæſo attente utramque, nunquam enim deſiſtam provocare ad Tuam ſententiam. Videbis me uti ellipticula, prout initio conceperam: Aſſerva, rogo, ſchediaſma, ut, ſi forte opus fuerit, ***Lipſiam*** id mittere poſſis, ***Actis*** inſerendum: Divinare me hercle non poſſum, quid ***Frater*** in meis ſolutionibus ſit cavillaturus, conſenſu duarum Methodorum tam egregie confirmatis, oportet ſane ut ejus ſolutiones, ſi a meis abludunt, potius ſint falſæ, ſed Tu ipſe optime judicabis.

Prope ſatis acceſſiſti ad mentem meam de varietate infinitorum; nec ego infinitos infinitorum gradus pro certo aſſerui; ſed conjecturas tantum addixi, quibus rem poſſibilem & probabilem eſſe ſtatui. Et quidem rationem præcipuam hujus eſſe, quod nulla ſit ratio, cur Deus hunc tantum infinitatis gradum, ſeu hoc quantitatum genus, quæ noſtra faciunt objecta, noſtroque intellectui proportionata, voluiſſet exiſtere; cum tamen facile concipere poſſim, in minimo pulviſculo poſſe exiſtere Mundum, in quo omnia proportionata ſunt huic magno, & contra noſtrum mundum nihil aliud eſſe quam pulviſculum alius infinities majoris; atque conceptum continuari poſſit, aſcendendo & deſcendendo, ſine fine: unde noſtrum genus quantitatum unicum tantum ex infinitis gradibus efficere; nihil autem eſſe, quod mihi perſuadeat hunc potius debuiſſe exiſte-

* Journal des Savans 1698. 25. Journ. du 21. Avr. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLII. pag. 220.

† *Mem. de l'Acad. Royale des Sciences de Paris.* 1706. pag. 235. vel Opp. Tom. I. N°. LXXV, pag. 424.

1698 Jul. exiſtere quam alium; quicquid enim afferri poteſt, illud applicabile foret ad quemvis alium gradum. Ita ſi, exempli gratia, concipiam in globulo aëreo mundum formatum, partes habentem noſtris hiſce proportionatas, Solem, Stellas, Planetas, Terram cum ſuis incolis, omneſque cæteras quantitates eadem ratione; nempe quod nobis tempuſculum unius ſecundi eſt, illis foret ſeries multorum ſeculorum, & ita de aliis. Interim hos homines iiſdem argumentis uti poſſe ad probandos ſe ſolos eſſe, ſuum mundum infinitum eſſe, nihil extra ſe exiſtere. Sed abrumpo, plures paginæ mihi non ſufficerent, ſi deliria mea ſuavia, quibus interdum per infinitates illas velificor, hic omnia recenſere vellem. Cavebo tamen mihi, ne talia tangam apud Theologos quoſdam hujus Civitatis, omnium libere philoſophantium oſores; haud dubie me ad rogum ablegarent, ſi tantas hæreſes à me audirent: ut nuper fere mihi accidit in Diſputatione Philoſophica publice ventilata; ubi cum incidenter quæſtio moveretur de ſtatu corporum noſtrorum poſt reſurrectionem, & ego dicerem, eodem numero corpora non reſurrectura, quia durante vita ſingulis momentis alterentur, ita ut forte Corpus noſtrum minimam nunc partem ſubſtantiæ habeat ejus, quam ante annum habuit; unde impoſſibile eſſe nos reſurrecturos, cum omni illa ſubſtantia, quæ olim, ſucceſſive, noſtrum corpus compoſuerit; niſi velimus ſtatuere Giganteam molem tunc nos habituros. Quid autem fit! Paſtorculus quidam, cui vox eſt prætereaque nihil, bruto zelo animatus, ſubito contra me inſurgere, meamque ſententiam protinus criminari, exagitare, explodere, & ut Orthodoxæ Religioni adverſantem damnare & execrari; præterea in Philoſophos novatores [ut vocat] tam inepte, tam inſulſe debacchari, ut illum phræneticum catenis ligandum dixiſſes, ſi vidiſſes. Nec hoc ſufficit, Urbem totam rumore implet, me eſſe Socinianum, me docere novam creationem novorum corporum in Reſurrectione, & neſcio quot alias ineptias mihi imputat, quæ nunquam in mentem mihi venerunt; reliquis interim Theologaſtris undique concurrentibus, ſeque mutuo fideliter ſuccurrentibus. Subſequenti Dominica, ſuggeſtus omnes ad Populum reſonabant, intonantes horribiliter contra Philoſophos ſeductores ſtudioſæ Juventutis,

tutis, [ita nos traducunt] & ſubverſores revelatæ veritatis. Necdum quieſcunt, aperte, & clanculum contra me machinantur quidquid poſſunt; mugit adhuc ſurdus tonitrus, perderent me, ſi per illos ſtaret. Sed *vanæ ſine viribus iræ*; irrideo eorum imbecilles conatus, mecumque rident quicunque ſolidiori judicio pollent: ſunt etiam Theologi ſanioris mentis & profundioris eruditionis, qui ſuorum Collegarum cæcum impetum maxime improbant; habeo etiam ſuperioris ordinis Patronos, qui meas ſuſtinent partes: unde nihil mihi timeo; interim magna cum confuſione Theologaſtrorum, 1698 Jul.

. . . . . *Superi riſere diuque*
Hæc fuit in toto notiſſima fabula cœlo.

Cum nuper *Leidâ* tranſirem, Volderum conveni ſæpius, iſque me ſemel ad prandium invitavit; ubi etiam aliorum aliquorum Profeſſorum *Leidenſium* notitiam & familiaritatem nactus. Intererat convivio Dnus. De Blyswick *Delphenſium* Conſul, & Academiæ *Leidenſis* Curator, Vir affabilis & generoſus, bonorumque ſtudiorum inſignis amator & Mœcenas; qui a Te ſubinde litteras accipere mihi dixit: magni Te æſtimat, ſuaque officia ultro mihi obtulit, ſi quondam occaſio dabitur. Vidi præterea illum aliquoties apud alios Profeſſores; ſenſi illum ſummum eſſe Tui admiratorem. Volderus ſub diſceſſum meum proponebat mihi difficultatem contra Calculum infinitorum, quam ſibi ſe eximere non poſſe, neque à Nieuwentitio, cui dudum eamdem propoſuerat, hactenus enodationem accepiſſe rebatur; rogans ut ego ſibi ſuper hac re ſatisfacerem; quod etiam libenter promiſi, me ſcilicet ſatisfacturum, ſtatim ac huc redux factus eſſem, & revera nudius tertius ſolutionem ipſi miſi. Intellexi quoque quod à Papini parte ſtet circa æſtimationem virium; dicens a Te gratis ſupponi corporum elaſticitatem; hanc enim corporibus tantùm eſſe accidentalem: ſi corpora perfecte dura ſupponantur, Tua ratiocinia amplius locum non habere; duritie perfecta ſuppoſita, ſequi, exempli gratia, quod duo corpora æqualia, & æquali celeritate ſibi mutuo centraliter concurrentia, non debeant reflecti, ſed ſiſti in ipſo momento occurſus; & quod generaliter corpora duo perfecte dura, cujuſcunque molis & cujuſcunque celeritatis, poſt confli-

Digitized by Google

1698 Jul. ctum ſeparari non debeant; quia ſeparatio proveniat ab elaſticitate, quam autem ſeponendam dixit. Ego vero, cum temporis anguſtia non permiſerit illum ab opinione ſua deflectere, hactenus ipſi promiſi copiam excerptorum ex litteris Tuis meiſque, hac de materia agentibus, ut videat quid me impulerit ad amplectendum Tuas partes. *Haga-Comitum* vidi Dominum DIERQUENS, Præſidem in *Curia Brabantiæ*: etiam hic multa civilitate me affecit. Dominus BELLAVALLIUS mihi oſtendit Logogryphum aliquod, ſibi a Dno. HUGENIO, dum viveret, depoſitum, ſuo tempore clavem miſſuro: morte autem occupatus id non præſtitit. Dnus. DIERQUENS, & ego ipſi conſuluimus, ut ederet quale accepiſſet. Nactus ſum *Hagæ Coſmotheoron* HUGENII recenter prælo enixum. Vale & fave.

Groningæ 5. Julii. 1698.

Amplitudini Tuæ Devotiſſimus

BERNOULLI.

EPISTOLA LXXIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM

Reſponſio ad præcedentem.

Præcedentem Epiſtolam amiſſam nunciat. De VOLDERO. *De Materiæ natura. De infinito. De* HUGENII *Poſthumis. De Geographia.*

Vir celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1986 Jul. A deprecatione, [quod mireris] cogor incipere litteras. Infelicitate quadam ſingulari, non ſine culpa tamen mea, Tuæ noviſſimæ periere. Cum acciperem, in eo eram ut *Herrenhuſam* irem, ubi Aula noſtra eſt extra urbem, quod altera die ſummo mane diſceſſura eſſet Electrix *Brandeburgica*, Aulaque *Cellenſis*. Tuas igitur obiter inſpectas mecum ſumo, lecturus in itinere. Forte ſuperve-

Digitized by Google

perveneře, quæ alio verterent mentem; ſub noctem reverſus recordatuſque requiro, & magna cum perturbatione nuſquam reperio. 1698 Jul.
Quæſivi anxie, præmium etiam reperturo ſponderi juſſi; hactenus fruſtra. Oportet ſacculo excidiſſe, qui togæ aſſutus eſt; forte dum egredior, ingrediorve currum. Cum igitur nihil aliud relictum ſit mihi, quam ut ad veniam a Te petendam recurram; pro gratiæ factæ indicio habebo, ſi denuo ad me redeant, quæ amiſi. Schediaſma enim Tuum ſolutionem Fraterni Problematis complexum, videram, non legeram; ſed & quæ de machinulis Barometris, occaſione Oenometri *Pariſini* meæque deſignationis, diſſerebas, inſpecta magis fuere, quam lecta, quod figurarum conſideratione eſſet opus.

Gaudeo innotuiſſe Tibi Dominum de Bleswick, Conſulem *Delphenſem* & Curatorem *Leidenſis* Academiæ, Virum præclarum. Quod Dnus. Volderus de Calculo differentiali dubitat, magis miror, quam quod de virium æſtimatione a nobis diſſentit. Ego ipſe olim adoleſcens, cum de Legibus motus ſcriberem Libellum, in ea eram ſententia, quæ nunc eſt Dni. Volderi, duo Corpora æqualia & æquivelocia ſua natura poſt concurſum directum non debere reflecti, ſed potius ſe ſiſtere mutuo. Idque etiam ſequitur ex vulgari notione materiæ, cum nempe nihil aliud in ea concipitur, quam extenſio & ἀντιτυπία ſeu impenetrabilitas. Sed, ex his ipſis & ſimilibus, poſtea agnovi longe aliam eſſe naturam materiæ in ſyſtema mundi redactæ quam vulgo creditur; & vim elaſticam omni corpori eſſe eſſentialem, non ita quaſi ea vis ſit aliqua qualitas inexplicabilis, ſed ex eo quod omne corpus, utcumque parvum, eſt machina, ex cujus ſtructura reſilitionem, ubi opus ea eſt ad virium conſervationem, oriri oportet. Hæc autem mira videri non debent conſideranti actualem cujuſque materiæ partis diviſionem in partes omnem numerum excedentes. Hæc an, cum multa a me ſalute, Dno. Voldero ſignificare velis, in Tua eſt manu. De cætero rem gratam facies, ſi communicabis quæ Dno Voldero ſcripſiſti, ſcribeſve, aut ab illo recipies.

Mirum non eſt Dnum. Nieuwentiit ipſi non ſatisfeciſſe circa Calculum differentialem, quem ab eo ipſo non ſatis profunde pene-

1698 Jul. penetratum conſtat. Cujus rei indicium fuit, quod nihil de ſuo potuit præſtare; an nunc magis profecerit, res docebit.

Si Dnum. *Marchionem* HOSPITALIUM novam Methodum differentiandi poſtulantem, ut æquum eſt, ad me remittas, iſque, quod vix facturum credo, apud me pulſet, deliberandi adhuc locus erit.

Ex actuali diviſione ſequitur, in quantulacunque parte materiæ, velut mundum eſſe quemdam conſtantem ex innumeris creaturis; ſed illud adhuc quæritur an ulla uſquam portio detur materiæ, quæ ad aliam portionem habeat rationem inaſſignabilem, ſeu an detur linea recta utrinque terminata, ſed quæ tamen ad aliam rectam habeat rationem infinitam, vel infinite parvam. In Calculo hæc utiliter aſſumimus; ſed hinc non ſequitur extare poſſe in natura. Res igitur altioris eſt indaginis.

Nihil ne apud *Batavos* intellexiſti de edendis *Poſthumis* quibuſdam elaborationibus *Hugenianis*, præſertim *Coſmotheoro* per ſidera ambulante, quem abſolutum aut pene abſolutum acceperam; itemque de *Dioptrica* dudum promiſſa.

Gratiſſima aliquando erunt, quæ, ut ſpero, ad Quæſtiones meas, Te parario, reſpondebit VARIGNONIUS. Ego quidem *Iſaaco* VOSSIO & VALLEMONTIO longitudinum determinationem per Eclipſium obſervationes factam impugnantibus minime omnium aſſentior; fieri tamen poteſt, ut ab Obſervatoribus ad loca remota tendentibus errores graves ſubinde ſint admiſſi, & memini *Anglos* fidem derogare Obſervationibus quibuſdam Jeſuitarum *Gallorum* ad *Siamenſe* regnum ante annos aliquot tendentium. Talia ergo cum ſint facti, diligentem merentur diſcuſſionem. Quod ſupereſt Vale & Fave.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{12}{22}$ Julii 1698.

Deditiſſimus
G. G. LEIBNITIUS.

Reſponſio ad hanc Epiſtolam deeſt.

EPIS-

EPISTOLA LXXV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Continet Reſponſionem ad Epiſt. LXXIII.

De virium conſervatione. De infinitorum natura difficultas. An infinitæ quantitates dentur. De Oenometro. De Tschirnhausio. *De Iſoperimetris. De ſignis algebraïcis. De linea breviſſima in ſuperficie curva.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

DOleo me cauſam Tibi fuiſſe innocentem laboris ingrati; ſperabam ab alio deſcribi poſſe, quod iterum mitteres. Cum nemo hic curioſitates valde curet, credo ad me rediiſſent litteræ, niſi fuiſſent conculcatæ aut dilaceratæ. 1698 Jul.

Ut Celeberrimo Voldero circa vim elaſticam ſatisfiat, non eſt opus recurri ad animas, aut formas, aut ſpiritus; nam his ſepoſitis ſufficit, ut jam in præcedente Epiſtola notavi, tale eſſe Syſtema rerum, uti materiæ portio quantumvis exigua, ab alia adhuc ſubtiliore perlabente, mechanicam ſe ſe a flexu reſtituendi cauſam accipiat, quantum opus eſt ad obſervandas noſtras motus Leges; atque ita vis elaſtica erit corpori omni eſſentialis, ex Syſtematis ſtructura. Nec magis nos conſervationem potentiæ, quam *Carteſianos* conſervationem producti ex mole in velocitatem ſtatuentes, recurrere neceſſe eſt ad aliquid altius; neutra enim ex ſola extenſione & impenetrabilitate duci poteſt; ad Dei autem hic voluntatem recurrere cum Cartesio parum Philoſophicum eſt. Et quocunque modo æſtimemus eam, quæ ſervatur, potentiam; concluditur ex eo quod vis vel actio non perit, aliud eſſe in corpore quam illa duo, extenſionem ſcilicet & impenetrabilitatem; nam alias, ut in præcedente Epiſtola mea notavi, duo corpora æqualia directe ſibi occurrentia ſe ſiſterent mutuo, aliaque multa contingerent prorſus & ab experimentis & a rationibus etiam aliena, quæ

 ſcilicet

1698 Jul. ſcilicet ex ſimplici compoſitione conatuum geometrica neceſſitate conſequerentur, ut alicubi explicare memini, in *Diario Eruditorum Gallico*, & jam olim in *Theoria motus*, † quam Juvenis publicavi.

Quod vero Dominus VOLDERUS nobis objecit, ***nos ita cogi ad aliquid in corpore ſtatuendum, quod concipere non poſſimus***; bene a Te reſponſum eſt ſufficere, quod experientia nos cogat ad admittendum aliquid, præter extenſionem & impenetrabilitatem, ſive id concipi a nobis poſſit, ſive non. Porro ut oſtendat rem non poſſe concipi, quærit, ***utrum id quod præter extenſionem & impenetrabilitatem admittimus, ſubſtantia ſit aut modus***? additque, ***ſi modus ſit, nihil futurum eſſe novi; ſi ſubſtantia, ſpiritum fore, aut corpus, aut tertium, & hoc tertium non poſſe explicari, niſi cum Veteribus ad formam ſubſtantialem dudum*** [ipſius judicio] ***exploſam recurrere velimus.*** Sed quærere viciſſim liceret, quam aſſignet definitionem ſubſtantiæ vel modo; præterea dantur, quæ nec ſubſtantiæ ſunt, nec modi, ut attributa primitiva; ſic certa magnitudo eſſentialis eſt datæ materiæ; & ita non eſt modus, ut ſunt figura, vel motus; & tamen magnitudo non eſt ſubſtantia, ſed attributum: Nec noſtra refert, utrum id quod ſtatuimus, ſit ***novum***, modo ſit ***verum***. Cum etiam quæritur ***an dari poſſit ſubſtantia, quæ nec ſit ſpiritus, nec corpus***; rurſus definitione opus eſt, qua fortaſſe cum illo non convenimus: nam ipſe corporis eſſentiam in extenſione collocabit, ego aliquid aliud poſtulo. Si ſpiritum omnem cogitatione & intellectu præditum cenſet; ego animas, formaſve exiſtere putabo, quæ ſpiritus non ſint. Nec video quid impediat varios eſſe Monadum gradus, ut aliæ intellectu ſint præditæ, aliæ inferiores ſenſu. Itaque, ſi formas ſubſtantiales ut res animabus analogas concipiamus, dubitare licebit, an jure ſint exploſæ.

Rectiſſime etiam ſolviſſe mihi videris Viri Clariſſimi Objectionem, ſane peringenioſam & elegantem, contra Calculum infiniteſimalem; nempe revera infinite parvum longiſſime abeſt a nullo. Et cum æquatio ad Hyperbolam eſt $xxy = a^3$, patet x poſita infinite parva,

† *Nova hypotheſis Phyſica, qua Phænomenorum naturæ plerorumque cauſæ ab unico quodam univerſali motu in Globo noſtro ſuppoſito reperiuntur: ſive Theoria motus abſtracti & concreti.* Moguntiæ 1671. 12°.

va, nempe primi gradus, eſſe y ad a ut aa ad xx, adeoque y 1698
eſſe infinitam, non ſimplicis, ſive primi, ſed proxime altioris, hoc Jul.
eſt, ſecundi gradus; quod ſecus eſt in Hyperbola ſimplice, ubi y eſt ad a ordinariam, ut eadem ordinaria a, ad infinite parvam primi gradus x. Cognatam objectionem ipſe formavi olim mihi in *ſcholio Propoſitionis* 22 Tractatus inediti, quem in Gallia *De Tetragoniſmo meo Arithmetico*, paulo poſt inventionem ejus concripſi; ubi apparet, objectionem non tantum noſtrum Calculum, ſed & Geometriam jam antea receptam pari jure ferire. Nempe demonſtraveram [*Prop*: 18.] *in figura Analytica ſimplice* (*Fig*.82.) [ſic
vocabam eas, quarum æquatio relationem continens ordinariam inter ordinatam & abſciſſam, nonniſi duobus membris conſtat, quales TAB. XV.
ſunt Paraboliformes & Hyperboliformes, ſeu ubi quædam dignitates abſciſſarum ſunt, ut quædam dignitates ordinatarum] *zonam* $1C1B2B2C1C$ *eſſe ad zonam conjugatam* $1C1G2G2C1C$, *ut exponens dignitatum ab ordinatis* BC, *eſt ad exponentem dignitatum ipſis proportionalibus ab ordinatis conjugatis, ſeu abſciſſis* GC *vel* AB. Unde in Hyperbola conica zonæ ſunt æquales; in ea vero Hyperboloïde, quam Antiparabolam vocare poſſis, ubi ordinatæ ſunt reciproce, ut quadrata abſciſſarum, erit zona ad zonam conjugatam, ut 1 ad 2, & ita porro. Hinc talis naſcitur difficultas, etiam in ipſa Conica Hyperbola: Zona $3C3B2B2C3C$ æqualis eſt zonæ conjugatæ $3C3G2G2C3C$, &c. & zona $2C2B1B1C2C$ ipſi conjugatæ $2C2G1G1C2C$, & ita porro; ponendo zonas illas ſemper lineis terminatis eſſe comprehenſas: Et ita ſemper quodlibet tale ſpatium horizontale æquabitur reſpondenti verticali. Jam omnia quadrilinea horizontalia in infinitum uſque ad A complent ſpatium infinitum quadrilineum $3C3BA$ *&c.* $3C$, & omnia verticalia illis reſpective conjugata & æqualia in infinitum, complent ſpatium infinitum trilineum $3C3G$ *&c.* $3C$: Ergo hæc duo ſpatia infinita ſibi ſunt æqualia, pars toti, quod eſt abſurdum. Exceſſus enim prioris ſuper poſterius eſt rectangulum $A3B3C3G$. Reſpondi multum abeſſe, uti indiviſibile, ſeu nullum in magnitudine, ab infinite parvo, ita interminatum ab infinite magno; neque ſermonem hic fieri debere de ſpatio abſolute interminato, velut $3C$

$3B$

Digitized by Google

1698 Jul. $3BA$ &c. $3C$, rectis finitis $3C3B$, $3BA$, & Aſymptota interminata A &c. & curva interminata $3C$ &c. comprehenſo, vel quaſi; neque adeo ultimam abſciſſam AoB accurate loquendo eſſe nullam, quaſi o incideret in A, nec ultimam ordinatam $oBoC$ eſſe interminatam, quaſi $oBoC$ incideret in Aſymptotam; ſed AoB eſſe infinite parvam, & $oBoC$ eſſe infinite magnam, ſed terminatam; inter quas media proportionalis ſit ordinaria quantitas, latus ſcilicet quadrati conſtantis, quod æquatur rectangulo cuicunque $ABCG$, atque adeo & rectangulo $AoBoCoG$, quod eſt longitudinis infinite magnæ, & altitudinis infinite parvæ. Atque ita ceſſat objectio, neque enim duo ſpatia interminata ſupra dicta, quadrilineum nempe, & trilineum, aut ſibi æquantur, aut a quadrilineis [unum ab horizontalibus, alterum a verticalibus] conflantur, ſed ſpatia infinita ambo debent eſſe quadrilinea & terminata, nempe zona horizontalis totalis ex prioribus numero infinitis conflata $3C3BoBoC3C$, & zona verticalis totalis itidem ex prioribus numero infinitis compoſita $3C3GoGoC3C$, quæ duæ zonæ, infinitæ quidem longitudine, ſed tamen terminatæ, inter ſe æquantur. Quod etiam in Hyperbola conica per ſe patet, quemadmodum & in univerſum in ea conſtat, quod zona horizontalis reſpondenti verticali æquetur; nam ſi a duabus zonis detrahas commune trilineum $3CEoC3C$, reſtabit in uno rectangulum $A3B3C3G$, in altero $AoGoCoB$, quæ duo rectangula æquantur inter ſe, ut conſtat.

Atque hæc quidem circa æſtimationem virium, naturamque corporis, pariter ac circa Calculum infiniteſimalem, excerpta ex his pariter ac præcedentibus literis, Domino VOLDERO, ſi videbitur, communicari poſſent. Inter nos autem hæc addo, quod & jam olim in dicto Tractatu inedito adſcripſi, dubitari poſſe an lineæ rectæ infinitæ longitudine, & tamen terminatæ revera dentur. Interim ſufficere pro Calculo, ut fingantur, uti imaginariæ radices in Algebra. Semper enim, quod per infinita iſta & infinite parva concluditur, deductione ad abſurdum, mea Incomparabilium methodo [cujus aliquando Lemmata dedi in *Actis* *] evinci poteſt. Itaque mirari etiam non debes, quod dubito an revera detur quantitas

* 1689. Febr. pag. 85. 86.

titas infinite parva, aut infinite magna utrinque terminata. Etſi 1698 Jul.
enim concedam, nullam eſſe portionem materiæ, quæ non actu ſit ſecta, non tamen ideo devenitur ad elementa inſecabilia, aut ad minimas portiones, imo nec ad infinite parvas, ſed tantum ad minores perpetuo, & tamen ordinarias; ſimiliter ut ad majores perpetuo in augendo acceditur. Sic etiam ſemper animalcula in animalculis dari facile concedo; & tamen neceſſe non eſt dari animalcula infinite parva, nedum ultima. Si talia, de quibus inter nos agitur, infinita & infinite parva poſſibilia eſſe concederem, etiam crederem eſſe.

Sed ad reliqua Litterarum tuarum venio. Et quidem ſimpliciſſima eſt Oenometri ratio Tua noviſſima, per tubulum communem erectum, & infra valvula foras ſpectante inſtructum: habet tamen illud imperfecti, quod dum reaffuſionem non indicat, etiam indicare non poteſt, quantum poſt reaffuſionem iterum detrahatur. Imo poterimus detrahere aliquid, ut nihil plane indicet tubulus, ſi nempe præcedat aquæ tantæ affuſio, quantum mox vini detracturi ſimus. Quid ergo, ſi adjungamus adhuc alium tubulum cujus valvula ſpectet introrſum? Is affuſionem indicabit, detractionem non notabit, & machinamentum effici poſſet in utroque tubulo, ut appareret quantum quaque vice affuſum aut detractum, & quis fuerit ordo affuſionis aut detractionis; imo ratio poſſet excogitari definiendi ſpecificam liquoris effuſi gravitatem, ſi tanti ea res eſſet. Preſſionem columnæ aqueæ indicatam ope globuli aërem continentis, & plus minuſve aquam admittentis, atque adeo depreſſi aut emergentis, excogitavit quidam *Italus*, ſi bene memini, non Boylius. Tubi Tui varicoſi inprimis placent ad uſus quos notas, ut non ſit opus obſervatione Thermometri continua, & tamen ſciri poſſit, quis medio tempore maximus fuerit aſcenſus vel deſcenſus. Follem ex materia durabili maxime deſiderarem, pro Barometro portatili, aliiſque uſibus multis.

Coſmotheori Hugeniani præcedentes Tuæ non meminerant: libenter intelligo prodiiſſe; nam in rebus pulchris & magnis etiam conjecturæ ingenioſæ pretium habent.

In *Actis* nuperrimis, non ſine admiratione mea vidi primum

1698 Jul. *Tſchirnhauſianam* †, deinde Tuam Parabolici arcus ſectionem *. Vellem autem narratum fuiſſet, qua ratione ille a Te in rectam viam fuerit reductus; id feciſſem ego, ſi mihi tale aliquid contigiſſet. Miraberis etiam expreſſionem dicentis, *nihil Methodum ſuam fugere*; credo ex quo noſtra intelligere cepit : Sed ſuperſunt tamen adhuc fortaſſe in quibus hæreat. Magna cum voluptate vidi methodum *Maximi*; quam ego ab initio ſtatim, antequam etiam Problema Brachyſtochronæ proponeres, maxime directam & generalem judicavi, & illi Problemati adhibui, aliiſque adhibendam, ſi bene meminiſti, ſuaſeram, pulchre a Te in rem præſentem Iſoperimetrarum uſurpatam. Placet etiam quod appellatione Functionum uteris. Loco Iſoperimetrarum, liceret generalius adhibere figuras Iſodynamas, ſecundum unam fungendi rationem, & ex iis reperire vel eligere eam, quæ *Maximum* aut *Minimum* præſtet, alia fungendi ratione. Verbi gratia [in ſimpliciſſimo] eam, quæ ex æque capacibus eſt breviſſimi ambitus, quæ eſt Circulus; decuſſata, ut ſic dicam quæſtione, cum quæſtione capaciſſimæ ex Iſoperimetris. Sæpe etiam ego utor Functionibus differentiatis x, neglectis differentialibus; ut ſi z ſit Functio ipſius x, tunc $\mathrm{d}z$ mihi eſt quantitas ordinaria, quæ prodit dz dividendo per dx, ſeu $\mathrm{d}z = dz : dx$. Signa in cujuſque arbitrio ſunt, mihi tamen non placet $\times$ multiplicationem ſignificare, ob facilem confuſionem cum x; malo adhibere τὸ *in*, vel $\frown$, ut ZC *in* LM, vel ZC $\frown$ LM; imo ſæpe ſimpliciter duas quantitates puncto interpoſito conjungo, multiplicationemque deſigno per Z C.L M. Hinc in rationibus deſignandis non utor puncto, ſed duobus punctis, quippe quæ ſimul apud me ſignum ſunt diviſionis, itaque pro Tuo $dy.x :: dt.a$ ſcribo $dy : x = dt : a$, idem enim eſt dy eſſe ad x ut dt ad a, quod dy diviſum per x æquari ipſi dt diviſo per a. Ex qua æquatione etiam conſequuntur omnes proportionum regulæ.

Nondum ſatis attente examinare vacavit, an nihil referat ad *maximum*,

† *De methodo arcus curvæ parabolicæ inter ſe comparandi*, per D. T. Act. Erud. 1698. Jun. p. 259.

* *Inveſtigatio algebraica arcuum parabolicorum aſſignatam inter ſe rationem habentium* &c. Ibid. pag. 261. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLIX. p. 242.

Digitized by Google

ximum, quam ſumas arbitrariam conſtantem *C*, in ſummando addendam vel ſubtrahendam; quo poſito infinitæ erunt curvæ quæſitæ præſtantes idem, ſeu æque ***maximum***; alioqui oporteret ex ipſis *C* rurſus eam, quæ ***maximum*** præſtet, eligere. 1698 Jul.

Ad linteum hæc noto, pro gravitatione (*Fig.* 83.) particulæ FC clarius dici potuiſſe ejus gravationem; ſolet enim gravitatio ſumi active, gravatio paſſive, ſed hæc minuta ſunt. Illud putem, ſi liquor ſuperſtet linteo, ut contineatur & linteo BFN & rectis RB, SN, ipſius quoque Centrum gravitatis, (cum idem ſemper liquor maneat, utcunque mutata lintei figura,) maxime deſcendere; ſed res tamen eodem redibit. TAB.XV.

Conſenſus duarum methodorum, directæ & indirectæ, egregius eſt; tum pro illis qui hæc altius non introſpiciunt, tum pro nobis ipſis, ut Calculi errores, aut ratiocinii paroramata melius vitemus. Dnus. Menckenius Tuæ ſectioni arcus parabolici adjecit tuam demonſtrationem Tautochroniſmi Cycloïdis, & cenſuram in La-Hirium, nonnihil puto temperatam. Scribit mihi, in proximis *Actis* * comparere debere *Davidis* Gregorii *Catenariam* ex *Tranſactionibus.* Rectius conſuluiſſet nos prius, an aliquid afferat dignum referri: Sed ille exterorum benevolentiam captat, ſecus quam exteri faciunt noſtris.

Pene oblitus eram dicere, quod tamen fortaſſe jam Tibi notum eſt, Dominum *Fratrem* Tuum ſpecimina quædam dediſſe in *Actis* † primi Problematis a Te in Diario Gallico propoſiti, & a Domino *Marchione* Hospitalio præteriti, pro linea minima inter duo puncta ejuſdem ſuperficiei: ſed non dicit, an poſſit generaliter. Memini me Tibi dudum § ſcribere quod mihi occurrerit Methodus generalis. Pono ſuperficiem conſtare ex portionibus ſuperficierum, in quibus minimæ jam duci poſſunt, quales ſunt planæ aut ſphæricæ, tanquam elementis. Nam in plana minimæ ſunt rectæ, in ſphæra minimæ ſunt arcus magni. Jam quia ex Methodo mea ge-

 nerali

* 1698. Jul. pag. 305.

† *Solutio ſex Problematum Fraternorum &c.* Act. Er. 1698. Mai. p. 226. *vel* Joh. Bernoulli Opp. Tom. I. N°. LI. Art. 2. pag. 256, aut Jac. Bernoulli Opp. N°. 80. pag 796.

§ Epiſt. LXIV.

1698 Jul. nerali directa formarum *maximum minimumve* præſtantium, etiam linearum *minimum* præſtantium portiones utcunque parvæ *minimum* præſtant: Ita quoque ex puncto unius portionis, ſeu hedræ [quod eligi poteſt maxime determinatum] ad punctum alterius proximæ portionis, quærenda eſt via minima, compoſita ex minimis viis in utraque hedra ad punctum in communi hedrarum ſec-
TAB. XV. tione ita ſumtum, ut ſumma ſit poſſibilium minima. Sint (*Fig.* 84.) hedræ [nempe portiones planorum vel ſphæricarum ſuperficierum datam ſuperficiem tangentium, vel, ſi in ſphæris malis, oſculantium] L M N & P M N hæc plana, aut hæ ſuperficies ſphæricæ vel hedræ, habeant communem in ſuperficie data ſectionem M N. Et ſint duo puncta datæ ſuperficiei ſibi indefinite vicina R & S, quæ in hedris iſtis duabus determinatam maxime [ob facilitatem calculi] poſitionem habere intelligantur: quærendum eſt ſectionis hedrarum communis M N punctum tale T, ut minimarum ab R & S ad T, nempe ipſarum R T & S T [quæ in Hedris planis ſunt rectæ, in ſphæris arcus magni] ſumma R T + S T ſit omnium poſſibilium minima, & determinatio puncti T dabit naturam lineæ in ſuperficie data ducendæ, inter puncta ſua minimæ, generalem. Et harum linearum eæ deinde eligendæ infinitæ, quæ tranſeunt per punctum datum, & ex his demum una [regulariter] quæ a puncto dato tendit ad alterum punctum datum. Quod ſi Tibi alia occurrit via, tanto erit gratior. Sin hanc ipſam excolueris, etiam ſic jucundum erit intelligere Tuo ſtudio eruta; materia enim pulchra eſt, & Te digna. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 29. Julii 1698.

Deditiſſimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

EPIS-

Digitized by Google

EPISTOLA LXXVI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Infinito. De natura corporis. De Oenometro. De Tschirnhausio. *De Iſoperimetri Probl. ſolutionibus ſuis. De linea breviſſima in ſuperficie curva. De Oenometro Pariſienſi. De controverſia fraterna.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

HActenus a Domino Voldero nullam accepi reſponſionem; 1698
an ſit quod forte ipſi ſatisfecerim, neſcio: percuperem ſaltem noſſe, quid jam ſentiat de ſua objectione contra Calculum infiniteſimalem, quam inſolubilem credidit; niſi ad plurimum dicendo [hac enim reſponſione ſibi ipſemet adblandiebatur] Axiomata pro finitis quantitatibus recepta non valere pro infinitis; ita ut ſine contradictione duo infinita cenſeri poſſint ſimul æqualia & inæqualia, pars infiniti æqualis toti infinito, ſimplum duplo, &c. Sed, (cum valeat ubique, ***Nihil ſimul eſſe & non eſſe poteſt,***) hanc reſponſionem nullam eſſe prævideram ſtatim, & genuinam promiſeram, quam miſi. Auguſt.

Etiam mihi quandoque occurrerunt objectiones ſimiles Tuæ, quam ipſe Tibi in *Gallia* formaſti; & nuper admodum Varignonius hujuſmodi diluendam mihi propoſuerat, circa deſcenſum gravium.

Inſtabit, ſcio, Volderus petere claram explicationem illius tertii, quod, præter extenſionem & impenetrabilitatem, requiris in Corpore. Regeret forſan, ſi tales Monades ſtatuas corporibus peculiares, ſive illas nomines formas ſubſtantiales, ſive res animabus [intelligentibus, an ſentientibus, quod Voldero perinde eſt] analogas; monadem aut toti Corpori, aut parti attribuendam eſſe; non corpori, quia poteſt dividi in partes a ſe mutuo independentes; non parti, quia pariter in plures partes indepen-

 den-

1698 August. dentes dividitur. Si vero corpus ex infinitis monadibus conflatum dicas; tunc quamlibet, aut extenſo, aut non extenſo fore affigendam: ſi extenſo, licet infinite parvo, priorem recurrere difficultatem, niſi ad atomos refugere velis; ſi non extenſo, ergo nihilo, quia ex non extenſis non componi poteſt extenſum; ita ut forte cogaris dicere quodlibet corporis punctum [dico punctum mathematicum indiviſibile] peculiari monade, ſeu tali anima donatum eſſe. Quantum ad vim elaſticam, Tecum ſentio, nec forma, nec anima, nec ſpiritu opus eſſe, ut illa corpori ſit eſſentialis; rectiſſime, namque mihi dicere videris, eam ex mechaniſmo, ſeu ſtructura corporis dependere poſſe: quemadmodum non opus eſt anima, ut duo magnetes ſe mutuo attrahant, vel repellant: Et ego ſane ſæpius cogitavi, annon quodlibet corpuſculum, quantumvis exiguum, ita a Deo ſit conſtructum, ut pro ratione molis ſuæ, certam habeat copiam materiæ longe ſubtilioris, circa ſe, & per ſe continuo perlabentis, ipſiusque quaſi ſphæram activitatis conſtituentis: Tale quid etiam Newtonus ſtatuiſſe videtur, quando illum dicere memini, omnia & ſingula corpora totius univerſi in ſe mutuo gravitare, ſeu ſe mutuo attrahere; adeo ut meum corpus, verbi gratia, non magis verſus centrum Terræ trahatur, habita ratione vicinitatis, quam verſus centrum Saturni, aliuſve Planetæ, præterquam quod vacuum admittat, Hugenio approbante, ut ex Coſmotheoris vidi.

Nunquam ego dixi in diviſione materiæ ad elementa inſecabilia, aut ad minimas portiones deveniri poſſe: ſed hic non eſt quæſtio, quouſque ego diviſione, ſeu actuali, ſeu mentali pervenire poſſim; quæritur quouſque jam perventum ſit? Concedis materiæ portionem finitam actu jam diviſam eſſe in partes numero infinitas; & tamen negas aliquam iſtarum particularum poſſe eſſe infinite exiguam: quomodo hæc cohærent? Nam, ſi nulla eſt infinite exigua; ergo ſingulæ ſunt finitæ; ſi ſingulæ ſunt finitæ, ergo omnes ſimul ſumptæ conſtituent magnitudinem infinitam; contra hypotheſim. Concipe aliquam magnitudinem determinatam dividi in partes geometrica hac progreſſione deſcendentes $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

+

+ &c. Quamdiu numerus terminorum finitus eſt, fateor ſingulos terminos fore etiam finitos; ſed ſi omnes termini actu exiſtunt, erit ſane infiniteſimus, omnesque ſequentes infinite parvæ magnitudinis: atqui in quolibet corpore, ob diviſionem actualem jam factam, non faciendam, revera & actu omnes termini talis progreſſionis exiſtunt, Ergo, &c. 1698 Aug.

Præterea corpus quod motu ſuo deſcribit lineam, exiſtit utique actu in ſingulis punctis quæ in illa linea concipere poſſum, ergo etiam in duobus quæ ego concipio infinite ſibi vicina; adeoque actu intervallulum illud, ſeu particulam infinite exiguam, emenſum eſt. Tandem licet talis particula infinite parva non exiſteret ſeparatim, coexiſtit tamen cum toto; ſed miror quod dicas, quod ſi talia, de quibus inter nos agitur, infinita & infinite parva, poſſibilia eſſe concederes, etiam crederes eſſe. Vellem ergo ut mihi demonſtrares impoſſibilitatem; nam quemadmodum non tantum mihi tribuo exiſtentiam eorum probare me poſſe, ita e contrario perſuaſiſſimus ſum impoſſibilitatem ejus nullis argumentis poſſe evinci.

Gaudeo Tibi placuiſſe Oenometri rationem meam; placet viciſſim perfectio Tua pro reaffuſione cognoſcenda; de qua ego non ſollicitus eram; quia nec *Galli* illius automatárii machinulam id præſtare intellexi. Sed quid ſi detractio vini & reaffuſio aquæ fiunt ſimul, ita ut quantitas liquoris in dolio nunquam mutetur? Uterque ſane tubulus, obſervatorem fruſtrabit, neque remedium video pro hoc. Cæterum valvulæ etiam applicari poſſent Barometris & Thermometris communibus pro maximo aſcenſu & deſcenſu explorando, unde tubis varicoſis non eſſet opus; ſed prævideo difficultatem applicationis valvularum intra tubos vitreos.

Mirabilia mihi narras de Tschirnhausii modo procedendi; expectabam ab ipſo agnitionem ſui erroris, & revocationem abſurdæ ſuæ refutationis, imo & gratiarum actionem quod a me in rectam viam ſit reductus. Quid autem? loco horum rependere ingratitudinem? mihi furari inventionis laudem? dicere nihil methodum ſuam fugere? talia profecto virum honeſtum non decent....

. . . .

Lætor admodum ſolutionês meas Problematis Iſoperimetrorum duplici

1698 Auguſt. duplici methodo inventas Tibi probari: animadvertiſti, credo, me adhibuiſſe in methodo directa conſiderationem Ellipticulæ, prout ego ab initio ſtatim conceperam; abſque qua forte non tam facile perveniſſem ad cognitionem æqualitatis arculorum OX & $\omega\xi$; id quod palmarium eſt in hoc ſcrutinio. Elegans eſt converſio Tua quæſtionis Iſoperimetrorum in Iſodynamorum, ubi ſcilicet ex omnibus figuris Iſodynamis, ſeu ejuſdem capacitatis, quæritur illa quæ, certa fungendi ratione, producat aliam figuram breviſſimi ambitus inter omnes illas quæ eadem Functione ab aliis Iſodynamis produci poſſent. Sed Problema hoc modo conſideratum difficilius mihi apparet. Ad denotandam Functionem alicujus quantitatis indeterminatæ x, mallem uti litera majuſcula cognomine X, vel græca ξ; ut ſimul appareat cujus indeterminatæ ſit Functio; hoc levaret memoriam. Quantum vero ad ſignum Functionis differentiatæ facile adoptabo tuum d, loco mei Δ, quoniam ſimplicius eſt; ideoque in Tua eſt manu ſubſtituere illud in ſchediaſmate meo. Reliqua quæ mones circa notationem ſignorum vulgarium etiam ego approbo; interim malui morem receptum ſequi quam novorum ſignorum definitionem præmittere; id quod commodius fieri poteſt conſcribendo integrum Tractatum. Lubens credam Te nondum ſatis attente examinaſſe, an quid referat ad *maximum* quam ſumam conſtantem C, in ſummando addendam vel ſubtrahendam. Si enim vel tantillum adtendiſſes, vidiſſes facile revera infinitas debere eſſe curvas, quæ eadem Functione *maximum* præſtant; non tamen inde ſequitur, dari *maximum maximorum*, creſcunt quippe illa maxima a o in infinitum. Sumamus, exempli gratia, caſum ſimpliciſſimum, exiſtente numero poteſtatis $n = 1$, Problematis Fraterni, ubi ſcilicet curva quæſita genitrix BFN, & genita BZN eſt eadem curva, utraque nempe Circulus: patet utique non modo ſemicirculum BFN quæſito ſatisfacere, ſed quodcunque aliud ſegmentum, vel TAB. XV. majus ut (*Fig.* 85.) BRN, vel minus ut BSN, ita ut BRN & BSN æque faciant maximum, inter ſuas reſpective Iſoperimetras, quam BFN. Hic vero nullum eſt *maximum maximorum*, quandoquidem BSN in infinitum diminui & BRN in infinitum augeri poteſt; Hoc apprime convenit cum mea generali æquatione

$dy =$

$dy = dx(X \pm C) : \sqrt{(a^2 - (x \pm c)^2)}$, in qua ſi, loco generalis Functionis X, ſubſtituatur x, habebitur $dy = dx(x \pm C) : \sqrt{(a^2 - (x \pm c)^2)}$, ſeu ſummata æquatione $y \mp b = \sqrt{(a^2 - (x \pm c)^2)}$: quæ æquatio eſt ad ſemicirculum BFN, ſi $c = o$; ad ſegmentum majus BRN, ſi adhibentur $- c$; & ad ſegmentum minus BSN, ſi $+ c$. Et quidem in hoc ſolo caſu quando $X = x$, omnes tres curvæ BSN, BFN, BRN, ſunt cognomines, nempe omnes Circuli; ſed in reliquis omnibus caſibus, ſunt diverſi generis curvæ. Si exempli gratia $X = \sqrt{x}$; tunc aſſumta $c = o$, erit BFN Cycloïs; ſed BSN, vel BRN ceſſat eſſe Cycloïs, ſi ſumatur + vel — c. 1698 Auguſt.

Hoc notandum, quod ſi $C = o$, tum ſemper curva FFN, poſita quacunque Functione, normaliter inſiſtit axi B N.

Gratum mihi eſſet videre Gregorii Catenariam & Tschirnhausii Schediaſma. Si eam mihi mittere velles, remitterem ocyus; *Acta* enim non niſi tarde admodum ad me perveniunt. Nondum vidi quid *Frater* dederit in *Actis* pro linea breviſſima inter duo puncta ejuſdem ſuperficiei: generaliter id poſſe dubito. Methodus Tua, vel potius baſis alicujus Methodi, legitima eſt, eaque etiam primo ſe mihi obtulit, cum hoc Problema mihi incideret, Tab. XV. & quidem porro facile videbam (*Fig.* 84.) lineam breviſſimam in duabus hædris ſe ſecantibus, ab R ad S tendentem, eam eſſe quæ faciat cum communi hædrarum ſectione N M, duos angulos ad verticem, ut ita dicam, oppoſitos RTM, & STN æquales; ſed hoc hactenus nihil juvat pro conſtructione totius lineæ quæſitæ in ſuperficie curva. Alium præterea inveni ſolvendi modum, qui generaliſſimus eſt, † quique in eo fundatur, quod planum tranſiens per tria quælibet puncta proxima lineæ quæſitæ debeat eſſe rectum ad planum tangens ſuperficiem curvam in aliquo iſtorum punctorum. Hinc enim generalem erui æquationem pro omnibus ſuperficiebus, quæ in nonnullis, ut in Conoïdicis & Sphæroïdicis rectis cujuſvis gradus facile conſtruitur. Vale & fave.

Amplitudini Tuæ Devotiſſimus

J. Bernoulli.

† *Vid.* Opp. Tom. IV. N°. CLXVI. pag. 108.

1698 Auguſt. P. S. Meis jam ſcriptis, accipio haſce à Domino VARIGNONIO, cum deſcriptione Oenometri, quod valde compoſitum deprehendo, vereorque ne vel ſola frictio denticulorum & virgulæ ferreæ liberum deſcenſum & aſcenſum ſuberis multum impediat; præterquam quod eundem defectum habet, quem noſtrum, quod ſcilicet nihil indicet ſi effuſio & affuſio ſimul fiant. Miſit etiam longam, ... *Fratris* Epiſtola in *Diario* † editam, ubi *Frater* ſingularem omnino refutandi viam init. Fingit enim ſibi ſtatim analyſin quamdam deſumtam ex methodo indirecta [ſed male & longe aliter quam ego feci, adhibita, conjicit enim me ſuppoſuiſſe Centrum gravitatis debere infimum locum ſumere in liquoribus, ubi mutata figura non eadem copia manet; quod tamen ſcis me in primis præcaviſſe, nullamque me habere conſiderationem Centri gravitatis, ſed rem totam deducere a ſumma gravitationum ſeu gravationum, prout volueris nominare]: illaque me uſum fuiſſe conjecturat; quam igitur prolixè refutat, oſtendendo quod multæ abſurdirates exinde ſequantur: quod vero in multis veritatem invenerim, id factum eſſe ex accidenti, quia commiſerim duos paralogiſmos feliciter adeo ſe mutuo corrigentes, ut fortuito verum exhibuerint. Vides...... hominem cum umbra pugnare........ .... refellere analyſin quæ mea non eſt? ſi volueris, mittam foliola. Præter Te aſciſcit in arbitros Dominum HOSPITALIUM & NEWTONUM. Reſpondi § ejus refutationem me non tangere, me meas Methodos, & directam & indirectam, cum Analyſi, apud Te diu depoſuiſſe: etiam *Fratrem* debere ſuas Tibi mittere, quas utraſque ſimul publicaturus ſis, ut eas Lectores, & reliqui inprimis arbitri, cum ſe invicem tanto commodius conferre, & de collatis judicare queant.

† *Journal des Savans* 30. Journ. du 4. Aout, & 31. Journ. du 11. Aout, vel Joh. BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. XLV. pag. 222. *Aut* Jac. BERN. Opp. N°. 87. 88. pag. 829. 839.

§ *Journal des Savans* 40. Journ. du 8. Dec. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLVII. p. 231.

EPIS-

EPISTOLA LXXVII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Mittit Reſponſionem fraternam.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

ACcipio *Diarium Gallicum*, in quo reſponſio Domini *Fratris* Tui. Omnino judicavit, ut divinaſti, Te ope lintei perveniſſe ad quæſitum, ſed non prævidit, Te etiam via alia directiore uſum eſſe. Suadeo ego, ne præcipites publicationem Tuam viæ directæ, ob rationes olim allegatas. Vix enim niſi pauciſſimi poſſunt eſſe judices, & hi poſſunt privatim intervenire; cæteris, quales Dnus. Tschirnhausius & Dnus. Nieuwentiit, qui noſtris non ita uti mihi videntur, ut æquum erat, tantum ſuppeditamus, quibus alant ſuam αὐθάδειαν beneficii accepti diſſimulatricem. 1698 Auguſt.

Epiſtola Domini *Fratris* Tui ad Dominum Varignonium directa eſt; quod ex eo judico, quia ipſius Theorema mechanicum de ſinubus laudat.

Uti ſe ait mea expreſſione per (:), commodo Typothetarum, poterat eodem modo etiam exprimere rationem, ut nuper ſcripſi.

Ad priores me referens nihil nunc addo, niſi ut valeas & me ames, qui ſum perpetuo tuus.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{9}{19}$ Auguſti 1698.

G. G. Leibnitius.

EPISTOLA LXXVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad penultimam.

De Oenometro Pariſienſi. De Tschirnhausio *&* Menckenio. *De Iſoperimetris. De Infinito. De Corporum natura & monadibus. De vacuo & gravitatione univerſali. De ſignis algebraïcis. De quadratura arithmetica. Mittit* Gregorii Catenariam.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1698 Auguſt. GRatum mihi eſt intelligere, Oenometrum Gallicum nihil aliud eſſe, quam ſuberem, qui elevatur ſecundum virgulam ferream, denticulis adjunctis. Huic conſtructioni noſtram utique præferendam putem. In Thermometris & Barometris Tubos varicoſos valvulis Tecum prætulerim.

Dno. Tschirnhausio, ad Litteras ipſius reſponderam, me Tibi communicaturum vel communicaſſe quæ objicit; ab eo tempore mihi non ſcripſit. Velim inter bonos bene & candide agier, & ſuum cuique tribui. Dnus. Tschirnhausius quanto magis ſimulat a ſe negligi gloriam, tanto eam affectat magis. Dnus Menckenius utilitatum ſuarum magis quam æquitatis rationem habet. Dno. Tschirnhausio defert, tanquam vicino, quicum ſæpe agendi occaſio eſt; exteris remotioribus, ut Gregorio, Nieuwentiitio & ſimilibus favet, ut eos benevolentiæ ſignificatione invitet; nos ſatis ſibi aſtrictos putat. Gregorii Catenariam nondum vidi, ſed tantum ex Literis *Menckenianis* intellexi, *Actis* † inſertum iri: ubi accepero mittam ſtatim. Reſpondi ipſi, videri mihi eam venturam poſt feſtum, nec *Anglos* noſtra niſi aliquid novi & digno habeant, referre.

Video

† 1698. Jul pag. 305

Digitized by Google

Video, quia Problemata Iſoperimetrorum ſolvuntur non pro uno dato ambitu, ſed pro quocunque, utique non unum ***maximum maximorum*** ibi haberi, ſed variari in infinitum debere; interdum tamen in aliis caſibus hæc cautio erit utilis, ut determinatio aſſumtæ inter ſummandum conſtantis adhibeatur. Uti dato ambitu Ellipticula, ita alio dato alia curvula eſt opus; & licet de curvula non cogitetur, ſufficit duobus punctis datis tertium manere indefinitum, [utique in curva] ex lege maximi determinandum: Unde jam proprietas lineæ quæritur. Idque revera & pro ducenda minima in data ſuperficie contingit, ut adeo ſemper eadem ſit methodus directa generaliſſima, ut ad æquationem [ſaltem differentialem] deveniatur. Nec pro minima ſuperficiei abludit ſpeciale quod adhibes Theorema elegans & utile; nam Circulus maximus in ſphæra ſuperficiem datam tangente, tranſiens per tria puncta proxima lineæ minimæ quæſitæ, eſt planum rectum ad planum ſuperficiem datam illic tangens. 1698 Auguſt.

Uti Dominus Volderus, ita olim *Gregorius* à S. Vincentio alicubi dixit in infinito non habere locum Axioma, quod Totum ſit majus parte. Sed mihi videtur alterutrum dicendum, vel infinitum revera non eſſe unum totum, vel infinitum, ſi totum ſit, & tamen non ſit majus ſua parte, eſſe aliquid abſurdum. Sane ante multos annos demonſtravi numerum ſeu multitudinem omnium numerorum contradictionem implicare; ſi ut unum totum ſumatur. Idem de numero maximo & numero minimo, ſeu fractione omnium infima. Et de his dicendum quod de motu celerrimo, & ſimilibus. Etiam univerſum non eſt unum totum, nec concipi debet ut animal cujus anima Deus, uti Veteres faciebant. Quemadmodum autem non datur elementum numericum, ſeu minima pars unitatis, vel minimum in numeris; ita nec datur linea minima, ſeu elementum lineale; linea enim, ut unitas, ſecari poteſt in partes vel fractiones. Interim fateor, cum aliud ſit maximum ab infinito, & minimum ab infinite parvo, non hinc ſtatim refutari poſſibilitatem noſtrorum infinite parvorum. Et ſaltem in Calculo & ratiocinatione adhiberi poſſunt, quod in maximo interminatoque, itemque in minimo non licet, ut jam obſervavi. Cum dixi, ſi infini-

1698 Auguſt. te parva & infinita poſſibilia crederem, me conceſſurum ea eſſe; non ideo dixi ea eſſe impoſſibilia; ſed rem in medio adhuc reliqui. Cum negavi ad minimas portiones deveniri, facile judicari poterat me non locutum de noſtris diviſionibus, ſed etiam de illis quæ actu fiunt in natura. Etſi igitur pro certo habeam, quamlibet partem materiæ eſſe rurſus actu ſubdiviſam, non ideo tamen hinc ſequi puto, quod detur portio materiæ infinite parva; & minus adhuc ſequi concedo, quod ulla detur portio omnino minima. Si quis conſecutionem in formam redigere velit, ſentiet difficultatem. At inquies: ſi nulla eſt infinite exigua, ergo ſingulæ ſunt finitæ. Concedo, ſi ſingulæ ſunt finitæ, ergo omnes ſimul ſumtæ conſtituent magnitudinem infinitam. Hanc conſequentiam non concedo; concederem ſi aliqua daretur finita, quæ minor eſſet cæteris omnibus, vel certe nulla alia major; tunc enim fateor talibus aſſumtis, pluribus quam eſt datus numerus quivis, oriri quantitatem majorem data quavis, ſed conſtat, quavis parte aliam minorem finitam dari. Uteris exemplo ſane ad rem accommodato. Ponamus in linea actu dari, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ &c. omneſque feriei hujus terminos actu exiſtere; hinc infers dari & infiniteſimum, ſed ego nihil aliud hinc puto ſequi, quam actu dari quamvis fractionem finitam aſſignabilem cujuſque parvitatis. Similiter in motu, & ſi per omnia puncta tranſeatur, non tamen ſequitur duo puncta dari ſibi infinite vicina, & multo minus dari ſibi proxima. Et revera puncta concipio, non ut elementa lineæ, ſed ut limites, ſeu negationes progreſſus ulterioris, ſive ut lineæ terminos.

Quod ad corporis naturam attinet, ſæpe dixi [quod videris non improbare] omnia phænomena in corporibus explicari poſſe mechanice, adeoque & vim elaſticam: interim ipſa principia Mechaniſmi, ſeu Legum motus ex ſola conſideratione extenſionis & impenetrabilitatis non poſſe derivari; itaque aliud quid in corpore eſſe ſtatuendum, cujus modificatione oriantur conatus & impetus, uti modificatione extenſionis oriuntur figuræ. Per *Monadem* intelligo ſubſtantiam vere unam, quæ ſcilicet non ſit aggregatum ſubſtantiarum. Materia ipſa per ſe, ſeu moles, materiam primam vocare poſſis,

poſſis, non eſt ſubſtantia; imo nec aggregatum ſubſtantiarum, ſed aliquid incompletum. Materia ſecunda, ſeu Maſſa, non eſt ſubſtantia, ſed ſubſtantiæ; ita non grex, ſed animal; non piſcina, ſed piſcis, ſubſtantia una eſt. Etſi autem corpus animalis, vel meum organicum, rurſus ex ſubſtantiis innumeris componatur, eæ tamen partes animalis vel mei non ſunt. Sed ſi nullæ eſſent animæ, vel his analoga, tunc nullum eſſet ego, nullæ monades, nullæ reales unitates, nullæque adeo multitudines ſubſtantiales forent; imo omnia in corporibus non niſi phaſmata eſſent. Hinc facile judicatur nullam eſſe materiæ partem in qua Monades non exiſtant. 1698 August.

Miratus ſum Hugenium atque Newtonum admittere vacuum; ſcilicet quod animum ultra notiones geometricas non ſuſtulere. Magis adhuc mirum eſt Newtonum ſtatuiſſe attractionem, quæ mechanice non fiat. Interim quod ait corpora in ſe gravitare [ſaltem ad ſenſibiles effectus in magnis corporibus noſtri ſyſtematis] non videtur contemnendum, etſi Hugenio id minus arrideat. Et plane probo quod ais, corpus utcunque exiguum habere ſuam ſphæram activitatis; dicere ſoleo nullum eſſe corpuſculum, quod non ſit mundus quidam infinitarum creaturarum.

Optime facis, ut Functionis nota deſignet, cujus litteræ ſit Functio, veluti ut ξ ſit Functio ipſius x. Si ſint plures Functiones ejuſdem, poſſent diſtingui numeris. Soleo interdum adhibere notam relationis hoc modo $\overline{x}|\underline{1}|$, $\overline{x}|\underline{2}|$, &c. id eſt utcunque formatum ex x; ita ſi quod ex pluribus formatum, ut ex x & y ſcribo $\overline{x;y}|\underline{1}|$, $\overline{x;y}|\underline{2}|$. Et quando formatio eſt rationalis adſcribo r, veluti $\overline{x}|\underline{r:1}|$ & $\overline{x}|\underline{r:2}|$ vel $\overline{x;y}|\underline{r:1}|$, $\overline{x;y}|\underline{r:2}|$. Si formatio ſit rationalis integra, ſcribo $\overline{x}|\underline{ri:1}|$, $\overline{x}|\underline{ri:2}|$. Sed ubi nonniſi una Functio, aut paucæ; ſufficiunt litteræ græcæ, vel aliquid tale, ut ſoles.

Meus Tractatus *Tetragoniſmi arithmetici* poterat applauſum habere, tunc cum ſcriberetur; nunc Tironibus noſtrarum Methodorum magis placeret, quam Tibi. Cum Dominus *Frater* Tuus putet Te alicubi non dediſſe verum reſponſum; oportet ut aliam ſibi habere videatur ſolutionem generalem. Verba, quibus Hoſpita-

PITA-

1698 Auguſt. PITALIUM & NEWTONUM mihi adjungit, non vidi, & ut communices rogo........................ Vale.

Dabam *Hanoveræ* 22. Auguſti 1698.

Deditiſſimus
G. G. LEIBNITIUS.

P. S. His jam ſcriptis, allatus eſt ad me menſis *Julius Actorum*, unde hæc *Gregoriana* de Catenaria mitto, quæ legendi mihi ſpatium nondum fuit. Judicium igitur Tuum ubi remittes, plagulas iſtas accipere ſpero.

EPISTOLA LXXIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Cenſura Catenariæ GREGORII. *De* TSCHIRNHAUSIO, & *Fraterna ſolutione Problematum ſuorum. De Infinito, Natura corporis & Monadibus.*

Vir Ampliſſime & Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1968 Septemb. REmitto plagulas *Actorum*, cum gratiarum actione. Nihil in his video præſtitiſſe GREGORIUM *, quod applicationem ſeptennalem, poſt noſtras ſolutiones editas, mereretur.......... In eo enim totus eſt, ut quas olim invenimus catenariæ conſtructiones & proprietates, ille jam per analyſin examinet & demonſtret; quod quam facile ſit a poſteriori, id eſt, ex generali rei natura ſemel cognita & a nobis tradita, Tuo judicio relinquo. Feciſſet aliquid, ſi noſtris non viſis, a priori Problema ſolviſſet. Ut vero ex mechanicis primariam Catenæ proprietatem eliceret, ex qua cætera omnia pendent; ex ejus ratiocinio clare patet, ſibi non fuiſſe ſcopum eruendi quod incognitum ſupponitur, ſed potius ut,
qua

* Davidis GREGORII *Catenaria* A. E. 1698. *Jul.* pag. 305.

qua data porta, ad noſtram ſolutionem perveniret; modo ſpeciem ſolutionis exhibuiſſe videretur; ſuum adeo ſolvendi modum quæſito, quod jam cognitum habebat, accommodaſſe credo. Etenim Prop. 1. ſi non paralogizat, ſaltem maxima eſt inevidentia, dum neſcio quo pacto confundit potentias. Tamen verum concludit; forte quod duos paralogiſmos ſe mutuo corrigentes [ut Fratris termino utar] admiſerit, vel potius quæſiverit ſtudio. Videtur enim, ut modo dixi, præmiſſas concluſioni non vero concluſionem præmiſſis adaptaſſe. Miraberis innuentem ſtatim quaſi etiam nos uſi fuerimus methodo *Newtoniana*, quando illam Geometris familiarem deprædicat. Rem forte gratiorem multis feciſſet Dominus MENCKENIUS, ſi hanc cramben recoctam omiſiſſet; præſertim cum ſcateat tot vitiis typographicis, ſenſum non turbantibus, ſed pervertentibus; ut qui noſtra non antea intellexerit, fruſtra ſit ea hinc ediſcere velle. Notat GREGORIUS catenariam eſſe debitam curvaturam fornicibus conciliandam; ſed diu eſt quod idem & ego & alii annotavimus..................

Legi, & relegi quæ TSCHIRNHAUSIUS de ſecandis arcubus parabolicis in *Actis* * habet; at ne nunc quidem rem acu tetigit.......... Legi etiam Fraternas ſolutiones Problematum meorum †; ſed eum longe abeſſe a generali ſolutione apparebit ex reſponſione quam nuper ad *Acta* § miſi. Problema de ducenda linea minima ſolvit tantum pro Conoïdibus rectis & circularibus, non pro quavis ſuperficie curva. Item reliqua Problemata in *Diario Gallico* propoſita, pro curvis ſimilibus, non pro quibuſvis ordinatim poſitione datis ſoluta dedit. Trajectorias [datis ordinatim poſitione in angulo recto occurrentes] in pauciſſimis invenit, non vero generaliter; multo minus pro angulo obliquo; & minime pro angulo data lege variante, quemadmodum ego ſolvi, ſi recordaris.

* 1698. Jun. pag. 259.

† A. E. 1698. Mai, pag. 726. Joh. BERN. Opp. Tom. I. N°. LI. 2. pag. 256. Jac. BERN. Opp. N°. 80. pag. 796

§ *Annotata in ſolutiones Fraternas Problematum quorumdam ſuorum*, A. E. 1698. Oct. pag. 466. vel Opp. Tom. I. N°. LII. pag. 262.

1698 Sept. Hac ipſa hora extra urbem abiturus, nunc ad litterarum Tuarum contenta prolixe, prout vellem, reſpondere non poſſum: id ſaltem dico me etiam credere maximam & minimam quantitatem non dari; infinita & infinite parva non poſſe demonſtrari exiſtere; ſed etiam non poſſe demonſtrari non exiſtere; probabile tamen eſſe exiſtere. Si omnes termini hujus progreſſionis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. actu exiſtunt, ergo exiſtit infiniteſimus, & omnes qui eum ſequuntur: mihi videtur me hoc jure poſſe inferre ex actuali exiſtentia. Nec ego puncta concipio ut elementa lineæ, ſed ut limites tantum. Quid per materiam primam per ſe, ſeu per molem diſtinctam a materia ſecunda, ſeu maſſa, intelligas, non ſatis capio; neque etiam quid Tibi ſit incompletum. Si materia ſecunda, ſeu maſſa, non eſt ſubſtantia ſed ſubſtantiæ; ſi bene comparas cum grege, ſeu cum piſcina; divide ergo mihi certam portionem materiæ in ſuas ſubſtantias ſolitarias, ſingulares & individuas; quemadmodum grex dividitur in animalia, exercitus in milites &c. & explica quæſo clare in quo putes talem ſubſtantiam ſingularem conſiſtere. Eſto eſſe aliquod animæ analogum: concedis portionem materiæ nullam eſſe tam exiguam, in qua non infinitæ exiſtant tales animæ, tales ſubſtantiæ, tales monades, ſeu quocunque nomine velis notare: quouſque ergo progrediendum ut perveniam ad ſimplicem unitatem, & individuam; ut poſſim dicere hanc eſſe ſubſtantiam, non ſubſtantias? Sane materia non modo dividenda erit in partes infinite exiguas, ſed in minimas id eſt puncta, ſeu non quanta, quæ non dantur.

Heſterna luce accepi litteras a Domino Voldero: Is ſibi ſatisfactum fatetur. &c.

EPIS-

Digitized by Google

EPISTOLA LXXX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Catenaria Gregorii. *De Infinito. De Academiæ Pariſienſis hiſtoria. De Machiniſta quodam Pariſienſi.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

Ante omnia nuncio, litteras Tuas, quas in Itinere inter *Hanoveram* & *Herrenhuſam*, ubi Aula eſt, perditas ex cir- 1698 Sept.
cumſtantiis credideram, præter ſpem comparuiſſe in maſſa ſchedarum, ubi prius quæſieram fruſtra; itaque Te metu ſolvo, quam Tibi incutere poterat Lector incommodus eorum, quæ de Paſtoribus quibuſdam veſtris dicebas, quos ego nunc a prudentioribus edoctos rectius judicare arbitror.

Gregoriana de Catenaria aſpexeram magis quam legeram, ſed dubitatione Tua admonitus, demonſtrationem propoſitionis primæ, qua fundamentalem quandam lineæ proprietatem conſtituere conatur ex Mechanicis, non tantum legi, ſed & examinavi; & mirum dictu, Vir cætera ingenioſus ita paralogizare deprehenſus eſt, ut vix tyro poſſit magis; ſed perplexitate exprimendi ſe fortaſſe ipſum decepit ſucceſſu apparente. Adjeci examen, rogoque ut conſideres, mihique ſententiam Tuam perſcribas, deliberesque mecum, an e re ſit mittere ad *Acta*. Satis apparet [quidquid affectet] non ſatis ab ipſo intelligi uſum Caculi infiniteſimalis, & induiſſe ſe ſe in ſpinas, fere ut olim Dnus Sauveur *Pariſiis*, * Uſum Catenariæ ad fornices non ſatis concepiſſe animo vel explicuiſſe videtur. Et ſane meretur res exponi a Te diſtinctius.

Domini Tschirnhausii proceſſum tecum admiror, vellemque actum fuiſſe apertius, & ſuum cuique tributum.

Eee 2 Venio

* *Vide* Epiſt. ſuperiores XLI, XLII, & XLIII.

Digitized by Google

1698 Sept. Venio nunc ad ea quæ in Epiſtola Tua noviſſima ſunt μεταφυσικώτερα: Colligis ita, ſi omnes termini hujus progreſſionis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. actu exiſtunt, etiam exiſtere infiniteſimum, & qui eum ſequuntur. Reſpondeo; collectionem eſſe probam, ſi concedatur aliquem revera eſſe terminum infiniteſimum, aut poſt-infiniteſimum, id ipſum vero a me non concedi.

Quæris 1°. Quid per materiam per ſe, ſeu materiam primam ſive molem, a ſecunda diſtinctam, intelligam? Reſpondeo, id quod eſt mere paſſivum, atque ab animabus vel formis ſejunctum.

Quæris 2°. Quid mihi hic ſit incompletum? Reſpondeo, paſſivum ſine activo, & activum ſine paſſivo.

3°. Petis, ut Tibi dividam portionem maſſæ in ſubſtantias ex quibus componitur: Reſpondeo, tot in ea eſſe ſubſtantias individuas, quot in ea ſunt animalia, ſive viventia, vel his analoga; itaque eodem modo divido, ut gregem ſive piſcinam, niſi quod liquidum interjectum inter animalia gregis aut inter piſces, itemque liquidum [imo & reliquam maſſam] in quolibet piſce vel animali contentam, rurſus ut novam piſcinam dividi debere arbitror, & ſic in infinitum.

4°. Monadem completam, ſeu ſubſtantiam ſingularem voco, non tam animam quam ipſum animal aut analogum, anima vel forma, & corpore organico præditum.

5°. Quæris quouſque progrediendum, ut habeamus aliquid quod ſit ſubſtantia, non ſubſtantiæ? Reſpondeo, talia ſtatim offerri etiam ſine ſubdiviſione, & unumquodque animal tale eſſe. Neque enim ego, Tu, ille componimur ex partibus corporis noſtri.

6°. Vereris ne materia componatur ex non quantis. Reſpondeo, non magis eam componi ex animabus, quam ex punctis.

Quanto plura quæres, eo magis videbis connexionem firmitatemque ſententiæ, non levi conſideratione, ſed poſt diuturnam a longo tempore tractationem & retractationem tandem conſtitutæ, & fortaſſe aliquando non minus probabis hæc μεταφυσικώτερα, quam illa δυνάμικα.

Dnus. Bayle auctor Dictionarii duobus in folio voluminibus editi, qui olim *Novellis Reipublicæ Litterariæ* operam dederat, cum

cum non in Philoſophia minus quam Hiſtoria valeat, lectis quibuſdam meis Philoſophicis in ***Diario Gallico*** & ***Batavo***, objectiones quaſdam humaniſſime propoſitas inſeruit Dictionario ſuo, voce Rorarius: Eas cum nuper legiſſem, reſponſionem modeſtam miſi Dno. Basnagio, ut ſi videatur inferat ſuæ ***Hiſtoriæ Operum Eruditorum***, modo Dnus. Bayle aſſentiatur. Hic reſponſionem meam ſecum communicatam ſibi non tantum pulchram, ſed & efficacem [***fortem***, ut Gallica vox habet] videri, ſignificavit ipſe Litteris humaniſſimis ad me datis, editionemque ejus gratiſſimam ſibi fore profeſſus eſt. Quæram an adhuc aliquid ipſum moretur? 1698 Sept.

Pro ***Varignonianis*** notitiis, quæ ſane mihi valde placent, gratias ago. Oenometrum ***Langloſianum*** compoſitius eſt, quam ut facile homines id ſint in ordinariam praxin deducturi. Quoniam ***Hiſtoria Academiæ Scientiarum Regiæ*** typis paratur, rogo ut quæras, ſed tanquam per Te, an aliqua & qualis ibi mentio mei, cui reapſe ibi datus fuit a Rege locus, etſi tunc cum introducendus eram, Johannes Fridericus Dux ***Brunſwicenſis*** me evocarit ad ſe; quod ipſum tanquam Tibi notum addere potes, quo minus Dnus. Varignonius quæſtionem miretur.

Noſſe etiam velim quis Auctor ***Hiſtoriæ***, utrum Dnus. ***Abbas*** Gallois, an Dnus. Fontanella qui nunc Secretarius eſt Academiæ, auctor Dialogorum de ***Pluralitate Mundorum***; & utrum ***Memoriæ Phyſico-Mathematicæ***, quæ cœptæ erant, nomine Academiæ continuentur?

Eſt quidam Machiniſta in Gallia, qui multa promittit, etiam in ***Mercurio Elegante***; [***Mercure Galant***] ejus nomen nunc non ſuccurrit, quantum intelligo nonnulla etiam executus eſt, ſed aliorum ſpem facere voluit, quæ mihi non videntur poſſibilia. Interim peritia Enchireſium & rei manuariæ non contemnendus ſaltem videtur: Promiſerat inter alia currum non evertendum [***un Caroſſe inverſable***] an, & quid, tum in hoc, tum in aliis reapſe præſtiterit, quod alicujus ſit momenti, a Dno. Varignonio diſcere poteris, cui facile etiam erit judicare ex dictis, quis ille qui deſi-

 gnatur,

Digitized by Google

gnatur, & quem nunc nominare non poſſum. Quod ſupereſt, vale & fave.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{20}{30}$. Septembris 1698.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

P. S. Hæc jam dudum ſcripſeram, una cum Examine *Gregoriano*, ſed deſcriptionem & expeditionem varia diſtulere. Interea nomen Mechanici in mentem venit, credo GAROUST. * Adjeci & P. S. ſeparatum, quod, ſi ita videbitur, Dno. VOLDERO communicare poſſis.

* *Rectius* DE LA GAROUSTE.

EPISTOLA LXXXI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Catenariæ Gregorianæ *Paralogiſmis. De infinito, monadibus, & natura corporea. De lege continuitatis. De infinitis infinitorum ordinibus. De lege gravitatis* Newtoniana. *De figura fornicibus aptiſſima.*

Vir Celeberrime & Ampliſſime! Fautor Honoratiſſime!

1698 Octob. QUod litteræ meæ, quas perditas credideras, iterum comparuerint, valde lætor. Paralogiſmos *Gregorianos*, quos ego fugitiva perluſtratione monſtraveram, egregie in ordinem redegiſti. Meo judicio, minime male facies, ſi examen tuum quantocius *Lipſiam* miſeris, *Actis* † inferendum, ut videat GREGORIUS, ubi illud legerit, ſe Calculum infiniteſimalem nondum in tanta perfectione

† *Animadverſio ad Davidis* GREGORII *Schediaſma de Catenaria, &c.* Act. Er. 1699. Febr. p. 87.

Digitized by Google

fectione poſſidere, ut quidem ſibi imaginatur. Viſo Tuo examine, eoque perlecto attentius, nunc magis confirmor in eo, quod ſtatim conjectabam; quod ſcilicet pedem calceo accommodaverit; id eſt, quod ex ſolutione noſtra quæſiverit modum ſolvendi. Et hoc credo ipſi anſam dediſſe, ut tot paralogiſmos conſueret, illoſque, apparenti ſpecie faſcinatus, videre nequiverit, vel potius videre noluerit, quos procul dubio ab alio commiſſos vidiſſet. 1698 Octob.

Μεταφυσικώτερα Tua non improbo, & facile illa admittam, ut Tua δυναμικὰ; ſi modo claram eorum ideam mihi excitaveris. Reſponſiones Tuæ, pro hoc, nimis ſunt Laconicæ; ſuntque definitiones potius quam explicationes. Videtur mihi contradictio dicere omnes terminos hujus progreſſionis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, &c. exiſtere, infiniteſimos autem revera non eſſe terminos: ſi enim infiniteſimi non exiſtunt, tunc finiti tantum ſunt termini; Ergo non omnes exiſtunt, contra hypotheſim. Video quidem quo tendas, nempe non poſſe perveniri ad terminum infiniteſimum; quia quamdiu continuamus progreſſionem, tamdiu termini ſunt finitæ magnitudinis. Sed non quæritur quouſque nos, ſive actu, ſive conceptu, pervenire poſſimus; ſed quouſque a natura ipſa jam perventum fuerit. Concedis autem omnes terminos ſimul exiſtere, ergo ſane etiam infiniteſimus exiſtit, & revera exiſtit; vel revera eſt; niſi enim eſſet, non exiſteret.

1°. Per materiam per ſe, ſeu materiam primariam, ſive molem, a ſecunda diſtinctam, dicis Te intelligere id quod eſt mere paſſivum, atque ab animabus, vel formis ſejunctum. Sed *Carteſianus*, qui formarum nullam habet ideam, quique corporis naturam in extenſione unice ponit, hic Tibi replicaret, ſe neſcire quid illud ſit quod a formis ſejunctum.

2°. Incompletum dicis Tibi eſſe activum ſine paſſivo, & contra. Potuiſſes dicere materiam primam ſine forma, & formam ſine materia prima. Sed tunc *Carteſiano*, nullam diſtinctionem agnoſcenti inter materiam & formam, eadem quæ in præcedenti difficultas orietur.

3°. Si concedatur maſſam eſſe congeriem viventium, vel his

anolo-

1698 Octob. analogorum, poterit dividi in ſubſtantias individuas. Sed *Carteſiani* negabunt in Corporibus eſſe aliquid animæ analogum, vel quid illud ſit analogum, clare ſibi explicari poſtulabunt.

4°. Si Monas completa, ſeu ſubſtantia ſingularis, Tibi eſt animal, vel analogum, anima, vel forma, & corpore organico præditum; negabunt *Carteſiani*, præter hominem talem monadem dari.

5°. Concedo non longe progrediendum, ut habeamus ſubſtantiam, non ſubſtantias; unuſquiſque enim homo talis eſt. Sed corpus quod vocant inanimatum, ut ſilex, quouſque dividendus erit, ut habeas ſubſtantiam, non ſubſtantias? ſilex enim, ſecundum Te, non eſt ſubſtantia, ſed ſubſtantiæ.

6°. Nunquam veritus ſum ne materia, ſcilicet ſecunda, componatur ex non quantis, ſed ne componatur ex punctis forma præditis, quia minimum corpuſculum, licet infinite exiguum, non ſubſtantiam facit, ſed ſubſtantias. Oportet ergo ſubſtantiam ſingularem eſſe punctum cum forma, non quantum cum forma; alias in plures divideretur.

Video rem totam eo recidere, ut formam, vel illud animæ analogum, clare explices. Non quidem alienus ſum admittere tertium quid in corpore, præter extenſionem & impenetrabilitatem, ſi modo æque claram ejus ideam habere poſſim, ac habeo extenſionis & animæ. Scio etiam tertium illud poſſe exiſtere, licet ejus eſſentiam clare concipere nequeam; contra quorumdam *Carteſianorum* pertinaciam, qui ſtatuunt id quod clare & diſtincte a nobis concipi non poteſt, non exiſtere; oporteret enim prius demonſtraverint, ſe clare & diſtincte percipere poſſe quicquid exiſtit: alias non minus abſurde concludunt, quam cæcus faceret, qui ex eo quod ſolem nunquam viderit, neque videre poſſit, argumentari vellet, illum non exiſtere: Id quod non tantum ſemel ipſis objeci, ſed antiquæ cantilenæ obſtinate inhærentes, ſurdi ſunt, ſuamque perpetuo obtrudunt regulam claræ & diſtinctæ perceptionis, juxta quam rem eſſe, vel non eſſe, judicant. In horum igitur gratiam, Tuam pleniorem explicationem deſiderarem, ut data occaſione illis occurrere poſſim. Quid? ſi vocabulum *anima analogi* vel *forma*, quod odio-

odioſum eſt, relinqueres; illamque diceres conſiſtere in conatu quodam inſito, vel vi primitus impreſſa, ſine qua corpus non eſſet corpus, ſed pura extenſio uniformis, quam ita appellares, loco Veterum materiæ primæ; abſolveres credo negotium longe facilius, atque felicius aſſuefaceres novis terminis mentem *Carteſianam*, efferatam quaſi veteribus. Poſſent enim hinc omnia Tua dynamica æque facile ſalvari; & naturæ phænomena, ut elaſticitas corporum, impenetrabilitas, conſervatio quantitatis virium, &c. explicari. Nec puto *Carteſianos* talem conatum inſitum, ſeu vim impreſſam jure exſibilare poſſe: coguntur enim, & ipſi, ſtatuere materiam cum motu ſimul creatam eſſe. Quid ni ergo etiam cum motu infinite tardo? id eſt, cum conatu ad motum, ſeu cum tali vi, quam Tu vocas aptiſſime mortuam, qua unamquamque materiæ particulam, quantumvis exiguam, donatam eſſe exiſtimarem, & quidem pro diverſitate complicationis horum conatuum, directionum, ſeu tendentiarum, putarem diverſa hujuſmodi corpora oriri. Sane non auſim negare creationem univerſi conſtitiſſe duntaxat in varia iſta impreſſione conatuum; nolim tamen aſſerere extenſionem illam uniformem, ſeu materiam primam, præextitiſſe ab æterno; adeoque cum Deo unicam ſubſtantiam fuiſſe; ne ſpinoſizare videar: ipſa enim illa diffuſione virium, extenſionem concreatam eſſe, mihi ſufficit dicere. 1698 Octob.

Tranſmiſi ſtatim Voldero poſt-ſcriptum tuum; † habebit, non dubito, etiam ſuos ſcrupulos, circa ea quæ de formis dicis. Conſului ipſi, ut ad Te ipſum ſcribat, ſi quid monendum haberet. Quæ ibi habes de continuitatis lege, impenſe mihi placuerunt; ſed quod obſervas celeritatem non uno impetu imprimi, ſed a quiete per omnes gradus intermedios aſcendere, Te non invito dixerim, etiam me habuiſſe tales cogitationes jam a longis annis. Id vero paulo aliter exprimere ſolebam, dicendo Naturam nihil ex abrupto, neque incipere, neque finire; eodem modo ac omnis curva principio & fine careat; id eſt, vel in ſe redeat, vel utrinque in infinitum abeat, ſalvis tamen nonnullis exceptionibus; hinc quantitates

† *Idcirco illud deeſt.*

Digitized by Google

1698 Octob. titates ſucceſſive creſcentes vel decreſcentes, non ſolum non per ſaltus augeri & diminui poſſe, ſed etiam non poſſe generari, vel deſtrui uno impetu. Et hoc fere eſt ex præcipuis rationibus, quod me induxit ad conjecturandum, annon forte tot gradus infinitatis ſint ſupra noſtrum magnitudinum genus, quot infra ſunt gradus infinitæ parvitatis; vel ſaltem [quia infinitum & infinite parvum in rerum natura Tibi diſplicet] quemadmodum microſcopiis detegimus animalcula incomparabiliter minora quam nos, & cætera animalia nobis conſueta; & procul dubio iſta animalcula, ſi & ſua haberent microſcopia, iterum detegerent alia ſe iterum incomparabiliter minora, & ſic porro: Unde cum naturæ non ſit conſentaneum, ſecundum meum principium, ex abrupto ſubſiſtere, colligo [rideas, per me licet,] alia animalia in rerum natura poſſe exiſtere, quæ nobis, noſtriſque animalibus conſuetis, in eadem ratione majora ſint, in qua illa animalcula microſcopio detecta ſunt minora, quæque nos, in noſtro mundo, ſuo microſcopio intueri ſolent, ut nos intuemur talia animalcula innumera. Et alia rurſus eſſe poſſe animalia incomparabiliter illis majora, ſicque tot gradus pono aſcendendo, quot inveni deſcendendo. Nam non video [ut jam ſerio loquar] cur nos, noſtraque animalia, ſupremum gradum conſtituere deberemus; quia, ut clare patet, etiam talia animalcula incomparabiliter nobis minora, ſibi adulari poſſent, ſe ſuamque guttulam, in qua habitant, totum conſtituere univerſum; ſi modo haberent animam rationalem, ut ita ratiocinari poſſent. Concede, vel finge ſaltem, granulum piperis [in quo pariter multæ myriades animalculorum, teſte Leuwenhoeckio, & mea ipſa autopſia, microſcopio conſpiciuntur] habere ſuas partes noſtri mundi partibus per totum proportionales; ſcilicet ſuum Solem, ſuas Stellas fixas, ſuos Planetas cum Satellitibus, ſuam Tellurem ornatam montibus, campis, ſylvis, rupibus, fluviis, lacubus, maribus, variiſque animalibus: Credi'ſne hos pipericolas, qui omnia iſta objecta ſub eodem viſionis angulo, adeoque ſub eadem magnitudine aſpicerent, qua nobis noſtra apparent, non eodem jure putare poſſe, extra ſuum granulum nihil eſſe, quo nos putamus noſtrum mundum omnia complecti? Nam quamnam, quæſo, haberent

berent rationem, ſeu quam experientiam, quæ contrarium ipſis perſuaderet, quæque miſellis iſtis animalculis oſtenderet alium eſſe mundum ſuo incomparabiliter majorem, cum incolis pariter incomparabiliter majoribus? Jam vero, ſi iſti pipericolæ id ſcire non poſſint; quis ergo noſtrum ſcit, annon totus noſter Mundus aſpectabilis forte ſit granum, reſpectu alius incomparaliter majoris? Eſt enim utrobique par ratio. Sed aliæ mihi ſunt conjecturæ, quas hic recenſere nimis longum foret, quæ tamen ex ea lege naturæ, nunquam abrupte incipientis vel deſinentis, egregie confirmantur. 1698 Octob.

Incidit jam, de lege continuitatis cogitanti, quod apud Newtonum alioſque legiſſe memini, gravitatem corporum extra Terram in duplicata eſſe reciproce ratione diſtantiarum a centro, ſed intra Terram eſſe directe in ſimplici ratione diſtantiarum. Hoc mihi videtur aliquo modo adverſari continuitatis legi, dum incrementa gravitatis in ipſa Terræ ſuperficie quaſi per ſaltum degenerarent in decrementa. Nam ſi ad rectam, a centro Terræ prodeuntem, concipiantur applicari aliæ rectæ gravitatem in ſingulis a centro diſtantiis exprimentes; erunt applicatæ extra Terram ad Hyperbolam ſecundi gradus, intra Terram vero ad lineam rectam; adeoque hæ duæ lineæ in mutua interſectione, ubi ab una ad aliam tranſitur vel ſaltatur, continuitatis legem violant. Quid de hoc ſentias, intelligere velim.

Quæ ſcire deſideras, curabo diligenter ut diſcam a Varignonio; Oblitus es remittere mihi ejus litteras. Examen ſolutionis *Gregorianæ*, quia non petis, non remitto; ſi vero nullam ejus deſcriptionem retinuiſti, remittam ſtatim; fac modo id reſciſcam quantocyus. Vale & fave.

Amplitudini Tuæ

Devotiſſimo

J. Bernoulli.

P. S. Quod Catenaria vera ſit curvatura fornicis, ex eo patet,

Fff 2 quod

1698 Octob. quod omnes partes catenæ dum libere pendent, eum ſitum ſumunt, ut inter ſe æquilibrentur; unde fit ut ſi tota catena, eum partium ſitum retinens, circa horizontalem converti intelligatur, donec verticaliter ſurſum erigatur, partes catenæ eundem ſitum etiamnum ſervare debeant; cum enim nulla pars alteram magis extrorſum urgeat, quam ipſa ab ea extrorſum urgetur, propterea quod directio gravitatis partium non fuerit mutata, ſed tantum in contrarium determinata; ſane altera alteram ſuffulcire, adeoque tota catena, licet flexilis, ita arcuata manere debet, ad inſtar fornicis rigidi: Et ſic catenaria aptiſſima eſt figura fornici concilianda. Sed fallitur Gregorius quod putat ordinariam Catenariam, quam ſcilicet inducit catena uniformis, ſolam aptam eſſe pro fornice. Liquet enim clare fornicem poſſe eſſe circularem, parabolicum, & cujuſcunque alterius figuræ, ſi modo lapides quadratarii [*les vouſſoirs*] fornicem conſtituentes, debiti ponderis fiant, pro ratione ponderis partium catenæ non uniformis, quæ libere pendendo eamdem curvaturam, quam fornici dare voluimus, indueret. Ridiculum hinc eſt, quod Gregorius dicit fornices vulgares non ad figuram Catenariæ ordinariæ factos, ideo tantum ſe ſuſtentare, quod cum habeant ſat magnam latitudinem, ſemper intra ſuos limbos contineant veram curvaturam catenæ. Si enim hoc eſſet, interior fornicis limbus ſemper corrueret; vel ſi murus extrueretur ſuper duabus columnis, non totus murus corruere deberet, ſed portio tantum quædam excidere, quæ cavitatem relinqueret, ad figuram catenæ formatam: Et ſic natura ſponte ſibi faceret fornicem; quod lepidum eſt. La Hirius in ſuo *Tractatu Mechanico*, Propp. 123. 124 & 125, affinitatem inter fornices & Catenarias ſuboluiſſe videtur; nec tamen rem ſatis aſſequi potuit, noſtro Calculo deſtitutus. Vidit aliquid; quid autem viderit, ipſe non intelligit.

EPIS-

EPISTOLA LXXXII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De infinito, natura corporis & Monadibus. De lege gravitatis Newtoniana. *De fornicum curvatura. Varia.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

QUia Tibi non diſplicent animadverſiones meæ in *Gregorianam* Catenariæ ſolutionem, rogo ut eas Tuis incluſas ad Dnum. Menckenium pro *Actis* mittas; ita ut neceſſe non ſit ei indicare a quo ſint. Dudum enim pollicitus eſt ſe *Actis* inſerturum, ſi quid ſine ſtomacho moneremus. 1698 Novemb.

Dicis meas circa μεταφυσικώτερα illa nimis eſſe laconicas; ſed dedi, ni fallor, operam, ut loquerer accurate & rotunde. Quod ſi quæ dubitationes ſuperſunt, iis reſpondendo ſatisfacere conabor. Ais me attuliſſe definitiones potius quam explicationes. Sed utinam ſemper definitiones afferrentur! nam illis explicationes virtute continentur. Quod terminos infiniteſimos attinet, videtur mihi non tantum ad eos non poſſe perveniri, ſed etiam eos non eſſe in natura, id eſt, non eſſe poſſibiles; alioqui fateor, ut jam dixi, ſi concederem eſſe poſſe, concederem eſſe. Videndum ergo quanam ratione demonſtrari poſſit, poſſibilem exempli gratia, eſſe lineam rectam infinitam, & tamen utrinque terminatam. Sed ad tuos numeros venio.

Ad 1. Cum dixi materiam primam eſſe id quod eſt mere paſſivum, & ab animabus ſeu formis ſejunctum, bis idem dixi; ſeu perinde eſt ac ſi dixiſſem eſſe mere paſſivam & ab omni activitate ſejunctam. Formæ enim nihil aliud mihi ſunt, quam Activitates ſeu Entelechiæ, & ſubſtantiales quidem ſunt Entelechiæ primitivæ.

Ad 2. Malui dicere incompletum eſſe activum ſine paſſivo, &

 paſſi-

1698 Nov. paſſivum ſine activo, quam materiam ſine forma, vel contra; ut ſcilicet potius explicatum ponerem quam explicandum, & ut quodammodo uterer conſilio tuo antequam dares, quando minus activitatum, quam formarum nomine offenditur vulgus Neotericorum.

Ad 3. *Carteſianos* negantes in corporibus eſſe aliquid animæ analogum non debemus morari, cum nullas habeant rationes negationis; nec ſequitur quod non poſſumus imaginari id non eſſe.

Ad 4. Ridiculum mihi dudum viſum eſt, naturam rerum adeo fuiſſe pauperem vel avaram, ut ſoli maſſæ tantillæ, qualis humanorum eſt corporum in hoc noſtro Globo proſpiceret de animabus; cum poſſet omnibus, nullo ad cætera ſua deſtinata inpedimento.

Ad 5. Quouſque ſilex dividi debeat, ut occurrant corpora organica, adeoque Monades, haud ſcio; ſed facile agnoſco ignorantiam in his noſtram nihil præjudicare naturæ.

Ad 6. Puto nullum dari minimum Animal vel vivens, nullum ſine corpore organico, nullum cujus corpus non dividatur rurſum in plures ſubſtantias. Ergo nunquam devenitur ad puncta viva, ſeu formis prædita.

Si claram habes ideam animæ, habebis & formæ; eſt enim idem genus, ſpecies variæ.

Optime judicas, quæ nos diſtincte & clare non percipimus, ideo rejici non debere.

Boni illi *Carteſiani*, quidquid jactent de ſua clara & diſtincta perceptione, mihi ne extenſionem quidem ſic percipere videntur.

Cæterum, ſi animam vel formam concipiamus ut primam activitatem, cujus modificatione oriantur vires ſecundæ, ut extenſionis modificatione oriuntur figuræ, puto nos intellectui ſic ſatis conſulere.

Nempe ejus, quod eſſentià ſua mere paſſivum eſt, nullæ poſſunt eſſe modificationes activæ; quoniam modificationes limitant magis, quam augent, vel addunt, itaque præter extenſionem, quæ eſt ſedes vel principium figurarum, debemus ponere ſedem vel πρῶτον δεκτικὸν actionum, nempe animam, formam, vitam, entelechiam primam, ut appellare lubebit.

Prorſus

Prorſus probo conſilium Tuum, ut apud *Carteſianos*, aut ſimiles, abſtineamus mentione materiæ primæ & formæ ſubſtantialis, contenti mentione maſſæ per ſe activæ, & entelechiæ, ſeu activitatis primitivæ, animæ, vitæ. 1698 Nov.

Optime etiam ſentis complicatione virium inſitarum oriri corpora omnia in mundo, nec dubito quin materiæ ipſi coævæ ſint vires; quin arbitror, materiam per ſe ſine viribus ſubſiſtere non poſſe. Puto tamen, aliud eſſe entelechias primitivas, ſeu vitas, quam vires mortuas, quæ & ipſæmet fortaſſe ſemper oriuntur ex vivis; ut apparet, cum conatus recedendi a centro, qui inter vires mortuas computari debet, oritur ex vi viva circulationis. At vita, vel entelechia, aliquid amplius eſt, quam conatus aliquis ſimplex mortuus; puto enim ineſſe ei & perceptionem & appetitionem, quaſi in animali, utramque reſpondentem præſenti ſtatui organorum.

Plane ad mentem meam differis, mutationes non fieri per ſaltum. Præterea non irrideo, ſed plane profiteor eſſe animalia in mundo, tanto majora noſtris, quanto noſtra ſunt majora illis microſcopiorum animalculis. Neque ullum natura terminum novit. Et fieri poteſt viciſſim, imo fieri debet, ut ſint in minimis pulviſculis, imo Atomulis, Mundi noſtro non inferiores pulchritudine & varietate; neque quicquam prohibet, quod magis mirum videri poſſit, animalia moriendo in tales mundos transferri; ego enim mortem nihil aliud puto eſſe, quam animalis contractionem.

Gravitatem eſſe in duplicata ratione reciproca diſtantiarum, mea dudum fuit ſententia ante Newtoni opus, in quam deveni non tantum ſucceſſu a poſteriori, ſed etiam ratione a priori, quam miror ipſi non animadverſam. Nempe abſtrahendo animam a phyſica ratione gravitatis, manendoque in terminis notionis mathematicæ, conſidero gravitatem, ut attractionem factam radiis quibuſdam, ſeu lineis attractivis, exeuntibus a centro attrahente; itaque, ut in radiis luminis denſitates illuminationis, ita in gravitatibus attractionis, uno verbo, radiationis denſitates erunt in ratione duplicata reciproca diſtantiarum a radiante. Puto autem eandem legem nonniſi per gradus mutari appropinquando ad Terram, ubi ſcilicet ip-

ſum

Digitized by Google

1698 Nov. TAB.XV. ſum radians minus incipit habere naturam puncti; ſed ubi in Terram ipſam inciditur, poteſt nova Lex oriri, ut ſi (*Fig.* 86.) corpus, quod ivit curva AB poſt eat recta BC, ob novam cauſam. Quanquam omnia expendendo, ne ſic quidem violari debeat Lex continuitatis, nec reapſe violetur, etſi linea mutetur.

Quod Catenaria ſit linea fornicis, fortaſſe locum habet, ſi fornix eſt ſuperficies, ſeu ſine craſſitie vel altitudine, ita ut ejus ſectio verticalis ſit linea, ſed ſi habeat craſſitiem, ita ut ſectio ſit ſuperficies & in ipſa craſſitie concipiatur, quod impediat rupturam, ut in trabibus a GALILÆO, & paulo adhuc aliter a me olim in *Actis Lipſienſium* * conſideratis, patet alia in conſiderationem venire debere, atque adeo lineas fornicum adhuc eſſe quærendas, cum illi plus quam uno extremo ſuſtentantur. Nam cum gravia in longitudinem ex uno fulcro projecta ſunt; tunc per ea quæ olim a me expoſita ſunt, principium ſolvendi habetur.

Litteras VARIGNONII me remiſiſſe putabam, ſed præter opinionem adhuc penes me repertas nunc remitto cum actione gratiarum.

Nihil ne amplius a Dno. *Marchione* HOSPITALIO, Dno. VARIGNONIO, aliiſque amicis ad Te pervenit, unde proficere poſſim? Quid Dnus *Marchio* HOSPITALIUS? an in valetudinis gratiam meditationibus nuncium remiſit? an ſibi canit & Muſis?

Quid Analytica noſtra? In quibus indies aliquid utile a Te præſtari non dubito. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 18. Novembr. 1698.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

P. S. Problemata Dno. *Fratri* vel aliis propoſita, vellem & Dno. NEWTONO communicari curaſſes, pro incremento Scientiæ.

* *Demonſtrationes novæ de Reſiſtentia Solidorum*, *Auctore* G. G. L. Act. Er. 1684. Jul. pag. 319.

tiæ. Accipio jam & *Acta Octobris*, ubi Tua quædam, † in quibus, cum alia valde, tum id probo, quod Dno. *Fratri* illic ita reſpondes, ut nullam offenſæ cauſam jure habere poſſit. Unum addo me Tibi novam applicationem Calculi differentialis non quaſi pro Tuis communicaſſe (ut ex dictis videri poteſt) ſed cum celare poſſem, libere, & generoſe, & ut eſſet qui uteretur, quando id mihi non ſatis licet. 1698 Nov.

EPISTOLA LXXXIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De natura corporis & monadibus. De infinito. De lege gravitatis. De fornicum figura. Hortatur ut meditationes dynamicas in lucem emittat.

Vir Ampliſſime & Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

ANimadverſiones Tuas in *Gregorianam* ſolutionem ad *Acta* mittam prima occaſione, qua Dno. MENCKENIO ſcripturus ſum; ſed vereor ne Te Auctorem ſuſpicetur, ubi viderit correctiunculas hinc inde Tua manu ſcriptas. 1698 Dec.

Concedo definitionibus contineri explicationes: ſed oſtendendum eſt quod ſint definitiones rei, non nominis; ſecus enim non magis ſequitur rem ita ſe ſe habere in rerum natura, quam ſequitur Centaurum exiſtere, ex eo quod illum clare definio, & explico, dicendo; Centaurus eſt animal corpus habens ex humano & equino compoſitum : quamvis non negem, quin forte talis aliquis exiſtat, cum multa exiſtant monſtra. Ita pariter tua μεταφυσικώτερα poſſunt eſſe vera; ſed veritatis demonſtrationem expeto. Vellem, exempli gratia, mihi demonſtres corpora, quæ vulgus vocat inanimata,

† *Theorema univerſale rectificationi linearum Curvarum inſerviens*, &c. Act. Erud. 1698. Oct p 462. *vel* Opp. Tom I. N°. L. pag. 149.
Item, *Annotata in ſolutiones Problematum quorundam borum* &c. A. E. 1698. Oct, p. 466. *vel* Opp. Tom. I. N°. LII. pag. 262.

1698 ſuas habere perceptiones & appetitiones, adeoque ſuas animas, &
Decemb. quidem unumquodvis innumeras; quatenus ſcilicet conflatum eſt ex innumeris ſubſtantiis, ſeu Monadibus.

Sed litterarum Tuarum filum ſequor. Quantum ad terminos infiniteſimos, aut Tu me, aut ego Te non intelligo. Dico, ſi infiniteſimi non eſſent in natura, tunc utique forent tantum termini numero finiti; ergo non omnes exiſterent, contra hypotheſim. Sed ecce hoc facio dilemma: Numerus terminorum in natura exiſtentium, aut finitus eſt, aut infinitus; tertium non datur. Si finitus; tunc non omnes exiſtunt, quia poſſent dari plures: ſi infinitus; ergo eo ipſo exiſtit infiniteſimus & qui eum ſequuntur. Dices forſan eſſe terminos numero infinitos, & tamen ſingulos finitæ magnitudinis; ceu manifeſtum eſt in hac progreſſione $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. ubi neceſſario infiniti ſunt termini magnitudinis finitæ; nam ſi tantum eſſent finiti numero termini magnitudinis finitæ; tunc numerus terminorum foret determinatus; quod eſt abſurdum. At ſi ex altera facie progreſſionem conſidero, quatenus ſi infiniti numero ſunt termini, neceſſario infiniteſimus exiſtit, concludo hunc neceſſario debere eſſe infinities minorem termino finito; id eſt, debere eſſe infinite parvum. Jam ad numeros pergo.

1°. Dicis materiam primam [quam ego extenſionem uniformem, ſeu potius informem nominarem] eſſe id quod eſt mere paſſivum, & ab animabus ſeu formis ſejunctum: Et alibi dicis materiæ primæ coævas eſſe vires, ſeu formas; illamque ſine his ſubſiſtere non poſſe. Ergo paſſivum ab activo realiter ſejunctum non eſt, nec eſſe poteſt, ſed mentis tantum abſtractione, quatenus illud ſine hoc conſiderare poſſum, ut in Geometricis facimus. Sed quæro tamen, annon Deus per omnipotentiam ſuam potuiſſet creare paſſivum ſine activo, ſeu materiam primam ſine animabus, vel formis; ſiquidem animas, nempe Spiritus & Angelos, ſine materia, ſeu activum ſine paſſivo, creaverit. Et poſito potuiſſe creare ſolam extenſionem, ſeu materiam ſine forma, annon tuto ſupponere poſſemus vacuum? ibi enim eſſet extenſum ſine corpore, & tamen

men non eſſet nihil, ſed ſubſtantia extenſa diſtincta a corpore; unde hoc vacuum a *Carteſianorum* quidem argumento refelli non poſſet. 1698 Dec.

2°. Capio mentem Tuam de incompleto: ſed ſi activum ſine paſſivo, ſeu forma ſine materia, eſt incompletum quid; ſequi videtur, Spiritus, Angelos, & ipſum Deum, qui Ens eſt completiſſimum, eſſe tamen incompletos. Video autem quid ſis reſponſurus, nempe Te hic intelligere incompletum compoſitionis, non perfectionis. Diſpice tamen, ne malevolis & invidis cavillandi, & in deteriorem ſenſum detorquendi, cauſam ſuggeras.

3°. Veriſſimum eſt *Carteſianos* negantes in corporibus eſſe aliquid animæ analogum, ſuæ negationis non habere rationem; ſed affirmanti incumbit probare. Interim non dicunt, quantum ego ſcio, quod non poſſumus imaginari, id non eſſe: potuiſſent enim quotidiana experientia falſitatis convinci; cum cæcus, exempli gratia, Solem imaginari non poſſit, & tamen Sol exiſtat: ſed id non eſſe aſſerunt, quod clare & diſtincte concipere nequimus; quod tamen, meo judicio, æque abſurdum eſt ac prius.

4°. Ergo datur particula ſilicis, quæ ſubſtantia eſt, non ſubſtantiæ. Dixeras autem corpus quodvis non eſſe ſubſtantiam, ſed ſubſtantias.

5°. Quia arbitrabar Te in ea eſſe ſententia, nullum corpuſculum tam exiguum eſſe, quod poſſit dici unam eſſe ſubſtantiam, & non plures; merito me inferre credebam, ſubſtantiam ſingularem non eſſe extenſam, ſed merum punctum. Sed ex articulo præcedente, video Te comprehendere ſubſtantias in ſubſtantia.

Non valet conſequentia; ſi habeo ideam animæ, ergo & formæ; quia eſt idem genus, & ſpecies variæ. Habeo ideam animalis, tanquam generis, non vero hujus, vel illius ſpeciei animalis, quod nunquam, nec pictum, nec vivum vidi: Habeo etiam unius ſpeciei ideam, ita ut non ſtatim alterius ſpeciei ideam habeam, licet ſub eodem genere contineantur.

Fateor nonnullas vires mortuas oriri ex vivis, ut conatus recidendi a centro, vis elaſtri, gravitas, &c. ſed non ideo ſequitur, non poſſe dari etiam conatus primitivos & inſitos; & niſi in hujuſmo-

1698 Dec. di conatu poſueris Tuas Entelechias primitivas, ſeu vitas, fateor iterum me non poſſe aſſequi in quo illas conſiſtere facias. Dicis ipſis ineſſe perceptionem & appetitionem; Ergo quid diutius cunctaris? Dic Entelechias illas Tuas eſſe animas rationales; ſolius enim animæ rationalis eſt percipere & appetere, uti *Carteſiani* dicunt; & ſic Te diſpenſabunt ab ulteriori explicatione, ſed negabunt hujuſmodi animas corporibus competere.

Non miror Te mihi aſſentiri, quod conjecerim eſſe animalia in mundo, tanto majora noſtris, quanto noſtra ſunt majora illis microſpiorum animalculis: Tibi enim totum univerſum eſt congeries animalium. Sed ego magis proprie id ſumo, ſtatuendo illa animalia, nobis noſtriſque animalibus incomparabiliter majora, eſſe in ſenſu vulgari animalia, habentia corpus & membra noſtris ſimilia, vel eorum loco aliquid analogi; interque illa animalia, eſſe etiam intelligentia, ſeu ratione utentia, id eſt, homines. Sed revera mirum mihi videtur, quod dicis animam moriendo transferri in mundum, ſuo, in quo vixit, incomparabiliter minorem; & mortem nihil aliud eſſe quam animalis contractionem: hoc quodammodo ſapit *μετεμψύχωσιν Pythagoricam.*

Prout Mathematice explicas gravitatem, abſtrahendo a cauſis phyſicis, video clare legem rationis duplicatæ reciprocæ diſtantiarum a radiante, nonniſi per gradus mutari appropinquando ad Terram; ubi ſcilicet ipſum radians minus incipit habere rationem puncti. Sed non video, ubi in ipſam Terram inciditur, novam Legem oriri: eſt enim intra & extra Terram eadem cauſa gravitatis; præterea, radians naturam puncti perpetuo ſervat; id enim eſt centrum Terræ, verſus quod gravia detruduntur. Unde non capio quod Newtonus dicit, non centrum tantum, ſed omnia reliqua puncta attrahere. Demus autem talem attractionem ſingulis Terræ punctis ineſſe, adeoque illam agere in corpora cum ſunt extra Terram eadem lege, qua quando ſunt intra eandem; non video cur, in ipſa Terræ ſuperficie, talis ſubitanea mutatio accidere debeat.

Puto Catenariam etiam locum habere poſſe pro figura fornicis, licet cum craſſitie, vel altitudine fiat, ſi modo centra gravitatis lapidum

pidum quadratariorum fornicem conſtituentium, ſint in Catenaria; 1698
palam enim eſt catenam flexilem, quamvis illa ſit nullius ponderis, Dec.
ſi in æqualibus diſtantiis oneretur ponderibus æqualibus, etiam tunc debitam ſuam figuram induere: ſeu ſi concipias ipſam catenam gravem & flexilem, ſed cum craſſitie aliqua, pendere ab extremitatibus, & ſponte induere curvaturam; & ſi jam intelligas in hoc ſitu rigeſcere, & circa horizontalem ſurſum converti, habebis hoc modo fornicem cum craſſitie, qui ſola diſpoſitione partium ſe ſuſtentat; ad quam, ni fallor, in conſtructione fornicis primario attendendum eſt: quantillum enim illud ſit, quod tenacitas materiæ contribuit, vel exinde patet, quod fornix, ni debitam habeat figuram proprio pondere, utcunque exiguo, corruat, etſi nullum aliud onus ſuperſtructum adhuc ſit.

Diu eſt quod nihil litterarum acceperim a Dno. Varignonio, quod miror; jam ante ferias ipſi miſi replicationem *Diario* * inſerendam, ad reſponſionem *Fratris*; mihi tunc quidem reſcripſerat ſe eam accepiſſe, cum jam ſub prælo eſſent ultimæ pagellæ, quæ imprimendæ adhuc erant ante ferias; quibus autem finitis, ſe ſine mora ſchediaſma meum imprimi curaturum. Interim jam a Divi Martini feſto redincepti ſunt labores, nec tamen mihi ſcribit quid factum ſit: vereor ut valeat.

Annus eſt & plus quod ne γρῦ quidem ab Hospitalio acceperim. At ecce epiſtolam Volderi, ubi invenies nonnullas objectiones contra Tua dynamica, pleraſque jam a Papino & me olim factas; ſi ad eas reſpondere dignaris, poteris ad me dirigere reſponſionem, quam ipſi mittam. Quamvis conſultius putarem, ut Tute ad ipſum ſcriberes; unde libertatem captaret ad Te viciſſim ſcribendi. Meo judicio, etiam non male egeris, ſi Dynamicam Tuam, quam ſupprimis, & cujus ſpecimina tantum hactenus dediſti, plene in lucem emiſeris, una cum Tuis reſponſionibus ad objectiones Tibi factas; ita enim, ſemel pro ſemper, labore reſpondendi defungeris, qui Tibi alias ad nauſeam uſque repetendus erit. Accenderet ſpero nobis lucem pro meliori Metaphyſica;

* *Inſerta eſt* 40°. *Diario a. d.* 8. *Dec. Vid.* Opp. Tom. I. N°, XLVII. p. 231.

Digitized by Google

1698 Dec. phyſica; quam ſi ab ullo alio a Te inprimis exſpectamus; quamque etiam Te promiſiſſe memini. Habemus duas Philoſophias, Veterem & Novam, ſed in utramque extremitatem peccantes; quid ſi Tu tertiam conderes, ſervando medium inter utramque? Te enim aptiorem neminem novi ad hoc negotium. Non dubito quin ſyſtema, ſi quod componeres, feliciſſimum haberet ſucceſſum. Sunt enim in *Batavis* nonnulli egregii Viri, qui hunc Tuum ingenii fœtum fortiter foverent, & defenderent; interque illos ipſe Dominus VOLDERUS, qui ſi Tua principia, (cum *Carteſiana* tanquam inſufficientia, ut ipſe mihi faſſus eſt, jam a longo tempore deſeruerit) ſemel probe percepiſſet, ea gnaviter propagaret, ſuiſque diſcipulis, quorum ſemper inſignem numerum habet, adeo inculcaret, ut forte brevi dominium haberet ſupra Philoſophiam *Carteſianam*, & *Ariſtotelicam*, illaſque quaſi reconciliaret. Rogo Te etiam atque etiam, ut de hoc cogites, deque Orbe philoſophico bene mereas. Conſule quæſo nobis, & poſteritati; Tuoque nomini exige monumentum.

. . . .

Ob preſſam ſcriptionem in margine non ſatis intelligo an diſpliceat, quod in *Actis* mentionem fecerim novæ Tuæ applicationis Calculi differentialis; ignoſce mihi; id non feci animo derogandi Tibi, ſed potius inventum Tuum exaggerandi; nec puto me dixiſſe quod id mihi communicaveris pro meis, ſed ex occaſione meorum, quod ipſe agnoſcere videris in litteris Tuis. Da igitur veniam, ſi hac in parte peccavi; rei circumſtantia id poſtulabat. Potuiſſes me celare; non nego: Ego vero generoſius me egiſſe puto, ſi quid communicavero, quam ſi celaſſem. Vale & fave.

Groningæ 6. Decembris 1698.

Amplitudini Tuæ

Devotiſſimo

J. BERNOULLI.

EPIS-

EPISTOLA LXXXIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De infinito, Natura Corporis & Monadibus. Varia.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

CUm Domini Volderi epiſtola Tibi ſcripta pene unice ad mea pertineat, conſilium Tuum ſecutus ipſe reſpondi. Vereor tamen ne nimis prolixe; ſed malim in hanc partem peccare, & contrahendi otium non fuit. Rogo autem ut reſponſionem meam tranſmittas, & ubi eam firmare, illuſtrare, imo & corrigere opus videbitur, id ne omittas. Nunc ad Tuas venio, ubi cogor eſſe brevior, cum non ſatis ad ambas ſuppetat tempus. 1698 Dec.

Hactenus quædam per modum hypotheſeos affirmo, quæ demonſtrare majoris molis foret: & ſic interim explicationes vel definitiones pro demonſtrationibus ſufficiunt, modo phænomena faveant.

Non tam dico corpora, quæ vulgo inanimata vocantur [ut ſilices] habere perceptionem & appetitum quam ipſis talia quæ habeant ineſſe, ut vermes caſeo.

De Infiniteſimis res huc redit, ut probetur hæc quam adhibes, propoſitio: Si infiniti numero ſunt termini in ſerie, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. exiſtit infiniteſimus. Quid enim, ſi quilibet eorum ſit finitus, & aſſignabili intervallorum numero diſtans a primo? Nec video quid impediat concipi ſeriem conflatam non niſi ex terminis magnitudine finitis, ſed numero infinitis.

Recte judicas, paſſivum ab activo in creaturis nunquam actu ſejunctum eſſe; quid Deus potuerit, definire non auſim. Paſſivum ſolum, & vacuum, ſi non pugnant cum ipſius potentia, ſaltem pugna-

1698 Dec. pugnare videntur cum ipſius ſapientia; nec certum eſt, Deo excepto, dari Intelligentias plane ſeparatas. Et Patres plurimi in contrarium inclinavere, etiam Angelis corpora tribuentes.

Deus haud dubie eſt purus actus, quia eſt perfectiſſimus; ſed imperfecta ſunt paſſiva, & ſi aliter concipias, ſumuntur incomplete.

Homo ſubſtantia eſt; corpus ejus, ſeu materia, eſt ſubſtantiæ; idem de vivente quod in ſilice latet, dicerem.

Ut nos Analogia noſtræ animæ quodammodo concipimus alias animas & intelligentias; ita volui analogia animarum concipiendas utcunque alias, ſi quæ ſunt, Entelechias primitivas; a noſtro ſenſu nimis remotas: perfecte non concipi fateor.

Animas omnes, atque Entelechias, eſſe rationales minime neceſſe eſt; qui ſic colligunt *Carteſiani* mihi nimis præcipites videntur in judicando de ignotis ex notis.

Etiam ego facile admiſerim dari animalia in ſenſu vulgi noſtris incomparabiliter majora; & dicebam aliquando per jocum, poſſe eſſe ſyſtema aliquod noſtro ſimile, quod ſit horologium portatile Gigantis maximi.

Quoniam indicaſſe me puto, & publice etiam profeſſus ſum nec incipere nec perire naturaliter poſſe Entelechias, ſeu, ut ita dicam Atomos ſubſtantiæ; & corporis etiam organici deſtructionem nihil aliud eſſe, quam organorum involutionem; poſſibilitas illa tranſlationis in ſyſtema exiguum, ubi omnia æque bene, imo magis eſſe poſſent quam in noſtro, ex mea ſententia patet. Sed non procedo ultra poſſibilitatem. Μετεμψύχωσιν in novum animal non probo, ſed μεταμόρφωσιν, ἄυξησιν, μείωσιν ejuſdem animalis. Cæterum cum de origine animæ, aut animalis mutationibus, locutus ſum, diſerte ſum proteſtatus de animæ rationalis origine & ſtatu nihil a me definiri, Regnumque Gratiæ peculiares habere leges, præter eas quibus gubernatur Regnum Naturæ.

Non examinavi quid NEWTONUS habet de lege attractionis intra Terram, & inclino interim, ut judicio Tuo accedam. Terræ autem partes quoque, ut magnetis attrahere, veriſimile puto. De fornice res mihi altioris indaginis videtur; nec dubito Te, ubi animum intenderis, optime ejus formam poſſe definire.

Domi-

Digitized by Google

Dominum *Marchionem* Hospitalium ad Te non ſcripſiſſe miror, cum quo alias crebro commutabat litteras. Velim id non ab invaletudine, aut mutato animo, ſed ab occupationibus oriri. 1698 Decemb.

Parænesim Tuam, ut mea edam, tanquam veræ benevolentiæ ſignum accipio, & vellem per omnia expectationi ſatisfacere poſſe. Id facillimum eſt, ut edam quæ cum viris Doctis contuli per litteras. Interea conabimur progredi, neque mediocria ego mihi promitto ab ingenii Tui ope. Non ſum ita factus, ut ſtatim movear, ſi quid forte amicus dixit frigidiuscule, aut hoc a malo animo profectum putem. Tantum malebam videri ſponte quam commercio egiſſe. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 17. Decembris 1698.

Deditiſſimus
G. G. Leibnitius.

P. S. Imminentem annum novum fauſtum & felicem precor.

EPISTOLA LXXXV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De virium æſtimatione. De Infinito, & Natura Corporis. De Dei libertate. Varia.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Miſi Domino Voldero reſponſionem Tuam; efficaciter & & nitide rem expoſuiſti; religio mihi fuiſſet vel minimum immutare. Pro poteſtate tamen, quam mihi conceſſiſti, adjeci nonnulla eorum, quæ olim inter nos agitata fuere; ea nimirum quæ ad convincendum aptiora mihi viſa ſunt, qualia judicavi eſſe Tua argu- 1699 Januar.

1699 Januar. menta a priori: Actio faciens duplum tempore ſimplo eſt dupla [virtualiter] actionis facientis duplum tempore duplo &c. Item demonſtrationem Tuam, qua demonſtraſti corpus ſua vi, qua aſcendere poteſt uno tractu ad altitudinem 4 pedum, poſſe efficere ut corpus idem, vel æquales, aſcendat ad eandem altitudinem per vices. Hoc enim inprimis neceſſarium duxi; cum alias VOLDERUS dubitare potuiſſet, an elevare libram L ad 4 pedes; ideo præciſe idem ſit, quod elevare 4 Libras A, C, E, G, ad unum pedem; quia utrobique quater fiat elevatio unius libræ ad unum pedem. Id enim, quod illæ elevationes non ſunt ſimiles, id eſt, quod pedes LM, MN, NP, PQ, inæqualibus, pedes vero AB, CD, EF, GH, æqualibus temporibus percurrentur, potuiſſet ſcrupulum injicere vacillanti adhuc; quem vero mox deſeret, ubi videbit revera eandem potentiam requiri, ſive libra uno ſaltu elevetur ad Q, ſive per ſingulos pedes LM, MN, NP, PQ, novo impetu concepto aſcendat. Communicavi præterea modum meum determinandi Centrum oſcillationis, ex principio conſervationis virium; monuique ex pulcherrimo conſenſu cum *Hugeniano* Theoremate ab omnibus admiſſo, eluceſcere veritatem hujus Principii. Tandem etiam ipſi expoſui meum quondam actionis materiæ gravificæ explicandæ modum; ut ſi forte negotium faceſſeret vulgaris explicatio, meam tantiſper ſubſtitueret. Spero interim VOLDERUM parti noſtræ acceſſurum, ubi omnia ſedulo perpendere voluerit; quod ſi fiet, pro haud mediocri lucro id reputabo; præſertim ſi felix ſucceſſus incitamento Tibi eſſet ad meditata Tua, quorum quædam fruſtatim tantum dediſti, jam plene edenda, poſthabitis omnibus vulgi præjudiciis, & imperitorum hominum cenſuris. Velim conſideres, initio non quærendos eſſe turbæ plauſus, ſed æquiorum judicum, licet paucorum, ſuffragia unice reſpicienda. Quocirca libenter hic repeterem, quæ nuper monui & rogavi, ſi Te movere poſſem; ſed neſcio quid Te induxerit ad opinandum, quaſi dixerim frigidiuſcule, quod ardentiſſimo tamen animo mihi concidit. Fac prout libuerit, ut vel ſponte, vel commercio egiſſe videaris; modo partus Tuus tandem in lucem veniat; nil refert qua via. Ad reliqua litterarum Tuarum ita breviter reſpondeo.

Con-

Concedent *Carteſiani* ſilici, cæteriſque corporibus inanimatis, 1699 Januar.
poſſe ineſſe animalcula, ut vermes caſeo: ſed quemadmodum vermes non componunt materiam caſei, ſeu id quod eſt caſeus, utpote aliunde in illum translati, vel ex ovulis, ſeu ſemine generati; ita negabunt illa animalcula, quæ forte hoſpitantur in ſilice, ideo facere materiam ſilicis, ſeu id quod eſt ſilex.

Propoſitionem hanc; ſi infiniti numero ſunt termini in ſerie, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. exiſtit infiniteſimus (quam adhuc probandam mihi ſupereſſe ais, ad demonſtrationem perficiendam exiſtentiæ quantitatis infinite parvæ;) ita facile probo: ſi decem ſunt termini, exiſtit utique decimus; ſi centum ſunt termini, exiſtit utique centiſimus; ſi mille ſunt termini, exiſtit utique milleſimus; ergo ſi numero infinito ſunt termini, exiſtit infiniteſimus.

Nondum video rationem cur paſſivum ſolum, ſeu vacuum pugnet cum Dei ſapientia; hoc ſi demonſtrares, jam ſufficeret ad probandam impoſſibilitatem vacui. Quodcunque enim Dei ſapientiæ non convenit; etiam ipſius potentiæ non convenire putem. Video Te inclinare in opinionem, quod neque Angeli, nec aliæ Intelligentiæ dantur [Deo excepto] plane ſeparatæ a corporibus. Optarim eam mihi aperias fuſius; & ſimul explices, quibus ergo Corporibus Anima noſtra poſt mortem alligetur. Hac occaſione incidit mihi in memoriam, quod jam olim mihi ſcripſiſti. Te nimirum habere mirabilem opinionem de commercio animæ & corporis, per quam putes omnia intelligibiliter explicari. Eum quoque tum, prima occaſione mihi perſcribere promiſeras; quod tamen hactenus oblitus es: patere igitur ut Tui jam promiſſi Te commonefaciam.

Si Entelechiæ nec incipiunt, nec pereunt naturaliter; inceperunt tamen exiſtere in univerſali creatione. Ais corporis organici deſtructionem nihil aliud eſſe quam organorum involutionem: Ego dicerem potius organorum diſſolutionem.

Accepi nuper litteras a Dno. Varignonio, ſed nihil novi perſcripſit. Exemplar unum *Hiſtoriæ Academiæ ſcientiarum*, conſcriptæ a Dno. Du Hamel, mihi dono deſtinatum, *Amſtelodamum*

Hhh 2 miſit;

miſit; ſed ibi nuperrime nondum appulit. Ubi illud nactus fuero, Tibi perſcribam an, & qualis de Te mentio fiat.

Transmiſi etiam *Lipſiam* tuum *Examen Solutionis Gregorianæ* †, quod a celeberrimo quodam Mathematico mihi communicatum eſſe dixeram. Vale, & novum hunc annum pluresque ſequentes feliciter age.

Groningæ 7. Jan. 1699.

Amplitudini Tuæ

Devotiſſimus
J. BERNOULLI.

† 1699. Febr. pag. 87.

EPISTOLA LXXXVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De virium æſtimatione. De Monadibus. De Dei libertate & Sapientia. De harmonia præſtabilita. De Mente humana. De infiniteſimis quantitatibus.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

. . . .

1699 Januar. GRatiſſimum eſt, quod quæ ad rem conferre viſa ſunt Epiſtolæ ad Dum. VOLDERUM meæ adjeciſti. Feciſti id non tantum poteſtate a me conceſſa, ſed & jure Tuo. Præterea quid alios morari queat, Tu melius me ipſo intelligere potes. Et comparare talia ſoleo, cum eo quod ſæpe animadverti, in corrigendis Typographicis exemplis; plerumque enim aliena facilius corrigimus, quam noſtra. Eodem modo facilius animadvertit alius, quam nos ipſi, quid noſtris

noſtris deſit, præſertim qui antea iiſdem difficultatibus obhæſit, ſeque demum expedivit. 1699 Januar.

Rogo ut mihi ea, quæ Dno. VOLDERO ad hanc rem facientia ſcripſiſti communices, quo integra habeam, quæ illi expendenda ſunt data. Præſertim cum credibile ſit, reſponſionem ejus omnia eſſe complexuram.

Tuomet exemplo judico, in argumento a priori de æſtimatione actionis, illud virtualiter melius inpoſterum omiſſum iri, tantum enim turbat, ut dubitet aliquis, quaſi diverſa ratio æſtimationis, in una alteraque præmiſſarum, non poſſit concluſione in unam conjungi. Et quemadmodum ſimpliciter dicere ſufficit: Ducatus eſt duplum Thaleri, Thalerus eſt duplum ſemithaleri, ergo Ducatus eſt quadruplum ſemithaleri, ita ut non ſit opus adjicere Ducatum eſſe duplum Thaleri virtualiter, Thalerum vero eſſe duplum ſemithaleri formaliter; eodem modo ſufficit hic procedi.

Tuus quoque modus determinandi Centrum oſcillationis ex principio noſtro ſane elegantiſſimus plurimum affert lucis & confirmationis.

Modus quo agit materia gravifica, adhuc altioris eſt indaginis, neque contemnenda ſunt quæ in eam rem attuliſti, etſi mihi ea conſideranti ſubnatæ ſint dubitationes complures, quod in re a ſenſibus remota & difficili mirum non eſt.

Gratias & egi Tibi, & ago, quod exiſtimationi meæ velificaris plurimum, & ad ea me agenda hortaris, per quæ noſtra magis propagari & confirmari poſſint. Quod te frigidiuſcule ſcripſiſſe dixeram, non ad hæc pertinet, ſed ad ea quæ habebas nuperrime in *Actis Eruditorum*; ſed jam ſignificavi me non eo eſſe animo, ut talia ſiniſtre accipiam.

Fateor in caſeo eſſe partes, in quibus nulli apparent vermes, ſed quid impedit, in illis rurſus eſſe alios vermes aut plantas ſubtiliores, aliave ſui generis organica, & ſic in infinitum; ita ut nihil ſit in caſeo a talibus liberum. Id de ſilice dici poteſt.

Non dico vacuum, atomum, aliaque id genus eſſe impoſſibilia, ſed tantum non eſſe divinæ ſapientiæ conſentanea; etſi enim nihil Deus producturus ſit, niſi ſecundum leges ſapientiæ; diverſa ta-

Digitized by Google

1699 Januar. men ſunt objecta potentiæ & ſapientiæ, nec confundenda. Deus ex infinitis poſſibilibus eligit pro ſapientia ſua, quod eſt convenientiſſimum. Vacuum autem [perinde ac atomos] relinquere loca ſterilia atque inculta manifeſtum eſt; in quibus tamen, ſalvis cæteris omnibus, aliquid adhuc produci potuiſſet. Talia vero relinqui cum ſapientia pugnat. Et nihil in natura ſterile atque incultum eſſe puto, etſi multa nobis talia videantur.

Entelechiæ haud dubie ortum habent cum cæteris rebus communem; naturaliter autem de novo produci non poſſunt.

Fateor quædam organa animalium, nempe craſſa, deſtrui ac diſſolvi, ſed puto ſemper aliqua ſupereſſe, ita ut maneat animal, [involutum licet] priore aduc Entelechia præditum; nam nec migrant Entelechiæ de materia in materiam, neque unquam ſine organis reperiuntur.

Meas cogitationes de commercio vel unione Entelechiæ & corporis expoſitas jam reperies in *Diariis Eruditorum Pariſino* * & *Hagienſi* Dni. BASNAGII †. Loca nunc ſtatim indicare non poſſum. Puto tamen partim eſſe anni 1696, partim 1697 & 1698. Verum citata omnia reperies in *Dictionario* Domini BAYLII; ubi mei meminit, quod index Alphabeticus cuique Tomo [duo enim ſunt] ſubjectus indicabit. Mihi enim jam liber non eſt ad manus; *Groningæ* autem haberi non dubito.

De anima humana nihil pronuntiare auſim, quoad originem, pariter ac ſtatum poſt mortem; quia animæ rationales ſeu intelligentes, qualis noſtra eſt, peculiari ratione ad imaginem Dei conditæ, diverſis longe legibus gubernantur, quam eæ quæ intellectu carent. Neque enim Deus ſe erga Spiritus habet, tantum ut artifex ad opus, ſed etiam ut Princeps ad Subditos. Sed circa Entelechias naturalibus

tantum

* *Syſtème nouveau de la nature & de la communication des ſubſtances, auſſi-bien que de l'union qu'il y a entre l'ame & le corps, par M. D. L.* Journal des Sçavans 1695. 25. Journ. du 27e. Juin.

Eclairciſſement du nouveau Syſtème de la communication des ſubſtances, &c. Ibid. 1696. 14 Journ du 2. Avr. & 15e. Journ du 11e. Avr.

Extrait d'une lettre de Mr. LEIBNITZ *ſur ſon hypothèſe de Philoſophie, &c.* Ibid. 1696. 38e Journ. du 19. Nov.

† *Remarques ſur l'harmonie de l'ame & du Corps.* Hiſt. des Ouvr. des Sc. 1696. Fevr. pag. 274.

tantum legibus ſubjectas, cenſeo, ut dixi, eas nunquam penitus ab 1699
omni materia ſemel accepta divelli. Januar.

Fruſtra quæſivi apud Typographos librum cui Titulus; ***Doutes de Mr.*** Bernier *ſur la Philoſophie*, in Gallia ante annos aliquot editum & mihi viſum, ſed nunc non repertum. Vellem autem ideo iterum legere, quia ille *Gaſſendiſtarum* fuit Princeps; ſed paulo ante mortem libello hoc edito ingenue profeſſus eſt, in quibus nec Gassendus, nec Cartesius ſatisfaciant. Has dubitationes ejus breviter tollere & ſolutiones meas Animadverſionibus in Cartesium quas vidiſti, [quarum editionem amici flagitant] addere vellem. Si liber forte alicubi reperiri poteſt; quæſo ut me juves, quo eum vel ad tempus impetrare poſſim. Quod ſupereſt, vale, & fave.

Dabam *Hanoveræ* Januarii 1699.

Deditiſſimus
G. G. Leibnitius.

P. S. Pene oblitus eram quæſtionis, utrum extent infiniteſima? Dubitari poteſt an ſequatur: Poſitis terminis decem, datur decimus: Ergo poſitis terminis infinitis, datur infiniteſimus. Dicet enim fortaſſe aliquis, argumentum de finito ad infinitum hic non valere. Et cum dicitur dari infinita, non dicitur dari eorum numerum terminatum, ſed dari plura quovis numero terminato; & pari jure concluſurum iri: Inter numeros decem datur ultimus, qui & maximus eorum; Ergo & inter omnes numeros datur ultimus, qui & maximus omnium numerorum; qualem tamen numerum puto implicare contradictionem. Ipſe quoque non reſpondes meæ objectioni, cum monueram poſſe intelligi ſeriem infinitam numeris finitis conſtantem. Manifeſtum enim eſt, etſi poneretur Tecum ſeries ex finitis pariter & infinitis conſtans, hoc poſito poſſe intelligi partem ejus conſtantem ex meris finitis, reliqua parte infinitas complectente omiſſa. Hæc autem ſeries ex meris finitis eſſet quidem & ipſa infinita, ſed tamen nullum haberet terminum infiniteſimum. . . . .

EPIS-

EPISTOLA LXXXVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad penultimam.

De Monadibus. De Dei libertate. De vacuo & Atomis. De Commercio animæ cum corpore. De Entelechiarum ortu & interitu. De infiniteſimis. De Hiſtoria Academiæ & Pariſienſis. De Phoſphoro.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

. . . .

1699 Febr. A Dno. VOLDERO nihil hactenus reſponſi accepi; forte formalem parat reſponſionem. Quæ Tuis litteris ad eum de meo adjeci, Tibi jam in præcedentibus meis omnia narravi. Scrupulos quoſdam meos, quos putabam VOLDERO etiam ſubnaſci poſſe, & Tuas eorum enodationes, ex commercio noſtro ſimpliciter excerptas, ipſi tranſmiſi; partim ut novo concipiendi labori parcerem; partim ut hiſtoriam & modum, quo Tuus ſum factus videret, nec temere forte, vel ad Tibi complacendum, in caſtra Tua tranſiiſſe me exiſtimaret. In Argumento Tuo a priori de æſtimatione actionis, illud virtualiter, & formaliter non omiſi, quia de voluntate Tua illud inpoſterum omittendi non conſtabat; ſi tamen VOLDERUM hoc turbaverit, poteris ipſi reſpondere, quod mihi reſponderas. Etiamſi modus meus actionis gravificæ explicandæ non ſit certus, nec certo unquam demonſtrari poſſit, valere tamen poteſt pro hypotheſi, tanquam res poſſibilis, ad os obturandum PAPINO, ſuique ſimilibus, qui, ad convellendam veram æſtimationem virium, objectioni ex vulgari gravitatis concipiendæ modo petitæ pertinaciter inhærent.

Non nego in partibus caſei, in quibus nulli apparent vermes, poſſe tamen ineſſe ſubtiliores vermes aut plantas. Sed illud quæro, an iſti vermes, præſertim conſpicui, forment ſubſtantiam & eſſentiam

eſſentiam caſei, id eſt, an ſint id, ſine quo caſeus non eſſet caſeus? An vero ſint tantum de ſubſtantia peregrina ad caſeum non pertinente? quemadmodum plerique arbitrantur generari ex ſeminibus a muſcis, culicibus, aliiſque inſectis in caſeum aſportatis. *1696* Febr.

Si vacuum, atomus, aliaque id genus divinæ ſapientiæ non ſunt conſentanea, eo ipſo ſane ea & impoſſibilia crederem. Quidquid repugnat Dei ſapientiæ, ejus etiam potentiæ repugnat. Attributa enim Dei ſunt ipſe Deus. Secus, ſi Deus poſſet facere, quæ inſipienter vel imprudenter facta eſſent, Deus non foret perfectus, quia ſe ipſum imperfectum redderet; Adeoque potentia & ſapientia Divina, earumque objecta, nonniſi ratione & diverſo concipiendi modo differunt: in Deo vero neutiquam. Deus ex infinitis poſſibilibus non eligit, ſed elegit ab æterno; imo omnia poſſibilia elegit, ... id eſt prævidit, decrevit, vel ordinavit: quæ enim non decrevit, illa & ipſi Deo ſunt impoſſibilia; quia in ſe impoſſibile eſt ſua decreta revocare; alias ſibi non conſtaret, & foret mutabilis. Sed tranſeamus hæc, & decidenda relinquamus Theologis, ne ad intricatam prædeſtinationis quæſtionem delabamur: nollem enim Tecum Religionis certamen inire. Demonſtrandum igitur reſtat, quod vacuum perinde ac atomi, licet relinquant loca ſterilia, ideo pugnent cum ſapientia Divina. Quid enim? ſi aliquis diceret talem ſterilitatem neceſſariam fuiſſe ad motum producendum, vel generatim ad ſyſtema mundi creandum. Ante mundum conditum, præter Deum, nihil utique erat: adeoque erat ſterilitas univerſalis, [ſi ita loqui fas eſt:] jam vero, ſi hæc cum Dei ſapientia non pugnavit, cur ſterilia quædam exigua pugnent, non ſatis patet. Præterea ſi loca dantur vacua, non ideo ſtatim ſunt ſterilia; ſterile enim eſt quod inutile eſt: illa autem ſuum uſum habent, ſicuti pori in ſpongia, & foramina in reti, vel cribro omnino ſunt neceſſaria ad uſum quem præſtare debent. Difficile igitur demonſtratu eſſe puto, vacua & atomos pugnare cum ſapientia divina, & tanto difficilius, quia ejus fines & ſcopi omnes fere nos latent. Quid? ſi ſemper miſeri nos homines judicare vellemus ab iis quæ nobis, bene maleve, prudenter vel imprudenter facta videntur, quid Dei ſapientiæ conveniat, quid non; dicere deberemus

1699 Febr. beremus Deum non debere permittere, ut peccata committantur; conſidero enim peccata inter actiones bonas, ſeu prava hominum cogitata inter bona, ut loca vacua inter corpora. Imo peccatum, cum non tantum nihil boni, ſed minus quam nihil, id eſt malum producat; poteſt dici ſterilius quam vacuum, quod ſimpliciter nihil corporis habet. Cæterum tamen, & ipſe credo, nulla nec vacua, nec atomos in rerum natura dari, nihilque ſterile & incultum: ſemper enim exiſtimavi quod, quamdiu nec per revelationem, nec per rationem, vel experientiam contrarium habemus, tunc ea conjecturando ſtatuere debemus, quæ Dei gloriam, potentiam, & majeſtatem quam maxime nobis ſiſtant & repræſentent. Ita, malim credere univerſum infinitum, quam finitum; plenum, quam vacuum; organizata, quam atomos; animalium infinitorum graduum varietatem, quam eorum certum numerum &c.

Quæ de commercio & unione animæ & corporis in *Diario Hagienſi* Dni. BASNAGII expoſuiſti, non vidi: vidi autem *Diarium Pariſinum* an. *1696* †, ubi tres notas harmoniæ modos, primus eſt influentiæ, ſecundus aſſiſtentiæ, & tertius præordinationis: Rejectis primo, & ſecundo; primo nimirum, quia concipi non poſſit, quomodo anima in corpus, vel corpus in animam poſſit agere, ope ſpecierum, vel qualitatum immaterialium; ſecundo vero, quia eſſet accerſere Deum ex machina, qui ſingulis momentis interveniat in re omnino naturali & ordinaria: amplecteris tertium, tanquam elegantiſſimum & Deo digniſſimum; quia ſufficit Deum utramque ſubſtantiam, animam ſcilicet & corpus, tanta cum perfectione & exactitudine formaſſe, ut alterum cum altero conſpiret, ſuas tantum proprias leges obſervando; perinde ac duo horologia accuratiſſima perpetuo conveniunt, ſine ulteriori interventu artificis horologiarii. Sed hæc ſententia non omnino nova mihi videtur: Eundem fere in modum a noſtro, Dno. BRAUNIO ſæpius explicari audivi, & ni fallor continetur in ejus ſyſtemate Theologico; ego quoque ſimiliter fere rem ſemper concepi. Legi locum in *Dictionario* Dni. BAYLII, ubi hæc citat; inter alias objectiones quas facit, depre-

† Vide Epiſt. præced.

Digitized by Google

deprehendo maximi momenti, quando objicit, mentem, tanquam ens ſimplex, non poſſe habere tot diverſas modificationes a ſe ipſa, niſi illas ab alio ente potentiore ſucceſſive recipiat; ſed in eodem ſtatu debere manere, & de una eademque re perpetuo cogitare, quamdiu ab eo non diſturbaretur; Non ſecus ac corpus a ſuo motu rectilineari nunquam ſponte deflectit: Item mentem ſuas cogitationes futuras non prænoſſe; quod tamen fieri deberet, ſi illas a ſe, non vero immediate a Deo per cauſas occaſionales haberet. *1696* Febr.

Mihi videor ſatis capere opinionem Tuam de ortu Entelechiarum: Dicis, per mortem animalium, organa tantum craſſa deſtrui ac diſſolvi, ſed ſubtiliſſima manere, in quibus eadem Entelechia ſemper operetur, ita ut maneat idem numero animal; quia, ut dicis Entelechia non migrat de materia in materiam. Hinc ſequentem formo Theoriam. Dedit, in creatione univerſi, Deus cuique Entelechiæ certam portiunculam materiæ, ſeu certum corpuſculum organicum, quod perpetuo informet, vel animet, & nunquam deſerat, ipſi ſit eſſentialis, ut ab ea plane ſeparari non poſſit; jam vero illud animalculi corpuſculum, quod ſtamina vocabo corporis animalis poſtea generati, generatione & nutritione evolvitur & expanditur, per modum receptionis novæ & peregrinæ materiæ ſe in poros inſinuantis; unde paulatim creſcit, & tandem ex animalculo inviſibili fit viſibile. Hæc autem evolutio ita peragi cenſenda, ut per corpus maximi etiam animalis æquabiliter diffuſa ſint illa prima ſtamina, quantumvis exigua; non ſecus ac concipio minimum granulum ſalis in magna quantitate aquæ dilutum, ſe ſe uniformiter cum aqua permiſcere; ſic ut nulla ſit aquæ gutta, quæ non, pro ratione ſuæ molis, de iſto granulo participet. Porro ſi corpus animalis creſcere deſiit, rurſus paulatim decreſcit, dum partes illæ adventitiæ iterum abeunt, ſeu quomodocunque deſtruuntur. Evidens eſt ſtamina illa, quæ per magnum ſpatium diffuſa erant, jam iterum contrahi & cogi in minus; donec abſumptis omnibus peregrinis, tandem in priſtinam ſuam parvitatem redigatur. Eo ſane modo, quo concipio granulum ſalis, in aqua dilutum, paulatim aquæ exſiccatione, coctione, evaporatione vel percolatione iterum pedetentim coarctari, & tandem in minimam ſuam maſſulam condenſari.

1699 Febr. ſari. Hæc ni fallor ex Tua fluunt hypotheſi; belle ſane, ſi nullis premerentur difficultatibus. Mors, ſecundum illam, nihil aliud eſſet quam paulatina partium craſſiorum corporis deſtructio; interim illa accidit repente, ſi non momento, [dicis enim apud BAYLIUM momentum mortis obſervari non poſſe] ſaltem morula adeo exigua, ut tempus deſtructionis tempori generationis & nutritionis minime poſſit comparari, & hic natura debeat quaſi per ſaltum operari. Diſpicias igitur, quomodo Lex continuitatis ſalvari poſſit, dum poſt diuturnam adeo evolutionem, animal, nictu velut oculi, in priſtinam involvatur parvitatem. Et dicas mihi, cur natura noluerit, ut tantundem temporis ad involutionem requireretur quam ad evolutionem. Præterea, ſi ante mortem animalis ipſi crus aliudve membrum amputetur, eo ipſo aliquid de ſtaminibus amputatum ſeparatur; & ſic poſt reductionem animalis ad ſuum exiguitatis ſtatum, illud quod de ſtaminibus ſeparatum fuit, aut redditur animalculo, aut non redditur. Si prius; velim mihi explices, qua virtute illud, quod, exempli gratia, in Americam tranſportatum eſſet, rediret in Europam, ſeque cum animalculo conjungeret. Si poſterius; tunc illud, quod amputatione membri ſtaminibus animalis ademptum eſt, eidem non eſt eſſentiale, neque neceſſarium; contra hypotheſin: nota quod hæc omnia fundentur in eo quod Entelechia non migrat de materia in materiam. Sic, exempli gratia, equus poſt mortem in illud animalculum reductum eſt, eodem corpuſculo, & eadem Entelechia gaudens, quod ante generationem ejus in ſemine equino latitabat, quodque microſcopii tantum ope potuiſſet videri. Hinc aliquid lepidum mihi venit in mentem; nimirum quod non ſit impoſſibile, unum idemque animal bis, ſeu pluries, generari & mori poſſe: ſi enim per mortem animalis nihil ſit aliud, quam ejus reductio in priſtinum ſuum ſtatum; quid impedit quominus denuo evolvatur per accretionem novæ materiæ? Quis ergo ſcit, an non Bucephalus, ab Alexandri Magni tempore, multoties fuerit in mundo, ſub viſibili equi forma? Ad id enim tantum opus eſſet, ut equus aliquis, cum pabulo, aut potione imperceptibilem Bucephalum abſorberet, eumque cum reliquis ſeminis ſui animaculis permiſceret. Vides me nihil dicere de homine, quia

quia animam humanam ipſe excipis; vellem tamen mihi certi quid diceres de ſtatu animæ poſt mortem. Videris enim credere, etiam tunc, eam non ſine corpore eſſe; ſicuti nec Angelos nec Dæmones. 1699 Febr.

Inquiſivi in librum Domini Bernierii; ſed nondum inveni.

Mihi videtur clariſſimum, ſi dantur termini infiniti, dabitur etiam terminus infiniteſimus [non dico ultimus] & qui eum ſequuntur.

Miror quod nolis admittere magnitudinem infinite parvam; cum tamen cogaris admittere numerum infinitum, quem etiam memini Te alibi negare.

Accepi nuper Dni. Hamelii *Hiſtoriam Academiæ ſcientiarum*: Tui mentionem bis tantum factam reperi, his verbis, pag. 152. *Vir omni eruditione clarus Dominus* Leibnitz, *horologium a ſe inventum aſportari juſſit ut æquabilem illius motum exhiberet: Jam ineunte anno* 1675, *machinam numeralem protulerat, cujus ope quatuor Regulæ Arithmeticæ magna facilitate perficiuntur*; p. 178. *Die* 15. 9bris *Dominus* Hugens *phoſphorum liquidum a Domino* Leibnitz *ad ſe miſſum exhibuit.*

De Calculo differentiali, qui in Academiam per *Marchionem* Hospitalium introductus fuerit, & a quo ille hauſerit, ne γρῦ quidem memorat. . . . .

Ad quæſita Tua Varignonius in litteris ad me nuper ſcriptis ita reſpondet. „ *Vous n'y* [*Hiſtor. Acad.*] *trouverez pas Monſieur* Leibnitz, *comme de l'Academie* &c.

Frater meus tandem in depoſitum remiſit Varignonio 50 Imperiales mihi, ſi Problemata ſua ſolverem promiſſos: Te vero, ut Judicem ſolum, etiamnum recuſat; non obſtante quod, in ultima mea reſponſione, ipſi conceſſerim jus appellandi ad reliquos Judices, quos nominat, me vero hoc ipſo jure privaverim, & acquieſcere promiſerim Tuæ ſententiæ, etiam ſi contra me deciſurus eſſes. . . . . Remitte, obſecro, mihi methodorum mearum ſcriptum prius, quod amiſſum putaveras, ut tertio deſcribendi onere ſublever, ſi in *Galliam* aliove mittendum. Vale.

Groningæ 11°. Februar. 1699.

Amplitudini Tuæ Devotiſſimus

Bernoulli.

P. S.

P. S. De Phoſphoro illo liquido, quem Hugenio communicaveras, vellem me informares, quomodo componatur; an & quantum Tibi ſuperſit; num ejus me quoque poſſis participem reddere, vel aliunde pro me emere. *Frater* meus junior ex *Anglia* mihi attulit Phoſphorum ſolidum, ſed hic communis eſt, liquidum hactenus nondum vidi.

EPISTOLA LXXXVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De libertate Dei, & permiſſione mali. De Commercio animæ cum Corpore. De Entelechiis. De infinitesimis. De Phoſphoro. Gratulatur Bernoullio, *quod ſit in Academiam Pariſienſem adſcitus.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

. . . .

1699 Febr. POſſibilia ſunt quæ non implicant contradictionem. Actualia nihil aliud ſunt quam poſſibilia [omnibus comparatis] optima; itaque quæ minus perfecta ideo non ſunt impoſſibilia: diſtinguendum enim inter ea, quæ Deus poteſt, & quæ vult: poteſt omnia, vult optima. Cum dico, Deum eligere ex infinitis poſſibilibus, idem volo quod Tu, cum dicis eum ab æterno elegiſſe. Quod vero ais, impoſſibile ipſi eſſe ſua decreta revocare, atque adeo alia creare, quam quæ creare decrevit; id pertinet ad neceſſitatem hypotheticam, de qua non eſt ſermo.

Scio multos dubitare, ut inſinuas, an nos poſſimus cognoſcere quid ſit Sapientiæ Juſtitiæque divinæ conforme. Puto tamen, ut Geometria noſtra & Arithmetica etiam apud Deum obtinent; ita generales boni juſtique leges, mathematicæ certitudinis, & apud Deum quoque validas eſſe. Et ſi malum in ſe ſit minus quam nihilum,

Digitized by Google

hilum, tamen conjunctum interdum aliis effectu realitatem auget, ut umbræ proſunt in pictura, & diſſonantiæ in Muſica. Nec dubium mihi eſt, tum demum permiſſa eſſe mala, cum plus inde naſcitur boni. 1699 Febr.

Perplacet, quod mea ſententia de unione & commercio Animæ & Corporis a Tuo & Dni. D*is.* Braunii ſenſu non abhorret, ſed eam non videntur ſatis percepiſſe qui hactenus rem pro inexplicabili & quaſi miraculoſa habuere; ſic enim omnis, ni fallor, difficultas ceſſat.

Dno. Baylio mea reſponſio ad objectiones duas, quæ Tibi maximi momenti videntur, non diſplicuit. Etſi enim anima non conſtet ex partibus, exprimit tamen perceptionibus ſuis rem ex partibus conſtantem, nempe corpus. Hinc cum multas habeat perceptiones ſimul, & ex perceptionibus præſentibus naturali conſequentia naſcantur futuræ; mirum non eſt ſponte ex anima fluere tot modificationes. Dubium etiam nullum eſt quin futuri ſtatus noſtri jam aliquo modo in præſentibus involvantur, etſi ob multitudinem & exiguitatem comperceptionum diſtingui non poſſint.

Hinc & alia Dno. Baylio repoſui, & Dnus. Basnagius reſponſionem meam ultimo ſuo trimeſtri inſerere * promittebat litteris, exeunte ni fallor autumno anni ſuperioris, ſcriptis. Quod ſi factum non eſt, vereor ut prodierit ipſum trimeſtre, in quod rogo ut inquiras. Mitto ecce cenſendum Tibi, quod *Diario Pariſino* deſtinavi, occaſione Auctoris, qui putavit commercium animæ & corporis eſſe ſupernaturale, uti certe ſtatuere debent, qui meam præformationis hypoteſin non ſequuntur *Carteſiani.* Quæſo ut remittas ſchediaſma hoc meum, ubi expenderis, ut *Lutetiam* ire poſſit.

In Tua expoſitione Theoriæ meæ de ſubjecta materia Entelechiarum, ſunt aliqua quæ non ita aſſeverare auſim. In his enim, ubi certa haberi poſſunt, nolim hypotheſibus uti; ſufficit tamen ſummam rei teneri. Ad objectiones Tuas hæc reſponderim. Cum dico

* *Lettre de* M. Leibnitz *contenant un Eclairciſſement des difficultés que* M. Bayle *a trouvées dans le Syſteme nouveau de l'union de lame & du corps.* Hiſt. des Ouv. des Sav. 1698. Juill. Art. 5. pag. 329.

1699 Febr. dico momentum mortis definiri non poſſe, ſimul ſignifico Metaphyſico ſenſu nullum eſſe; nec video qui ſequatur Legem continuitatis infringi, etſi hic brevi admodum tempore magna fiat mutatio, quod ipſum ſæpe in natura fieri conſentaneum eſt, præſertim in mortibus. Machinas enim compoſitas lente formari, facile turbari convenit. Sed ſapientia Auctoris efficit, ut in ſumma rebus optime ſemper conſulatur. Idem animal ſæpius prodire in hoc Theatrum poſſibile eſt: ſed tamen & contrarium poſſibile eſſe putem. Itaque hic nihil facile definit ratio. Altioris iſta indaginis habeo.

Non reſpondes rationi meæ, quam allegavi, cur non ſequatur, dantur termini infiniti, ergo infiniteſimus. Nempe, quod concipere licet ſeriem multitudine infinitam, conſtantem ex meris terminis finitis, ſeu ordinariis progreſſionis geometricæ decreſcentis: Concedo multitudinem infinitam, ſed hæc multitudo non facit numerum, ſeu unum totum; nec aliud ſignificat, quam plures eſſe terminos, quam deſignari poſſint; prorſus quemadmodum datur multitudo, ſeu complexus omnium numerorum; ſed hæc multitudo non eſt numerus, nec unum totum.

Valde ago gratias, quod communices quæ Dnus. *Marchio* Hospitalius & Dnus. Varignonius ad Te ſcripſere, quæque notaſti in libro Dni. Du Hamel. Puto nonnihil erroris eſſe in relatione de Phoſphoro; nam recordor etiam ſolidum Dno. Hugenio a me fuiſſe miſſum. Et quoniam ſolidum eſſe communem, liquidum vero minus notum cenſes; ſcito utrumque eadem operatione prodire, nempe diſtillatione forti tranſit tandem liquor lutoſus in ſpeciem, in recipientem, & ſimul quædam partes ſolidiores parietibus vitri agnaſcuntur. Liquor autem mea opinione non lucet, niſi quatenus partibus ſolidis nonnihil diſſolutis eſt imbutus. A multis annis nihil tale habui; cæterum non dubito ab iis qui ſolidum præbent, etiam liquidum haberi poſſe.

Etiam a Dno. Hospitalio accepi litteras in eum, quem ſcribis, ſenſum, itaque & Academiæ gratulor & mihi, quod Te quoque aſcito Collegæ ſumus.

Dnus. *Frater* Tuus non male facere videtur quod unum judicem recuſat, neque ego facile in me judicium reciperem ſolus.

Cum

Digitized by Google

Cum Dnus. TSCHIRNHAUSIUS dudum Academiæ Regiæ membrum habitus ſit, miror etiam nunc demum nominatum ſcribi. Vellem hac re animaretur ad inventa, quæ nos ſperare jubet, publicanda; ſed ita tamen ut ſuum etiam aliis tribuat, quemadmodum vellem parabolicorum arcuum inventionem Tibi tribuiſſet. Quod ſupereſt, vale & ſave. *1699 Febr.*

Dabam *Hanoveræ* 14. Februarii 1699.

Deditiſſimus
G. G. LEIBNITIUS.

Reſponſio deeſt.

EPISTOLA LXXXIX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De libertate Dei. De commercio animæ cum corpore. Varia. De GRONINGII hiſtoria Cycloidis. *De* CLUVERIO.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Ecce quid Dno. VOLDERO reſpondeam, modo ne nimis prolixe, quod Tu arbitrabere, & ſi quid tamen deeſſe videbitur, in tuis ſupplebis. Neque enim dubito quin id optime poſſis, neque facile eſt prævidere, quid alios turbare queat. Auſus etiam ſum in Te rejicere onus ſatisfaciendi circa argumentum ab aſcenſu æquivalituro, ſive continue fiat, ſive per vices; quia non ita bene memini quæ olim ea de re inter nos acta, Litteræque ipſæ, inter alias disjectæ, non ſunt in promptu. *1699 Mart.*

Circa Dei potentiam repeto quod dixi, poſſe eum omnia, velle nonniſi optima; nec video quid huic ſententiæ obſtet. Diſtinctio neceſſitatis hypotheticæ ab abſoluta, & in Deo & in Creaturis mea ſententia valet, rurſuſque non video quid obſit. Vacua & atomi mihi non videntur eſſe umbræ, ſed maculæ, & quidem inexcuſa-

1699 Mart. biles, quia nil juvant, cum ipſis ſublatis alia omnia fieri poſſint quæ alias fiunt. Vulgatum illud, Non eſſe facienda mala, ut eveniant bona, falſum eſt, ſi nimis generaliter accipias. Sæpe mala, vel damnoſa, & facere & pati oportet, majoris boni obtinendi, vel mali vitandi cauſa.

Non aliam intelligo ſimilitudinem inter ſenſationem & objectum, quam repræſentationis. Sed hanc non agnoſcere *Carteſianos* paſſim ipſi indicant, idque inprimis manifeſte facit Auctor, cui reſpondeo, adeo ut arbitrarium putet, quam ſenſationem dare animo Deus velit, ad qualitates ſenſibiles corporum exprimendas. Difficultas Tibi ſupereſſe videtur circa ſubitum tranſitum a calore, verbi gratia, ad frigus. Sed ſciendum eſt, ſi nos corpus perfecte intelligeremus, in ipſo nos tranſitum prævifuros; idem ergo fit in anima, quæ eſt corporis repræſentativa. Nulla ergo eſt mutatio per ſaltum; niſi in noſtra opinione, quibus inſenſibiles tranſitus interjectos comprehendere non datur.

Non ſine cauſa confuſas perceptiones comparavi machinis naturæ, diſtinctis a machinis artis. Refertur hoc ad primum meum de his ſchediaſma *Gallico Diario* * inſertum; idque adeo verum eſt, ut machinæ artis poſſint cognoſci perceptionibus diſtinctis, naturæ non niſi confuſis, quia omnis machina naturæ infinita involvit organa.

Non mala eſt comparatio diſtinctarum & confuſarum cum recta & curva, quia hæc infinitos habet flexus. Hoc tamen intereſt, quod curva infinitos habeat flexus quidem, uni tamen Legi finitæ diſtincte intelligibili ſubmiſſos; quod in naturæ machinis locum habere nequit.

Dnus. MENCKENIUS mihi ſcripſit, ſe *Cenſuram Demonſtrationis Gregorianæ de Catenaria*, *Actis* † inſerturum. *Septembri* inſeruit, quæ Dno. STURMIO Mathematico *Altdorfino* reſpondi §, qui in *Phyſica Electica* tueri voluit opinionem Carteſianorum, quod Creaturæ ſemper a Deo, velut ex Machina interveniente impellantur nec ipſæmet agant. De cætero nihil obſervavi in rem noſtram. Signi-

* 1695. 25. Journal. du 27. Juin.
† 1699. Febr. p. 87.
§ G. G. L. *De ipſa natura, ſive de vi inſita actionibusque Creaturarum, pro Dynamicis ſuis confirmandis, illuſtrandiſque* Act. Er. 1698. Sept. pag. 427.

Significabo, ubi aliquid videro, quamvis *Acta* interim ad Te perventura credam. 1699 Mart.

Dno Varignonio rogo, ut multas pro gratulatione a me gratias agas, ſignificesſque gaudere me talium Virorum Societate, eumque honorem judicare maximum. Si quid in Hiſtoria rerum geſtarum, quam Tibi deſcripſit, cognitioni meæ convenire Tibi videbitur, rogo ut communices talium curioſo. Sæpe enim hinc indoles hominum noteſcit.

Celeberrima illa Domina de Scuderi, cui ut innoteſcerem, Pelissonius olim fecit, miſit mihi carmina funebria & ſua & aliena in Pſittacum, quem habebat; ſed eo ingenio, ut quemadmodum ipſa ſcribit, vel ſolus ſufficere potuerit automatis Cartesii refellendis.

Neſcio an videris novum Diarii Eruditi genus, quod inſcribitur *Nova Litteraria Maris Baltici.* Quæ ibi habentur mathematica ſchediaſmata, inſerta ſunt a Dno. *Detlevo* Cluverio & a Dno. Groningio.

Hunc Tibi viſum ſcripſiſti; etiam me ſalutavit anno abhinc. Dixi, mihi hiſtoriam Cycloïdis pro Torricellio contra Pascalium ſcribere, tanti non videri; nam nec res adeo magna eſt, & quid ad *Germanum*, *Galli* vel *Itali* lites? Sed ſi omnino Hiſtoriam Cycloïdis moliretur, ſuaſi adjiceret tot alia inventa circa hanc lineam, majoris longe momenti, ipſaſque demonſtrationes; ſed vereor ne nimium ab eo petierim. Quæ in *Novis* illis *Maris Baltici Litterariis* habet, mediocria ſunt. At Dnus. Cluverius videtur ibi velle nobis tandem aditum dare aliquem ad myſteria ſua. Verum enim vero res non maximas apparet adhuc ab eo verbis efferri magnificis. Videbimus an poſt hæc initia nos ad majora ſit ducturus. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 14. Martii 1699.

Deditiſſimus

G. G. Leibnitius.

1699 Mart. P. S. Mitto primam ſolutionis Tuæ ad Fraterna poſtulata communicationem mihi factam. Epiſtolæ ad VOLDERUM reſponſoriæ nondum præſto eſt Apographum, nolui tamen hanc meam ad Te ideo differre, vel ſolutionis illius quam remitti deſideras cauſa.

Reſponſio deeſt.

EPISTOLA XC.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM

Mittit nonnulla.

Vir celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1699 Mart. ECce nunc tandem litteras meas reſponſorias, quas ut ad Dnum. VOLDERUM cures rogo, & ſicubi opus videbitur tuis adjuves.

Adjicio quæ in noviſſimis, quæ ad me pervenere *Lipſienſium Actis* ad rem noſtram pertinent, * quæ ut remittas peto, mihique interpreteris ea, quæ Dominus *Frater* Tuus circa Loxodromicam meis adjecit. † Mihi enim, fateor, non licet iſta rimari attentius, prout merentur.

Nunc quod prioribus addam non habeo, niſi ut valeas ex ſententia, & in præclaris meditationibus tuis pergas.

Dabam *Hanoveræ* 24. Martii 1699.

Deditiſſimus
G. G. LEIBNITIUS.

† *Animadverſio ad* Dav. GREGORII *Schediaſma de Catenaria*, &c A. E. 1699. Febr. pag 87.

§ *Circinus proportionum nauticus, Scala loxodromica inſtructus* &c. A. E. 1699. Febr. p. 91. vel Opp. N°. 91. pag. 868.

EPIS-

EPISTOLA XCI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De Dei libertate, deque peccato. De Academia Scientiarum Pariſienſi. De differentiis, quarum exponentes fracti vel irrationales. Varia. Mittit Schedam Cluverii.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Si Deus poteſt omnia, ſed non vult ex omnibus, niſi quædam tantum, nempe optima, differre oportet etiam in ipſo poſſe & velle. Vacua non poſſunt uſum habere, quem non & habeant fluida, quantum ſatis ſubtilia, eademque ſimul alium habent uſum, quem vacua habere non poſſunt. Peccatorum permiſſionem eſſe contra ſapientiam nullo tali argumento oſtendi poteſt. *1699 Mai.*

Curvæ, quæ libera manu ducuntur, ſe habent ut machinæ naturales, ideſt nulli poſſunt ſubmitti Legi finitæ. Quoniam id concedis de curvis iſtis liberis, re accuratius conſiderata, idem concedendum de naturalibus machinis.

Si quæ mentes, peccati notitiam nullam habentes, judicarent nullum eſſe peccatum in univerſo, probabiliter ratiocinarentur, non demonſtrative, ut nos de vacuo. Nam vacua perfecte cognoſci poſſunt, cum nullas alias res notione ſua involvant; quod de peccatis ſecus eſt, quæ implicant ſeriem rerum. Sunt quidem & alia argumenta contra vacua, & atomos, ſed ea nunc prolixioris diſcuſſionis forent.

Verſus in Pſittacum Dominæ De Scuderi nondum ſunt editi; miſit enim manuſcriptos; Cartesio cognatam neſciebam. Alia eſt Pariſiis docta & elegans fœmina, Cartesii ex fratre neptis....................

Gratias ago, quod communicaſti quæ Dnus. Varignonius de Academia Scientiarum ad te perſcripſit. Nondum quicquam tam exactum habueram. Multi ex Academicis mihi ignoti ſunt,

 non

1699 Mai. non quod ipſi non ſint celebres, ſed quod ego a multo tempore res *Gallicas* parum norim, poſt tot annorum abſentiam, & quod non fuit qui Litteraria nuntiaret. Inter Honorarios ignorabam Dnum MALESIEUX & Patrem TRUCHETTUM *Carmelitam*. Ex Penſionariis Dnum. FABRUM Aſtronomum, JAUGEONIUM, & DALEMIUM Machiniſtas, BOURDELINUM & BOULDUCIUM Chemicos, COUPLETUM Theſaurarium. Ex aſſociatis Gallis, MARALDUM, CHASELLUM, TAURIUM, BOURDELINUM; ſuccenturiatos [Gallis *Elèves*] pene univerſos. Fac igitur, quæſo, ut ſi qui ex his ſcriptis, operibuſve noti, aut aliter memorabiles, id mihi quoque jam ſocio innoteſcat.

Ad dignitatem Corporis faciet, quod perinde, atque in Academia, quam *Gallicam* vocant καθ' ἐξοχὴν, honoris ergo recepti homines numeribus genereve inſignes.

Valde etiam laudo, quod unicuique Collegarum ſuccenturiatus aſſignatus eſt ſuus.

Perſcriptum ad nos fuit reditus annuos in Academiæ ſuſtentationem deſtinatos, eſſe 30 millium librarum Turonenſium, ſed hoc de penſionibus interpretor. Nam in experimenta, machinas, obſervationes, itinera, aliaque idgenus, puto ſumtus faciendos non minores, ſi quid præſtandum eſt dignum Fundatore.

Gratulor Tibi, quod Epiſtola tua tanta omnium approbatione lecta eſt: Et Dni *Abbatis* BIGNONII conſilium mirifice probo, quod paci inter Te & Dnum. *Fratrem* tuum ſtudet. Scis quantopere improbetur, qui lites inter Fratres ſerit; pari jure laudabitur qui componit.

Explica quæſo, ſi commodum, quid ſit illud quod de differentiationibus & ſummis Dno. VARIGNONIO communicaſti, de quo ratiocinationem ejus non ſatis intelligo. Illud obſervavi, ſi termini y, [y] &c. ſint progreſſionis Geometricæ, etiam y, dy, ddy &c. progreſſionis Geometricæ fore. Eoque argumento aliquando Dno. *Marchioni* HOSPITALIO probavi $d^n y$ eſſe reale aliquid; etiam ſi n eſſet numerus fractus, vel irrationalis.

Dno. VARIGNONIO ut officioſiſſimam a me ſalutem reddas valde

valde rogo. R. P. Malebranchius ſcribit Tractatum de motuum communicatione a ſe refingi, & ſe tandem agnoſcere, non ſervari quantitatem motus; ſed ignorat adhuc ſervari quantitatem, virium actionisque motricis; etſi animadverterit ſervari quantitatem motus in eandem partem, ſeu ut ego voco, directionis. Scripſi ei hac de re, ſed paucis, obiterque. Aliquando poterimus communicare quæ cum Dno. Voldero acta; Ad hunc reſponſorias meas interim acceperis.................... 1699 Mai.

Litteræ hucuſque ſcriptæ jam ante ſeptimanas aliquot una cum Tuis evanuerant ex oculis meis, & ſe condiderant inter chartas, ubi non quæſiſſem. Interea iter faciendum fuit, agendaque alia, quibus peractis, dum Chartas ordino, rurſus in Tuas & *Varignonianas*, & has ipſas meas incido, quas nunc abſolvo.

Amicus ex *Anglia* veniens & hac tranſiens, monſtravit mihi quoſdam *Philoſophicas Tranſactiones* anni ſuperioris, in illis menſe *Octobri* Artic. 7, reperitur Quadratura Logarithmicæ Dni. Craigii, cui non immoror, ſubjiciuntur deinde hæc ejuſdem verba.

„ Dum Methodum meam ad hujuſmodi figuras applicarem, in-„ veni errorem aliquo modo in Calculum *Bernoullianum* irrepſiſſe, „ dum figuræ, cujus æquatio $a^z = y^y$ quadraturam aſſignat „ $(2yyly - yy) : la$ in pereximio ſuo Tractatu *de Principiis cal-„ culi exponentialis*; eſt enim iſtius figuræ area $= (2yyly - yy) :$ „ $4la$; ubi y abſciſſam & z ordinatam deſignat.

Suſpicor hæc de Tuo potius quam Domini *Fratris* ſcripto eſſe accipienda, ſubinde enim de talibus mecum communicaſti. Duo interim noſſe deſidero; primum: ubi ſit Tractatus ille tuus, quem & ipſe videre pervelim; deinde quid ſentias de illa erroris calculi correctione; mihi enim nunc iſta diſcutere non vacat.

Ex *Novis Litterariis Maris Baltici* [quæ neſcio an non forte interim jam nactus ſis] mitto [in omnem eventum] Dni. Cluverii Schediaſma adjunctæ plagulæ inſertum, ubi multa mira; de quibus judicium tuum [ubi remittes] mihi gratum erit. Addo delineationem nummi Genethliaci, quem Cælum Cæſaris vocant, qui non inelegans videtur. Videtur aliquid tribuere Aſtrologiæ Judi-

Digitized by Google

1699 Maii judiciariæ, quod miror. Quod ait hanc propoſitionem *Deus eſt*, coincidere cum illa, *Duo contradictoria non poſſe ſimul eſſe vera*, paulo laxius dictum puto, ut ſolet fieri ab illis qui amant παραδοξολογεῖν. Cum in litteris ad me ſuis olim idem innueret, reſpondi eſſe ſane cognatas, & inter fundamentales. Nam Divina eſſentia eſt, ut ſic dicam, regio æternarum veritatum, ita ut per exiſtentiam Dei veritates circa poſſibilia non exiſtentia realiſentur, ſubjecto & ſuſtentamento alias cariturae. An hoc ipſum velit Dnus. CLUVERIUS neſcio, litteris enim illis meis non reſpondit. Quod ait Atheum eſſe animal ἀσυλλόγιστον, quod ſublata unitate numeros ſupereſſe poſſe inepte fingat; non quidem inepte dictum eſt, ſi per unitatem intelligat principium, & per numeros principiata. Nam alioqui non ſolus Deus eſt unitas, ſed ſubſtantia omnis oppoſita ſubſtantiis, ſeu aggregato, eſt monas; itaque hoc torqueri poſſet non tam in eos qui negant Deum, quam in illos qui nullas ſubſtantias immateriales agnoſcunt. Quæ de ſtructura mundi habet ex duodecim claſſibus intelligentiarum formatricium, concurſuque & coalitione radiorum cæleſtium hypermetaphyſica ſunt, quæ non capio. Oportet per radios cæleſtes ab ipſo intelligi aliquid ideale; alioqui enim ipſum utique cælum cum ſuis luminaribus & radiis partem mundi ex radiis formandi facit. Verum haud dubie eſt, æternis quibuſdam rationibus idealibus omnia deberi, ſi quis immenſum intervallum ab uno ad infinitum ſaltu tranſmittat. Philoſophiam Divinam ejus, cujus folia aliquot impreſſa hic refertur, non vidi, Quod pag. 121. dicitur, nullam eſſe quantitatem abſolutam, ſuo quodam ſenſu admitti poteſt quemadmodum & quod ait περί τῆς δυνάμεως. Et fieri poteſt ut ſubſint aliqua a nobis non abhorrentia. Habet hoc Vir Optimus, quod res etiam mediocres miris titulis exornare poteſt, quæ res uſum interdum habet apud vulgus. Vellem daret, vel ſaltem explicaret illam, quam memorat........... & ideam Pandectarum Aſtrononiicorum, quos olim fuit molitus. Miror quod Ellipſes *Keplerianas* vult abrogare, quæ tamen tam pulchre ſatisfaciunt. Solem in uno eſſe focorum tantum abeſt ut ſit contra mechanicen, ut potius ex Legibus motus prona conſequentia fluat. Mirum ſi oſtendet Solem ſemper eandem ſervare

Digitized by Google

ſervare diſtantiam ad Terram, obliquitatemque Eccliptica a priore patefaciet. Magis mirum, ſi quid dabit circa ordinem fixarum. Talia cum Cartesio aggredi fruſtraneum puto, niſi quis cum Gaffarello & ſimilibus cælum eſſe putet pellem extenſam inſtar libri Caracteribus inſcriptam, ubi fata omnium legi poſſint. Miror nondum illic chemicos quæſiſſe Lapidem Philoſophorum; quod ſi quid apte fingi poſſet, ſaltem prodeſſet ad ſtellas melius deſignandas & memorandas. Vereor, ut Machinæ auctoris opticæ conſiſtant in ideis inexſequibilibus. 1699 Mai.

Non video quomodo in Muſica aliquid magno cum fructu circa Monochordi ſectionem mutari poſſit, conſtat enim incidi in numeros irrationales, & eorum loco aſſumtos eſſe vicinos rationales. Unde octavæ diviſio in tonos, quæ accurata eſſe non poteſt. Quicquid ejus ſit, non dubito aliquid non contemnendum fore etiam in illis viri egregii meditationibus, quæ non plane ferient ſcopum. Itaque ſi omnia prodeant [modo ne nimis αἰνιγματικῶς καὶ ὑπερβολικῶς] pergratum erit. Alias alia mittam ex iiſdem *Novis Balthicis*, quibus præſtruere quædam videntur ad ſuas ſeries.

Nunc finiendum, neç unæ litteræ nimis onerandæ........ In *Groningianis* nihil video quod mitti e re ſit, itaque his faſciculum inflare nolim. Curioſitate non mediocri ſententiam Dni. De Volder expecto. Videtur ſemi-converſus. Miror quod non voluiſti ut ſcirem, quid Tibi de noviſſimis ad eum meis ſit viſum, cum judicium de iis tuum mihi futurum ſit præjudicium aliquod alieni; & gratiſſima habeam monita tua. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 16°. Mai. 1699.

Deditiſſimus

G. G. Leibnitius.

EPISTOLA XCII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De litteris LEIBNITII *ad* VOLDERUM. *De Dei libertate. De ſua cum quibuſdam Theologis controverſia. De Academicis quibuſdam Pariſinis. De Schediaſmate* Cluveriano.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1699 Jun. ECce Reſponſionem Dni. VOLDERI. Multa objicit acute & ſolide; ſed ſeverus nimis, & ſcrupuloſus videtur eſſe in exigendis probationibus eorum etiam, quæ, meo judicio, accurate probari non poſſunt; qualia ſunt quæ ex lege ordinis petuntur: Item principium illud Tuum activum ſubſtantiæ: hinc non video quomodo illum omnino lucraturus ſis, niſi aliquid remittas quod certum non eſt. Pleraque fere prævideram, quæ VOLDERUS objecturus eſſet: Quæ vero ipſi ſcripſeras maximam partem probo; ſed non putabam judicio de iis meo Tibi valde opus eſſe; alias incunctanter Tibi reſpondiſſem, licet a Te litteras expectaverim: Fuerunt tamen, quæ mihi adhuc injecerant ſcrupulum; quem vero ut moveam, non conſultum duco; præſtat id a VOLDERO fieri: Ita enim ab utraque parte proficio, abſque ut id mihi magni conſtet. Delector valde, cum Tuas lego profundiſſimas meditationes, quæ reconditiſſimam quandam Metaphyſicam ſpirare videntur; quod & ipſi VOLDERO dixeram, cum Tuas poſtremas ipſi miſiſſem. Sed & vice verſa VOLDERI in objiciendo ſoliditas, & in exprimendo felicitas me quoque non parva admiratione afficiunt. Jucundum mihi erit, & fructuoſum, inceptæ veſtræ velitationis exitum videre: ſed jam ad noſtra.

Deus ea tantum poteſt, quæ decrevit, & vult omnia quæ decrevit; Ergo omnia vult quæ poteſt; unde in ipſo non differt velle

le & poſſe; quidquid jam ſit de diſtinctione inter abſolutam & hypotheticam neceſſitatem. 1699 Jun.

Vellem mihi geometrice demonſtrares, fluida habere poſſe omnem uſum quem vacua, ſed vacua non omnem quem fluida.

Ergo concedis ideas confuſas, non modo machinis naturalibus, ſed etiam curvis libera manu ductis poſſe comparari. Illa alia argumenta quæ Tibi contra vacua & atomos ſupereſſe dicis, magna me voluptate afficerent, ſi ea mihi communicare digneris; fateor enim de eorum impoſſibili exiſtentia me nondum demonſtrative eſſe convictum.

Gratias ago pro communicatione elegantis Epigrammatis Tui in Pſittacum *ſcuderianum*. Cum Te in omni ſcientiarum genere verſatiſſimum ſciam, non miror Te etiam eſſe Poetam, & mihi interdum præter ſpem vena luxuriat. Sed quod mihi ante annum excidit Epigramma, ſtatim poſt litem illam cum Theologis quibuſdam inceptam, eorum choleram in tantum excitavit, ut undique atræ nubes ſupra caput meum ſe ſe contrahentes, exitialem minarentur procellam; ſed ex ea evaſi ſalvus, & ignis videtur omnino extinctus, poſtquam noviſſime diſputationem in hanc rem cum Theologis iſtis habuiſſem, ſub incredibili confluxu Auditorum, qui me Philoſophum theologice diſputantem nunquam antea audiverant. Si diſputationem, quam in eum finem compoſui, legere deſiderares, poſſem data occaſione exemplar ejus Tibi tranſmittere. Si ſcires, quantum hic paſſus fuerim ab ineptis hominibus, & imperitis iſtis miſomuſis, non dubito quin mei miſereris: ſufficit, ſi habeor pro novatore; pro introductore ſapientiæ Theatralis [ita appellitant Philoſophiam Experimentalem] quam heic primus doceo, ut ſuo odio me dignum putent. Tanta eſt apud homunciones iſtos bonorum ſtudiorum nauſea! Tantus contemptus! Ipſi quippe, cum nihil moliuntur quod laudabile eſt, aliis laudem invident.

Multi ex Academicis *Pariſienſibus* non ſolum mihi ſunt ignoti, ſed etiam, cum *Pariſiis* agerem, nondum erant recepti. Nondum accepi Receptionis Bullam, quam Varignonius jamdiu ſcripſit mihi ſtatim miſſum iri per Illuſtrem Bignonium. Quid cauſæ ſit quod nondum acceperim, divinare non poſſum: an Tuam acce-

1699 Jun. acceperis noſſe pervelim. Triginta iſta millia librarum, viginti tantum penſionariis *Lutetiæ* habitantibus ſunt deſtinata; an exteris quoque aliquid deſtinatum fuerit, valde dubito.

Quod de differentiationibus & ſummis Dno. VARIGNONIO communicavi, eſt idem illud, quod jam olim inveneram pro methodo ſummandi ex obſervato a Te conſenſu inter Binomii poteſtates & Rectanguli differentiales; de quibus ſuo tempore, ſi meminiſti, prolixe inter nos actum eſt.

P. MALLEBRANCIUS valde inſtabilis ſit oportet, cum mentem ſuam de communicatione motuum toties mutet. Niſi minutim diſtincteque omnia ipſi explicaveris, non facile in caſtra tua tranſibit: ſtat etiam pro perfecta corporum duritie.

Schediaſma meum *de principiis calculi exponentialis* continetur in *Actis* 1697, Menſe *Martio* (pag. 125. *vel* Opp. Tom. I. N°. XXXVI, pag. 178.) Præterea nihil edidi de hac materia. Quod autem Dno. CRAIGIO libuerit hoc ſchediaſma appellare Tractatum, quid in mente habuerit non capio. Verum eſt quod pag. 131. lin. ult. pro Area figuræ cujus æquatio $x^x = a^y$, ponam $(2xxlx - xx) : la$, loco quod ponendum eſſet $(2xxlx - xx) : 4la$; ſed quid eſt qui non videat fuiſſe vel lapſum calami, vel errorem typographicum: Unde tibi judicandum relinquo, an publice perſtringi mereatur. Alius error item ſubrepſit, nam linea tertia a fine habetur $lydy$, loco $lady$: miror quod CRAIGIUS hoc pariter non obſervaverit. Optarim videre quid in *Tranſactionibus Londin*: de quadratura Logarithmicæ ediderit: videtur agere etiam de exponentialibus, ubi dicit *Dum methodum meam ad hujuſmodi figuras applicarem*: ſed quam facile ipſi fuit ex jam inventis proficere.

Remitto his cum gratiarum actione CLUVERII ſchediaſma: ſed, ut Tibi candide fatear, parum, aut nihil, ex illo intelligo: forſan nec ipſe ſatis intelligit. Videtur affectare obſcuritatem, ut res tenues quoque & leves magna pompa exagerare poſſit. Memini alicujus viri apud nos, qui tantam laudem in non intelligibili loquendi modo quæſiverat, ut cum aliquando orationem haberet, poſtea ipſe gloria-

gloriaretur, ſublimi adeo ſtilo ſcriptam fuiſſe, ut nec a ſe, nec ab auditoribus potuerit intelligi. Non dubito quin Cluverius idem de ſe gloriari poſſit: quod vel exinde patet, quod ipſi omnia ſordent, quæ recepta ſunt. Dum ſcilicet Ellipſes *Keplerianas* vult abrogare; item Solis excentricitatem, aliaque quæ pro demonſtratis habentur. Sed præ omnibus mihi diſplicet, quod jam olim, & nunc iterum, Parabolæ quadraturam *Archimedæam* impugnare velit; ſane, ſi eo uſque ineptiarum procedit, quid porro in Matheſi tutum, quid certum erit? . . . .
. . . . Vale.

Groningæ 3. Junii 1699.

Amplitudinis Tuæ

Devotiſſimus
J. Bernoulli.

P. S. deeſſe videtur.

EPISTOLA XCIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De controverſia ſua cum Voldero. *De Dei libertate. De vacuo & atomis. Varia. De aëris compreſſione.*

Vir Ampliſſime, Fautor Honoratiſſime!

Cum Dno. Voldero diſputans Tua ope indigo, tanto magis quod difficilius eſt nova tueri, itaque quoties a mea ſtas parte, æquum eſt ut auxilio mihi ſis, agaſque confeſſorem & defenſorem veritatis. Nam quod ais ſpectando Te laboris compen- 1699 Jun.

 dium

1699 Jun. dium facere, id a me ætate tanto provectiore ſpecioſius dici potuiſſet.

Objectiones mihi interim videntur fere a præjudiciis proficiſci. Longe alia ipſi, quam mihi extenſionis notio eſt; Idem eſt de ſubſtantia aliiſque multis. Deinde aliud eſt objicere, aliud exigere probationes. Objectionibus reſpondere non defugio; probationes omnium dare, hujus loci temporiſque non eſſet, etſi in promptu haberem.

Inprimis miror quod negat plus eſſe idem promptius efficere. Quis hac ſcrupuloſitate ad demonſtrandum invitetur, & quis ſatisfacere ſperet, ne illa quidem concedenti, quæ totius naturæ teſtimonio confirmantur? ſed iſta mihi interim in hypotheſin apud æquos credo judices ſuffecerint, qualem ipſum Dnum. VOLDERUM fore puto, ubi rem magis expenderit. Taliaque ipſi a Te commodius quam a me dici poterant. Cæterum mihi non tam id quæritur, ut mea perſuadeam, quam ut conſiderationibus mutuis proficiatur. Veritas ſerius aut citius ſemper vincet.

Quod dicis Deum ea tantum poſſe quæ vult, hoc non concedo; niſi in ſenſu compoſito loquaris, ut vocant. Verum eſt ea tantum facere, ſed ſi ea tantum poſſet, omnia faceret neceſſario, nec eſſet liberum agens: nam decreto aut electioni locus eſſe nequit, cum niſi unum poſſibile eſt.

Aſſerendus eſſet uſus vacuorum, quem fluida habere non poſſint. Cæterum unum ad hoc argumentum habes in hac Epiſtola adjuncta ad Dnum. VOLDERUM, nempe ſi darentur atomi, daretur & mutatio per ſaltum.

Facies pro prudentia Tua, ut Theologos non habeas inimicos, nam ubique terrarum magna eſt ipſorum auctoritas; idque poſtulat ſtatus rerum. Epigramma Tuum libenter videbo, nec per me ulterius ibit quam voles. Diſputatio etiam gratiſſima erit.

Litteras Acceptionis Academicæ nondum accepi. Haud dubium eſt 30 millia librarum ſolis penſionariis eſſe deſtinata; qui omnes ſunt regnicolæ.

Mutationes repetitas R. P. MALLEBRANCHII non culpem, ſi modo expenderet potius quam ederet in Publicum. Itaque vereor ne, ne poſt tertiam editionem Regularum motus ſuarum, indigeat quarta. In

Digitized by Google

In CRAIGII ſchediaſmate nihil erat quod ad exponentialia pertineret, quam quod tranſcripſi. Admiſi autem demonſtrationem logarithmicæ tanquam obviæ. Nec illam [quam vocant] *Tranſactionem* nunc amplius habeo, viſam tantum apud tranſeuntem. *1699 Jun.*

Ecce alterum Dni. CLUVERII ſchediaſma, quo paulo propius ad rem videtur accedere. Si ARCHIMEDIS quadraturam Parabolæ improbat, cur non reſpondet ejus demonſtrationi rigoroſæ, oſtenditque ubi vitium hæreat; neque enim ARCHIMEDES aſſumit infinite parva, aut alia quæ *Cluverianis* objectionibus obnoxia videri poſſunt.

Quando Dnus. CUNÆUS Te vidit, jam erat unus ex ſecretariis intimis ſereniſſimi Electoris Brandeburgici, etſi apud Dnum. DANKELMANNUM plerumque ageret. Nunc Patrono everſo ſtationem invenit, factus Conſiliarius, ubi licet minus in iis poſſit in quibus nobis utilis eſſe poterat, quietiorem tamen & jucundiorem vitam agit. Mathematica & æſtimat & intelligit; Aſtronomica inprimis. Cæterum inde a DANKELMANNI caſu nulla mihi cum illis notitia intercedit, qui in *Halenſis* Academiæ rebus aliquid valent; quæram tamen a Dno. CUNÆO, quo illæ ſint loco.

Certiſſimum eſt, librum BERNERII prodiiſſe ſub Titulo, *Doutes ſur la Philoſophie.* Invenies eum in *Actis Lipſienſibus* jam ante multos annos recenſitum, ſi modo indicem generalem conſules; habetur & in *Novellis Reipublicæ Litterariæ*, ſi bene memini, ibi non pauca, quæ olim ſtabiliverat in ſuo *Compendio Philoſophiæ* GASSENDI & alibi, dubia nunc ſibi videri profitetur, & difficultates producit. Gratias interim ago, quod inquiſiviſti.

Non memini legere, qui aërem compreſſum ponderaverit. Memini BOYLIUM, in his credo, quæ *Franc.* LINO reponit, aut adjectis, calculo experimentorum deprehendere ſibi viſum aëris vim elaſticam fere reciproce proportionalem eſſe ſpatio. Idem in pondere examinandum: BOYLIUS etiam notare ſibi viſus eſt aërem rarefactum a calore accipere vim ſe dilatandi majorem quam proportione raritatis expectarat. Id dignum excuti, ſimulque obſervari annon ſimiliter aër compreſſus minorem dilatandi vim acquirat

quam

Digitized by Google

quam pro ratione denſitatis; quod ego aliquando obſervaſſe mihi viſus ſum, facto tumultuarie experimento. Vale & fave.

Dabam *Hanoveræ* 26. Junii 1699.

Deditiſſimus

G. G. Leibnitius.

Reſponſio deeſt.

EPISTOLA XCIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De Fatii *inveſtigatione lineæ celerrimi deſcenſus. De ſuis Epiſtolis a* Wallisio *edendis. De* Cluverio. *De aëris compreſſione. Varia.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1699 Jul. PRrorſus incogitante me factum eſt quod Litteræ Dno. Voldero per Te deſtinatæ ad Te obſignatæ pervenere; nam volebam ut legeres, & adhuc volo ut legas, imo peto, ſimulque ut expendas, & cum remittes tua cogitata addas. Accipies autem proximis, nunc enim ſatis oneratus eſt faſciculus. Tuas a Dnum. Menckenium curabo ſtatim. [Imo jam curavi].

Gratias ago quod mecum communicaſti litteras Dni. Varignonii, quem rogo a me officioſe ſalutes, & quam obligatus ei ſim teſteris, quod ad me quoque pertinentia ſignificare voluit, quibus ita utar, ut decet, Auctoremque nuntii diſſimulabo, ut par eſt. Ipſum Fatii libellum † miſſu Dni. *Marchionis* Hospitalii accepi. Non miror quod judicas oportere hominem ruſticum eſſe, certe apparet parum ſocialem eſſe, qui ita debacchetur in eos a quibus

† Lineæ breviſſimi deſcenſus Inveſtigatio geometrica duplex, cui addita eſt Inveſtigatio geometrica ſolidi rotundi in quo minima fit reſiſtentia. Lond. 1699. 4°.

bus non eſt læſus. Sed bene eſt quod Lectores facile intelligent, invidia ſtimulatum ſcripſiſſe. Reſponſionem quam *Actis* inſerendam * compoſui, ecce accipis; eam ut cum ſententia Tua remittas rogo. Malui leniter caſtigare hominem, quam dure accipere, ut merebatur, nam ridiculum eſſe ſpectaculum puto, ſi Viri Eruditi, qui præ cæteris cultum profitentur, dicteriis inter ſe certent inſtar muliercularum. 1699 Jul.

Optime interim fecimus, quod novam acceſſionem Calculi differentialis adhuc ſupreſſimus; ita enim fortaſſe habebit, cui dentem inſigens offendat ſolido.

Wallisius conſenſum meum petiit, ut Epiſtolæ meæ veteres ederentur; dedi non invitus; etſi neſciam an omnia nunc ſatis eſſem probaturus. Quæſivit an aliquid mutare vellem, ſed non vacavit quærere in antiquis ſchedis, ubi nec invenirem omnes. Virum doctum & bonum animo ſiniſtro egiſſe nolim ſuſpicari, utcunque res cadat, nunquam verebor nudam veritatem. Accipis nunc partem libelli *Fatiani*, reliqua mox ſequentur. Interea *Cluveriana* remittes. . . . .

Haud dubie Dnus. Cluverius aliqua laborat ἀῤῥεϛία [ut *Joſephus* Scaliger olim, & Hobbius, inſignes alias viri] quod certitudinem demonſtrationum *Archimedearum* impugnat. Sed nociturum dignitati Geometriæ non puto, eoque facilius ignoſco, præſertim cum non ſcribat more *Fatiano*. Aliquoties ad me ſcripſi hac de re, ſed nunquam ad reſponſiones meas quicquam replicavit. Quæſivi, an poſſet aliam accuratiorem dare rationem Paraboles ad quadratum circumſcriptum, quam eſt *Archimedea*. Hinc ſi mente eſſet libera, agnoſcere poſſet nodum ſe quærere in ſcirpo.

Quoniam tantum Tibi cum Fratre Fatii natu majore fuit commercii, non ab re ſuſpicaris inde aliquid ad eum pervenire potuiſſe. Quod ait ſe Calculum differentialem habuiſſe ſuo marte, in eo forte ſe ipſum fallit: habuiſſe ejus initia quædam, & ipſum & multos alios, quis neget? Sed ſi talem habuiſſet qualem nos, mirum eſt nihil dudum protuliſſe, unde hoc appareret; cum nos nihil fere attingamus, quin aliqua nobis occurrant notatu digna.

 Non

* Inſerta eſt *Actis* Maii 1700. pag. 198.

1699 Jul. Non eſt neceſſe, ut pondus aëris ſit ejus condenſationi proportionale, niſi aërem ponamus eſſe homogeneum comprimibile. Quid enim, ſi conſtat duabus partibus, una comprimibili, altera æqualiter diſſeminata non comprimibili, uti certe tale aliquid ei inſperſum non videtur negandum? ſit aëris pars comprimibilis b, incomprimibilis c, ſpatium quod b occupat ſit l, quod c occupat ſit m Ponamus totum comprimi in ſpatium dimidium $(l+m):2$, itaque cum ſpatium ipſius c maneat nempe m, patet ſpatium novum ipſius b fore $(l-m):2$, adeoque fore minus dimidio prioris: itaque cum gravitas ſpecifica ſit in ratione ponderis, ſeu materiæ, directa & voluminis reciproca, patet eam non fore in ratione condenſationis ſive compreſſionis, nec in ratione virium comprimentium. Quin etſi omnes partes aëris [intelligo ſemper eas, quæ pondus habent] eſſent comprimibiles, ſi tamen aliæ plus minuſve aliis tales eſſent, rurſus aliqua eſſet diverſitas. Hinc in Boylii defenſione contra Linum oſtendit Tabula experimentorum, paulo majore fuiſſe opus pondere mercurii, quam opus eſſe videbatur; quod ego admiſtæ materiæ incomprimibili imputo. Hinc denſitas aëris [cui reciproca eſt raritas] duplici modo accipi poteſt, vel ex pondere ipſius & volumine, ita nihil aliud erit, quam ipſa aëris gravitas ſpecifica; vel ex compreſſione, ſive vi elaſtica, ſeu ex pondere, quod aër poteſt ſuſtinere in vacuo; verbi gratia, ex altitudine mercurii. Hæc duo coinciderent inter ſe, ſi aëri nihil non comprimibile, aut nihil inæquabiliter comprimibile eſſet immiſtum, ſed ſi diſtinguamus b & c, utique divortium duæ æſtimationes patiuntur. Ut in caſu jam dicto, gravitas ſpecifica fiet dupla, ſed compreſſio plus quam dupla. Et ideo aër in ſpatium dimidium comprimendus erit pondere plus quam duplo ejus, quo in priore ſpatio coërcebatur. Et hinc, experimentis conferendo gravitatem ſpecificam & vim elaſticam aëris, definiri poterit aliquid circa aëris partes.

Jam pergamus ad ea quæ dixi de calore. Hic verba mea ſecius accepiſti. Dixi aërem rarefactum videri a calore accipere vim ſe dilatandi majorem, quam proportione raritatis. Credis me voluiſſe dicere, proportione reciproca. Sed ſenſus hic eſt. Sint duo unius

ejuſ-

Digitized by Google

ejuſdemque aëris volumina unum V alterum majus (V); ponamus aërem in volumine V poſitum per ſe ſuſtinere pondus p. Calore autem dati gradus accedente, ſuſtinere poſſe majus pondus π, ſeu a pondere π, [non obſtante calore] in ſuo volumine V coërceri. Ponamus eundem aërem in volumine (V) poſitum per ſe ſuſtinere pondus (p) & accedente calore pondus majus (π). Jam cum calor in aërem magis rarum minus agat, ponamus aërem eſſe homogeneum perfecte elaſticum, & eundem aërem in quocunque ſit ſtatu eodem calore æque dilatari, vel ad dilatandum ſe diſponi, verbi gratia, calorem dati gradus ſupervenientem efficere, ut aër duplum occupet ſpatium ejus quod habet, ſeu duplum prioris ponderis ſuſtineat, ſeu ponamus calorem eſſe ſupplementum compreſſionis vel denſitatis, ac tantum in aëre efficere, quantum ſi ipſe aër eſſet denſitatis duplæ. His poſitis utique erit p ad π ut (p) ad (π); ſed ſi (V) ſit millecuplum ipſius V, utique [poſito aërem eſſe homogeneum, ſeu gravitates ſpecificas eſſe ut compreſſiones vel pondera coërcentia] etiam (p) erit ſubmillecuplum ipſius p. Et ideo licet ponamus calorem eſſe virtutis elaſticæ duplicativum & π eſſe $2p$ vel $(\pi) = 2\ (p)$ tamen (π) erit quantitas parum notabilis, quia & (p) eſt talis, & hinc fit ut in Barometro parum noceat calor, ob aëris magnam raritatem. Boylius tamen notaſſe ſibi viſus eſt in aëre valde rarefacto adhuc aliquid notabile efficere calorem, & videtur velle plus eum facere, quam quis expectaret, ſeu plus quam pro ratione raritatis; ita ſcilicet ait, in *Obſervatis circa durationem virtutis elaſticæ aëris expanſi*, quæ ſubjiciuntur ejus Epiſtolæ *de mira aëris rarefactione citra calorem*. „ Adhuc, inquit, „ alius ſupereſt modus a me excogitatus, quo aër in quodam par- „ vo inſtrumento portatili ad quingenties, ſexcentieſve, forte mil- „ lies amplius ſolito ſpatium expanſus, non tantum longo temporis „ ſpatio elaſticitatem ſuam retinuit, ſed & primario cuidam quæſi- „ to meo ſatisfecit; utrum ſcilicet aër valde dilatatus citra calorem „ inſigniter afficeretur calore externo. Eo quippe ipſum affici in „ hoc inſtrumento palam eſt, ibi enim magna, quam jam acquiſi- „ vit, quamque tueri velle videtur raritate necquicquam obſtante, „ manus exteriori vaſi admotæ calor ſubitum manifeſtumque admo-

1699 Jul.

1699 Jul. „ dum operationem edit, eaque remota, aër ſenſibilis derepente ad „ priores ſuas dimenſiones juxta ac temperiem revertitur.

Hæc Boylius, conſtructionem inſtrumenti non explicans, Tab. XV. quæ forte talis fuit. In (*Fig*, 87.) tubo A ſi alius tubus B ſupra clauſus infra apertus, in quo ſuſpenſus mercurius. Et tubo A extrahitur aër, & deſcendet mercurius in tubo B ad imum, & ex illo deſcenſu æſtimari poterit rarefactio; cum enim tantillum mercurii in tubo B remaneat, erit aëris dilatatio præſens ad priorem, ut altitudo mercurii reſidua ad priorem. Extracto aëre claudatur tubus A & ita ſervetur ad uſum. Hic tubo A calefacto mercurium nonnihil exſurrexiſſe non dubito, cum enim aliqua vis elaſtica aëris ſuperfuerit, non mirum ſi ea fuit calore aucta. Sed cum tamen Boylius nihil diſtincti afferat, neſcio an hinc aliquid colligere novi potuerit. Nam ſi, ut ſolet, contentus fuit, rem quæ per ſe intelligitur ſenſibilem reddere, non erat cur valde commendaret experimentum, aut quæſito alicujus momenti ſatisfactum diceret. Sed ſi calor, qui mercurium aëri parum rarefacto incumbentem, in vacuo in duplum attulit, illam exiguam mercurii quantitatem in hoc tubo B plus quam in duplum extuliſſet, experimentum fuiſſet alicujus momenti, & calor in aëre rarefacto plus egiſſet quam proportione raritatis ejus admittere debere videatur. Ex talibus experimentis haberi poſſet, utrum calor agat, ut ſic dicam, per multiplicationem, an per additionem, id eſt an tantum ſic agat, quaſi aëris denſitas multiplicaretur, ut paulo ante ſuppoſui, an vero ſic agat, quaſi novam aliquam vim de ſuo adjiciat conſtantem, ut ſic dicam, non vero proportione aëris recipientis creſcentem? An vero agat partim per multiplicationem, partim per additionem? Sane ſi additio admiſceretur, calor magis aëris rarefacti elaſtrum augebit, quam pro ratione raritatis; & aëris compreſſi elaſtrum minus augebit, quam pro ratione denſitatis. Et hoc eſt quæſitum magni momenti, quod merebatur utique definiri. Sed neſcio an vim ejus perſpexerit Boylius.

Hic autem abſtraho animum ab eo defectu, de quo initio locutus ſum, qui admixto incomprimibili oritur, & alium irregularitatis,

tis, ſi qua nova deprehenditur in caloris operationibus, fontem quæro. Obiter addo, ex eo quod aër comprimendo annihilari nequit, ſequi quidem, quod ad gradum tantum finitum denſitatis pervenire valeat; ſed tamen ſi fingeretur res homogeneè, & ut ſic dicam metaphyſice elaſtica, ſemper continuari poſſet compreſſio in infinitum, & pondere centies millies aucto in partem 100000. mam comprimetur; nihil ergo prohibet, denſitates eſſe viribus proportionales, modo aër ſit homogeneè elaſticus, nec ullum hinc periculum annihilationis. 1699 Jul.

Peto ut mihi communices quæ a te petit Dnus. VARIGNONIUS, nempe Analyſin lineæ breviſſimi appulſus ad rectam, & Analyſin Tui Theorematis de rectificatione curvarum, * & poſtremo noſſe opto, quid ſit illud cujus ſpem feciſti Academiæ ſub finem ſcripti Tui de quadratura ſegmentorum Cycloïdalium †. Nam & ego libenter Tuis frui velim. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 25. Julii 1699.

Deditiſſimus
G. G. LEIBNITIUS.

* *Quod legitur in* Actis Erud. 1698. Oct. pag. 462, vel Opp. Tom. I. N°. L. pag. 249

† Mem. de l'Acad. R. des Sciences de Paris 1699. pag. 134. *vel* Act. Erud. 1699. Jul. pag. 316, *vel* Opp. Tom. I. Num. LVIII. p. 312.

EPISTOLA XCV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Mittit reliquam partem Opuſculi FATIANI, *ſuamque ipſius reſponſionem, qua occaſione varia quærit.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

MItto ecce partem reliquam Libelli FATIANI, quam promiſeram; neque dubito quin priorem acceperis, una cum meæ

1699 Jul. reſponſionis delineatione. Adjungo & copiam litterarum ad Dnum. VOLDERUM, petoque ut omnia per partes remittas. Neſcio quid Dnus. FATIUS potuerit adjungere ad Theoriam gravitatis *Newtonianam*, ut participem ſe honoris jactare poſſit, ut facit.

An unquam conſideraſti numerum diſcerptionum vel divulſionum numeri dati, quot ſcilicet modis poſſit divelli in partes duas, tres, &c. Videtur mihi ejus determinatio non facilis, & tamen digna quæ habeatur.

Prolixe nuper dixi de aëris gravitate ſpecifica & vi elaſtica, & caloris frigoriſque ut ipſis concurrente. Digna res quæ tum rationibus, tum experimentis ſtabiliatur.

An quiſquam nunc in *Batavis* evigilat ad ſtudium interioris Geometriæ? Quid facit ille juvenis doctus *Hagienſis*?

De NIEUWENTITIO & altero illo, qui Problemata ſpernebat, MAKREELIO puto, nihil ne amplius auditur? Credo ubi hæc ſciverit NIEUWENTITIUS cum CLUVERIO & FATIO, triplum fœdus contra nos eſſe initurum. Vale,

Dabam *Hanoveræ* 28. Julii 1699.

Deditiſſimus
G. G. LEIBNITIUS.

P. S. Adjungo & ſchedam, quam fortaſſe meæ ad FATIUM reſponſioni annectam, ut appareat quam infinities ampliora dare liceat iis quæ dedit MOIVRÆUS. *

* *G. G. L. Reſponſio ad Nic.* FATII DUILLERII *imputationes. Acceſſit nova Artis analyticæ promotio ſpecimine indicata, dum deſignatione per numeros aſſumptitios loco litterarum, algebra ex combinatoria arte lucem capit.* Act. Erud. 1700. Mai. pag. 198. & ſeq.

EPIS-

EPISTOLA XCVI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentes.

De Voldero. *De* Fatii *Opuſculo. Inveſtigatio ſolidi minimæ reſiſtentiæ.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Ecce Domini Volderi reſponſionem: Communicavit mihi 1699
deſcriptionem Tuarum, quæ ad me obſignatæ pervenerant, Auguſt.
ita ut non opus ſit eas porro mittere. Ad Tuam querimoniam de ipſius nimio rigore reponit, ſe Tibi non contradicendi, ſed unice veritatis amore objicere; ſe libenter agnoſcere, aliud eſſe objicere, aliud exigere demonſtrationes; ſed ex altera parte non minus certum eſſe aliud eſſe objectionibus reſpondere, aliud oſtendere id quod aſſeritur: ſe tantopere non laboraſſe de menſura virium, quam ut, ſi fieri poſſet, ex Te hac occaſione eliceret demonſtrationem ejus quod ais, ſubſtantiam omnem neceſſario actuoſam eſſe: hanc enim fruſtra ſe quæſiviſſe ſæpius, quæ tamen ſibi videatur maximi momenti multis de cauſis; ſed eam ſpem jam evanuiſſe, nec ſe velle hanc urgere amplius, ne videatur uti eodem rigore. Queritur porro, quod forte exiſtimes, ſe Cartesio ita eſſe addictum, ut ejus effatis abſque examine calculum adjiciat: in multis eum erraſſe ſe non dubitare, nec tamen exiſtimare omnia illi quæ objiciuntur vere objici: dicit porro, ſe admodum mirari, quod ita conqueraris de hac ſua negatione, quæ ipſam rem de qua agitur continet; & tamen, quod ne verbulo quidem reſpondeas ad ea quibus negationis ſuæ cauſam dederit; ſive quod ad ea non attenderis, ſive quod tam frivola exiſtimaveris, ut reſponſione digna haud cenſueris, ſive denique alia quæpiam, quam hariolando aſſequi non poſſit, interceſſerit cauſa.

Ecce

1699 Auguſt. Ecce remitto ſchediaſma reſponſorium, quod paraſti contra ſcriptum DUILLERII; placet mihi valde, quod modeſte, ſed ſimul vivide, reſpondeas; gratias ago, quod mei etiam quodammodo Apologiam ſcripſeris, quando DUILLERIUS queritur; me, cum programmata diſtribuerem, ipſum non dignatum eſſe ut ipſi Exemplar unum miſiſſem. Sed ad hoc potuiſſes regerere, me non ſomniare, ubinam in *Anglia* degat, vel qua inſcriptione Litteras meas ad illum mittere potuiſſem; ob hanc rationem, me duo exemplaria miſiſſe Dno. NEWTONO, ut & Dno. WALLISIO, non ut hos Viros ad certamen provocarem, quemadmodum Stoïcus noſter arbitratur; ad provocandum enim unum exemplar ſuffeciſſet: ſed quia horum tantum ſedem ſtationis ſciam: his duobus me tantum miſiſſe, ut ceteris Mathematicis communicarent, quibus ipſi voluiſſent. Quando porro arroganter adeo....... Tibi inſultat, *ſe a Te nihil didiciſſe, aliis diſcipulis Tibi gloriandum eſſe;* reſponderem ego, omnino verum eſſe; nihil illum a Te didiciſſe, adeoque etiam non incultum ſuum Viros honeſtos tractandi morem. Ante omnia paulo aſperius excipere deberes fictam ipſius modeſtiam, ſub cujus umbra ſuam infirmitatem tegere conatur, quando......... quiritatur *ſe quoque, ſi qua invitatione dignus viſus fuiſſet, Litteris ſuas dudum ſolutiones fuiſſe exhibiturum*; quaſi ſcilicet, ſi modo ſe applicare dignatus fuiſſet, primo ſtatim applicationis momento totum myſterium detecturus fuiſſet. Interim nobis non dicit quanto tempore fruſtra inſudaverit, quantum...... laborem hanc in rem impenderit. Scire enim te volo, hic aliquem eſſe exulem *Gallicum*, duorum Comitum Anglicorum Ephorum, qui antequam ſcirem DUILLERIUM aliquid in hanc rem edidiſſe, mihi narravit, quod familiariter novit Dominum MOIVRÆUM pariter Gallum exulem, & DUILLERIUM; quod jam ante duos circiter annos uterque, tam DUILLERIUS quam MOIVRÆUS, quotidie ſe invicem inviſerent, & magna contentione ſe ſe huic Problemati accinxerint, [illud enim ſtatim viderunt in *hiſtoria Erud.* BASNAGII; ....] & quaſi certatim laborare voluiſſent, integras noctes conſumpſerint: quod MOIVRÆUS primus deſtiterit re infecta, & tandem quod DUILLERIUS, poſtquam

poſtquam diu ſatis inſudaſſet, abjecerit arma, ipſi Manneville- 1699
læo [ita nomen narrantis eſt] candide faſſus ſe omnino deſpe- Auguſt.
rare; quod poſtea tamen ſub ipſius [Mannevillæi] abitum ex *Anglia*, ante 18 menſes fere, de novo Duillerius reſumſerit ad manus Problema deſperatum, eique acriter & tenaciter inhæſerit adhuc, cum ab ipſo proficiſceretur; quod autem plura neſciat, an ex eo tempore quæſitum invenerit, nec ne. Hiſce itaque diebus cum ipſi monſtrarem ſcriptum Duillerii hæc omnia diſſimulantis, mirari non ſatis potuit, ... Interrogavi Dominum Mannevillæum, annon ægre laturus ſit, ſi talia reſponſioni publicæ & ad ſcriptum *Duillerianum* edenda admiſceremus; ille quidem annuit, modo id fiat, ſuppreſſo ſuo nomine; imo, ſi neceſſe eſſet, quovis tempore veritati teſtimonium dare, etiam nomine ſuo, ſe paratum ſemper eſſe; quid jam factum opus ſit ipſe judices. Quidquid ſit, mihi videtur........ & inanis excuſatio, dicere, modeſtiam impedire quominus quis ſua inventa publici juris faciat; ita enim nemo unquam aliquid in publicam utilitatem edere poterit, niſi........ immodeſtus eſſe velit. Quid ſi vero nomen exprimere jactantiæ eſſe dicat, quid ni & ipſe ſuas Problematum difficiliorum curvæ Catenariæ, Velariæ, Iſochronæ enodationes, methodoſque, quas jamdiu poſſidere dicit, bono publico promulgat, ſuppreſſo ſuo nomine: hoc utique, ſalva ſua modeſtia, fieri poſſet. Quantum tandem ad ipſas Fatii ſolutiones, quid de iis ſentiendum neſcio; ſcis ipſe hujuſmodi Problemata, noſtro more tractata, nullum, aut perbrevem calculum, requirere; quia plerumque ex ſola contemplatione infinite parvorum, adhibita quadam dexteritate, quæſitum ſponte fluit; hinc perplexi calculi, quos inſtituit, mihi valde ſunt ſuſpecti; ſubvereor enim ne ipſi hic acciderit, quod nuper Gregorio paralogizanti in curva Catenariæ, qui concluſioni ſolutionem accommodavit. A me ſane impetrare non potui, ut prolixas adeo Analyſes Duillerii examinarem, partim quod tempus inutiliter terere, partim quod etiam minutiſſimis litterulis inſpiciendis oculis meis officere noluerim. Contremiſco fere, ſi oculos conjicio in inextricabilem computationem pro curva ſolidi minimæ reſiſtentiæ; quam quidem vo-

Digitized by Google

1699 cat magis arduæ diſquiſitionis, & difficiliorem quam Problema ce-
Auguſt. lerrimi deſcenſus; ſed DUILLERIO forſan ſoli, quia genuinam ſolvendi Methodum nondum habet: Hoc enim Problema ſolidi minimæ reſiſtentiæ, tantæ facilitatis deprehendo, ut ad ejus ſolutionem perveniendam nullo prorſus calculo fuerit mihi opus; quandoquidem calamo & charta deſtitutus, & in lecto decumbens, ſola imaginationis vi plenarie id ſolvi. Solutionem hic adjiciam, quam, ſi placet, cum reſponſione tua *Actis* inferi * curabis, ut videat DUILLERIUS ſe mirum quantum adhuc abeſſe a vera &
TAB. naturali via, ... Eſto (*Fig.* 88.) curva quæſi-
XV. ta BFN, quæ ex revolutione ſua circa BM deſcribat ſolidum in quod minima fiat reſiſtentia, ſi moveatur ſecundum plagam axis BM. Elementa applicatarum NM concipiantur diviſa in partes æquales NR, RP: ſint NL, LF duo elementa curvæ reſpondentia elementis NR, RP: producatur RL ad O, ita ut LO infinite parvum ſit reſpectu RL. Ductis NO, FO, erit ex natura minimi reſiſtentia in zonam ex converſione elementi curvæ NLF [quod ut duas lineolas rectas NL, LF conſidero] factam, æqualis reſiſtentiæ in zonam ex converſione lineolarum NO, OF, adeoque reſiſtentia zonæ NL — reſiſtentia zonæ NO = reſiſtentiæ zonæ FO — reſiſtentia zonæ FL. Jam vero aſſumta hypotheſi communi, qua & NEWTONUS utitur pag. 325 & ſeqq. nimirum reſiſtentiam obliquam in NL eſſe ad reſiſtentiam directam in NR, ut NR^2 ad NL^2; exprimentur reſiſtentiæ elementorum curvæ exempli gratia ipſius NL per $NR^3 : NL^2$, adeoque reſiſtentia zonæ NL per $MN.\ NR^3 : NL^2$. hinc igitur $(MMNR^3 : NL^2) - (MN.\ NR^3 : NO^2) = (MR.\ RP^3 : FO^2) - (MR.\ RP^3 : FL^2)$. Sunt autem OT, LS, differentiæ ipſarum NO, NL, & LF, OF harum reſpectu incomparabiles, ideoque $(MN.\ NR^3 : NL^2) - (MN.\ NR^3 : NO^2)$ tantundem quod $2\,MN.\ NR^3 : TO : NO^3$, & $(MR.\ RP^3 : FO^2) - (MR.\ RP^3 : FL^2)$ tantundem quod $2\,MR.\ RP^3.\ LS : FO^3$. Hoc igitur illi eſt æquale. Et diviſis per $2\,NR^3$ — & $2\,RP^3$ [quæ per hypotheſim

* A. E. 1699. Nov. p. 513. & 1700. Mai. pag. 208. Opp. Tom. I. N°. LIV. pag. 307. & N°. LVI. pag. 315.

ſim ſunt æqualia] provenit MN. TO : NO^3 = MR. LS : 1699
FO^3. Ut autem TO & LS, incomparabiles cum reliquis, eliminemus, obſervo quod propter triangula ſimilia NO : RO = LO : TO adeoque TO = RO. LO : NO, & ob eandem rationem LS = VF. LO : FO. ſubſtitutis itaque hiſce valoribus loco TO & LS, & diviſis per communem LO, habebimus æquationem elementis conſtantem MN. RO : NO^4 = MR. VF : FO^4, affectam ſuis reſpective applicatis. Unde concludo curvam quæſitam BFN ejus eſſe naturæ, ut, ſuppoſitis elementis applicatarum æqualibus, applicata quævis, multiplicata per elementum reſpondentis abſciſſæ, & diviſa per biquadratum elementi reſpondentis curvæ, producat quantitatem conſtanti æqualem; quæ ergo conſtans, ſervata homogeneorum lege, ſumatur ad lubitum. Hinc ſi BM vocetur x; MN, y; NR, RP, &c. dy; RO, dx; NO, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, fiet $y\,dx : ds^4$ = huic aſſumtæ quantitati conſtanti & homogeneæ $a : dy^3$; quæ reducta, dat hanc æquationem differentialem primi gradus $y\,dy^3\,dx = a\,ds^4$, quæ curvæ quæſitæ naturam exprimit; ubi notandum proprietatem hujus curvæ, a Newtono ſine analyſi & demonſtratione traditam pag. 327. ſi reſolvantur in æquationem, eandem omnino dare quam hic inveni. Miror profecto Duillerium ſuam ſimpliciorem, hanc vero perplexiorem dicentem: cum tamen hæc illam exhibeat facile, non vero vice verſa, niſi ſumma cum difficultate: quam ſane Duillerius non facile ſuperabit; id eſt, non facile a cognita proprietate radii circuli oſculantis ad proprietatem tangentis aſcendet; quemadmodum viciſſim nullo labore ex proprietate tangentis proprietas radii oſculantis innoteſcit; non ſecus quam ab integralibus ad differentialia deſcendere ludus jam eſt......... Videtur Duillerius hæc nondum ſatis ruminaſſe, nec ſufficientem adhuc praxin in noſtris habere, quod hoſpitis inſtar ἀγεωμετρήτως adeo loquatur. Non minus miror quod Newtoni proprietatem vocet Conſtructionem curvæ. Indicium ſane eſt, illum etiam parum noſſe quantopere deſideretur modus conſtruendi curvam, ex proprietate tangentis data, quaſi ſcilicet iterum non minus facile eſſet ex tangentibus curvam determinare, quam ex cur-

Auguſt.

1699 Auguſt. va tangentes ſane tantum abeſt NEWTONUM conſtructionem dediſſe, ut potius judicem maximam adhuc ſupereſſe difficultatem, conſtructionem ex ejus proprietate, ſeu ex æquatione jam inventa, eliciendi; idque propter differentialium altam dimenſionem, cujus radix quærenda eſſet more algebraïco, antequam relatio poſſit haberi inter dx & dy; quod, cum prolixiſſimum calculum requireret, non abs re puto, ſi hic peculiarem modum oſtendero, quo, miſſa inveſtigatione radicis per algebram, ſtatim ad cuvæ quæſitæ conſtructionem, haud ſane inconcinnam, pervenio. Modus autem hic talis eſt; æquatio inventa erat $ydy^3\, dx = a\, ds^4$ ſeu ſubſtituto ipſo valore ds, $ydy^3 dx = adx^4 + aadx^2\, dy^2 + ady^4$: ponatur jam $dx = mdy : a$; hocque ſurrogetur in æquatione, & tunc diviſa per dy^4, prodibit hæcce æquatio algebraïca $aamy = m^4 + 2aamm + a^4$; adeoque $y = m^3 : aa + am + aa : m$, &c. $dy = 3mmdm : aa + 2dm - aadm : mm$, & hinc $mdy : a$ ſeu $dx = 3m^3\, dm : a^3 + 2mdm : a - adm : m$. Sumtis igitur horum integrabilibus erit $x = 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$; [per lm, intelligo logarithmum ipſius m, qui per ea quæ explicui de principiis calculi exponentialium in *Act. Erud.* 1695. Menſe Martio eſt æqualis [$\int adm : m$;] inveni itaque valores coordinatarum x & y, expreſſos per quantitates duas, tertiam communem indeterminatam m involventes, id quod hanc elegantiſſimam ſuppeditat conſtructionem. Ad axim (*Fig.* 89.) CE

TAB. XV. deſcribantur duæ curvæ, una algebraïca DAH, altera tranſcendens IK, hac lege ut poſita abſciſſa CE $= m$, applicata illius EH ſit $= m^3 : aa + 2m + aa : m$, applicata vero hujus EK ſit $= 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$; erunt itaque KE, EH coordinatæ curvæ quæſitæ. Ad quam igitur conſtruendam nihil aliud opus eſt, quam ut ad CM, applicatis parallelam, tanquam ad axem ducatur producatur perpendicularis KM in N, ita ut MN ſit $=$ EH: puncta enim N erunt in curva quæſita BN, quæ nempe circa CM converſa producit ſolidum, in quod, ſi moveatur ſecundum plagam axis CM, fluidum faciat reſiſtentiam minimam. *Q. E. F.* Notandum quod curva IK ſit ex earum numero, quas voco percurrentes; quarum ſcilicet æquatio naturam exprimens conſiſtit terminis finitis

finitis, ſeu algebraïcis, ſed ad indeterminatam dimenſionem aſcendentibus: Poſitis enim ut ante CE, m, & EK, x; & aſſumta conſtanti $c^4 = 4a^3 la$, erit æquatio naturam curvæ IK determinans; hæc $m^{c^4} = a^{3m^4 + 4aamm - 4a^3x}$; id eſt, indeterminata m, elevata ad potentiam determinatam c^4, eſt æqualis determinatæ a, elevatæ ad potentiam indeterminatam $3m^4 + 4aamm - 4a^3x$; adeoque hæc curva ipſius Logarithmicæ naturam quodammodo habet. Etenim & Logarithmica hujuſmodi æquatione gaudet, cujus nempe quantitas determinata ad potentiam indeterminatam, quantitas vero indeterminata ad potentiam determinatam elevatur. Hæc omnia, ſi digna deprehendes quæ *Actis* inſerantur, per me licebit; Tuæ interim cenſuræ & emendationi ſubjecta volo. Ad reliqua contenta litterarum reſpondere, hæc feſtinantiſſime ſcribenti mihi jam non vacat. Ea in proximam occaſionem reſervabo, ne ſchediaſmata tua retardem. 1699 Auguſt.

P. S. Ecce dum poſteriores has lineas ſcribo, Tuas ſecundas litteras cum adjunctis ſchedis accipio. Percurrens obiter ultimam plagulam ſcripti Duillerii, reperio conſtructionem, quæ cum mea nonnihil affinitatis habere videtur, ſed eam examinare jam non licet. Certus tamen ſum, quod non inveniſſet ex ſua ſolutione, niſi *Newtoniana* proprietate adjutus. Optandum eſſet ut Methodum quam ſecutus eſt, adjeciſſet; partim ut id verum eſſe patuiſſet, partim etiam ut videre potuiſſemus an non eadem perplexitate laboret, quam ipſa ejus ſolutionis via: Tantam ſaltem ſimplicitatem qua ego uſus ſum, ipſum in conſtructionis ſuæ inveſtigatione adhibuiſſe vix crediderim. Cæterum vides quam brevi tempore, quam prompte hæc omnia expediverim. Triduum enim tantum eſt, quod tuas priores, cum chartis *Fatianis*, quæ hiſce meis anſam dedere, acceperim. Miror vero operam ingentem, quam Fatius huic *Newtoniano* problemati impenderit, deſcribendo curvam laborioſe in ampliori, ut dicit, charta, & calculando integram tabulam, cui forte non unam, alteramve tantum horam deſtinaverat. Jam vide annon meliori jure ſua propria verba ipſe in ſinum retundere poſſim, dicendo. *Quaſi vero manus darent*,

 quicun-

1699 Auguſt. *quicunque in arenam e veſtigio deſcendere nolentes, intra præſtitutum tempus problema non ſolviſſent. Problema* inquam, *cui ſolvendo auctor opportunum tempus nactus fuerit, cui tractando forſan multos annos inſudaverit; quod elegerit ipſe, quod amaverit, ac ardentiori ſtudio proſecutus fuerit, & quod mihi hactenus ignotum in* NEWTONI *libro delituit. Id me interim paratum corripuit, quamvis adeo propria ſtudia non deſeruerim.* Sunt enim & mihi multa agenda, & forte non minoris momenti quam negotia DUILLERII, qui ſui juris, paratus eſſe ſemper deberet ad problemata ſolvenda, ſi tanta, ut jactat, dexteritate pollet. Vale, Vir Ampliſſime, & ſave.

Groningæ 7. Auguſti 1699.

Tuo Cultori
addictiſſimo J. BERNOULLI.

P. S. Miſi tibi nuper per aliquem *Saxonem* ſtudioſum Medicum Diſputationem meam *De nutritione*, * ſcire velim an acceperis.

Quis quæſo iſte Dom. S. cui, ut videtur, DUILLERIUS dentes etiam monſtrat...............

Legi Tua de progreſſionibus: † mihi nimis abſtracta & abſtruſa videntur. Habui etiam conſimiles ſpeculationes aliquando.

* Opp. Tom I. N°. LIII. pag. 273.
† De quibus in P. S. Epiſt. Præced.

EPIS-

EPISTOLA XCVII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De ſuis ad Volderum *litteris. De opuſculo* Fatiano. *Varia.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

CUm Dominus de Volder quæſtus fuerit, objectiones quaſdam ſuas a me præteritas fuiſſe, ideo reſpondeo ample ſatis, & ni fallor omnem ſpeciem difficultatis circa actionis æſtimationem tollo; ac rationem explico cur in actionibus liberis, ſeu potentiam ſuam mere exercentibus actio & vis agendi, non tantum ab effectu, ſed etiam ab effectus promptitudine debeant æſtimari, ſed in actionibus violentiam facientibus, & potentiam ſuam agendo deſtruentibus, non promptitudinis, ſed ſimpliciter effectus realis quantitas ſit æſtimanda, & ita quæ nunc dico cum iis quæ dixi olim non concilientur tantum, ſed & pulcherrime conſpirent, ut in affectu reali nulla, in affectu formali omnimoda temporis ratio habeatur. *1699 Sept.*

Quod ſi Dnus. Volderus ea æquitate uti pergit, quam initio oſtendere viſus eſt, non dubito, quin ſibi in hoc argumento ſatisfactum profiteatur.

Doctrinam de ſubſtantiarum activitate, magis adhuc a materia ſenſibuſque abſtractam, nunc agitare inutile putavi, donec de re faciliore conveniamus. Dicat ille, an non dicat, ſe de ſententiæ circa ſubſtantiam meæ demonſtratione jam deſperare, non refert; neque ideo æquum eſt ut ſtatim, omiſſis aliis factu neceſſariis, in hæc ab uſu remotiora incumbam, & nondum ſatis digeſta immature effundam, ideo tantum ut ridicula vanitate apud ipſum jactare me demonſtratorem poſſim.

Et qua id, quæſo, ſpe aggrederer, ſi in rebus mathematicis, &

1699 Sept. & meo judicio liquidiſſimis ſibi ſatisfieri non pateretur? Ad convincendos homines in methaphyſicis alio ſcribendi genere eſſet opus, cujus formam concepi magis animo, quam expreſſam habeo.

Cæterum nolim ut meo nomine de rigore ejus apud ipſum queraris; quid enim ille rigor, vel ſi mavis, obſtinatio, ſi pergeret, mihi nocet? Aut quid aliud facit, quam ut ipſe ſibi aditum aperiri vetet? Difficultates objicientium libenter admitto, atque etiam ſolvo; ac dum id facio, non parum lucis ſpargo. Aliud, fateor, eſt difficultatibus reſpondere, aliud quæſita demonſtrare. Sed qui partem contemneret muneris, an Tu illi totum obtrudendum putares? Adde rem eſſe maximam ſatisfacere difficultatibus, auſimque dicere, a nemine hactenus præſtitam in Philoſophia. Facile crediderim pluris ipſi videri, intimam aperiri naturam ſubſtantiæ, quam æſtimari corporum vires. Sed hæc ipſa virium æſtimatio mentem præparat, ut facilius ſuſtineat majorem illam lucem, qua perſtringuntur nimis, velut offuſa caligine, qui vulgi & *Carteſianorum* etiam notionibus circa naturam materiæ, motus & virium ſunt aſobcecati; itaque per hanc portam a Matheſi ad Metaphyſicam tranſeundum cenſeo.

Non igitur tam noſtrum eſt queri, quam aliis viam rectam monſtrare, & ad ejus ſtudium hortari; ſi negligant, nec ipſorum eſt de nobis, nec noſtrum de ipſis, ſed ipſorum de ſe ipſis queri.

Expecto ut *Fatianum* Libellum mihi per partes remittas;nam Dnus. Menckenius prius relationem de eo petit *Actis* inſeri, quam refutetur. Eam curabo ut habeat a partium ſtudio alienam: Jungam deinde reſponſionem meam, & excerpta ex Tuis, tum quibus Problema figuræ minimum in fluido reſiſtentis melius ipſo ſolvis, tum etiam alia præſertim pertinentia ad narrationem Dni. Mannevillæi, ſed diſſimulato penitus nomine viri optimi. Addam etiam quam prompte rem expediveris.

Credibile eſt, tum demum reſumſiſſe Problema Brachyſtochronæ Fatium, quando *Acta Eruditorum* cum Methodis in *Angliam* pervenere. Quis vero his ita poſitis, quæ ex narratione Dni. Mannevillæi veriſſima eſſe non dubito, non ſtatim judicet

dicet falſum eſſe, quod ait perſpectum ſibi fuiſſe conſenſum inter 1699
Brachyſtochronam, & lineam opticam undarum. Sept.

Ille S. quem invadit, eſt Dominus Sault, qui, *Gregoriano* credo more, ſpeciem quandam ſolutionis vel demonſtrationis affectavit, cui parem non fuiſſe facile credo. Sed æquum erat ut Dnus. Fatius a ſe inciperet, antequam alios reprehendere auderet: ab omni vitio immunis eſſe debet, qui in alium paratus eſt dicere. Itaque non dubito Saultium, ubi omnia intellexerit, par pari redditurum. Si nonnihil lapſus eſt, certe modeſtiæ leges non violavit, nec malis artibus famam quæſivit, ... Certiſſimum eſt, nunquam Duillerium ad ſolutionem *Newtoniani* Problematis fuiſſe perventurum, niſi *Newtonianam* ante oculos habuiſſet; nam quam ipſe per Labyrinthum ſuum aſſecutus eſt, exitum ex Labyrintho nullum dediſſet.

Mea de progreſſionibus vel potius de expreſſionibus obiter Tibi inſpecta puto; alioqui vidiſſes nihil eſſe facilius, nihil naturæ conſentaneum magis, patereque etiam Tironi jam ſum expertus. Civem Atlanticum, * id eſt, ut ſuſpicor Tuum; qui mihi ſe non ignotum dicit, neceſſe eſt magis detrahere ſibi larvam, ut a me agnoſcatur. Vale.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{1}{11}$ Septembr.

Deditiſſimus
G. G. Leibnitius.

P. S. Doleo tuam *De Nutritione* diſſertationem ad me non perveniſſe.

+ Vid. *Acta Erudit.* 1699. Mart. p. 176.

EPISTOLA XCVIII.

BERNOULLI AD LEIBNITIUM

Reſponſio ad præcedentem.

De Leibnitianis *ad* VOLDERUM *litteris. De lite inter* NEWTONUM *&* FATIUM. *De libertate Dei. De aëris compreſſione & elaſticitate.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1699 Sept. REmitto tandem ecce Libellum *Fatianum*, quod citius feciſſem, niſi inauguratio Recturæ Academicæ, quæ pro hoc anno a Proceribus mihi delata fuit, ſcribendi otium præripuiſſet. Forſan & eadem in cauſa erit, ſi, ea durante, ad Tuas poſthac ſegnius & negligentius, quam pro more ſolitus ſum, reſpondero; cujus veniam a Te facile mihi promitto, ubi negotiorum Rectori incumbentium multitudinem perpenderis. Tuæ ad VOLDERUM exaratæ impenſe placuerunt, commovebunt ipſum haud dubie, ſi non prorſus permovebunt: perelegans imprimis eſt diſtinctio inter effectum formalem & realem, ut inter actiones liberas & violentiam facientes; ubi nimirum oſtendis in prioribus rationem habendam promptitudinis, ſed non in poſterioribus. Ita quidem æſtimationem faciendam eſſe ſemper putavi; hinc eſt, quod corporum aſcendentium vires ex altitudinibus tantum ſint metiendæ, non conſiderando quanto tempore percurrantur: cum enim corpus aſcendendo ſuam potentiam uniformiter deſtruat; patet utique parum referre, ſive promptius, ſive ſegnius peragatur, quod peragendum eſt. Vana adeoque eſt objectio dicentium, corpus quod plus temporis inſumat ad eandem altitudinem aſcendendo, plus etiam reſiſtentiæ a gravitate recipere; quoniam major tunc numerus ſit ictuum quibus grave repellitur.

Alius

Alius *Gallus* nuper mihi retulit, inter Newtonum & Fatium litem gravem ſubortam fuiſſe; qua vero de cauſa, illum latebat: hoc tantum pro certo addidit, quod Newtonus Fatium plagii inſimulaverit, graviterque exprobraverit ipſi quod alienis inventis ſuperbiat. Diſplicet fortaſſe Newtono, quod videat invitus arma ſua contra nos dirigi. 1699 Sept.

Ut paucis etiam ad Tuas priores, ad quas nondum reſpondi, nunc reſpondeam. Non puto me abſolute adeo dixiſſe Deum omnia facere neceſſario; prout talis ſententia a Theologis & Philoſophis damnata eſt in Hobbio, & Spinosa, aliiſque; quaſi nimirum Deus coacte ageret; minime; Sed ego ita interpretor: Deus agit ex decretis ſuis æternis, immutabilibus, & irrevocabilibus; adeoque a parte poſt neceſſariis; quorum itaque reſpectu Deus neceſſario agit; agit tamen etiam liberrime, vel ſponte, vel volenter, utpote qui a nulla re extrinſeca ad agendum determinatur: ipſe præterea Auctor exiſtit liberrimus, & independens, æternorum ſuorum decretorum; adeo ut hoc ſenſu ſine contradictione dici poſſit & libere, & neceſſario agere.

Ut evitemus Logomachiam circa pondus aëris, & ejus condenſationem; ego condenſationis quantitatem, ſeu gradum æſtimo ex reciproca ratione voluminum, & directa materiæ aëreæ, quæ pondus habet; ſive jam habeat partem incomprimibilem, ſive non: erit utique pondus aëris condenſationi ejus proportionale; finge aërem, volumine *a* contentum, uniformiter extendi, ut occupet volumen $2a$; numquid manente hoc modo pondere condenſatio prioris voluminis *a* duplo major eſt condenſatione poſterioris voluminis $2a$, adeoque numquid etiam gravitas ſpecifica illius duplo major eſt gravitate ſpecifica hujus: Finge jam aërem voluminis *a* extendi in volumen $3a$; id eſt, ſecundum definitionem condenſationis recipere triplo minorem condenſationem; recipiet ſic etiam triplo minorem gravitatem ſpecificam; ſiquidem tertia pars aëris in $3a$ contenti, etiam tertiam partem ponderat ejus quod ponderat totus; Et ſic porro: adeo ut pondus aëris æqualium voluminum ejus condenſationi ſit proportionale. Quando præterea dicis, credibile eſſe aëri æqualiter interſperſam eſſe partem incomprimibilem;

Digitized by Google

1699 Sept. hoc quidem facile largior, ſi id intelligas de particulis aëris ſeorſum ſumtis, quæ utique ſolidæ ſunt & compreſſioni non obnoxiæ, & ſic non aliqua pars tantum, ſed omnis aër erit incomprimibilis. Sed ſi, prout videtur, certæ parti ipſius maſſæ tribuis incomprimibilitatem, qualis vulgo aquæ tribuitur; tunc non capio, quo pacto talis materia in aëre comprimibili æqualiter diſſeminata intelligi poſſit; nam ſi diſſeminata eſt, ita ut particulæ ejus ſe mutuo non tangant, ut inſulæ in Oceano, quid impedit quo minus propius ſibi mutuo accedant, & ſic comprimibiles ſint, contra hypotheſim; eodem nempe modo, quo aqua alias incomprimibilis, ſed in vapores reſoluta, una cum aere cui admixta eſt, comprimitur. Quod ſi vero materiam illam incomprimibilem alio ſenſu in aëre diſſeminatam dicas; ut nempe ejus particulæ immediato contactu altera alteram excipiant, tunc rectius diceres partem aëris comprimibilem diſſeminatam eſſe in incomprimibili, quam vero hanc in illa; & ſic tota maſſa aërea foret incomprimibilis inſtar aquæ; immediatus quippe contactus particularum vi compreſſionem tentanti reſiſteret; niſi quis dixerit has particulas tam ſubtiles eſſe, ut per poros Anthliæ Pneumaticæ expelli poſſint; hoc vero Tu non ſupponis. Optarem itaque mentem tuam hac ſuper re clarius percipere; hactenus enim intelligere non poſſum, quomodo aëri interſperſa eſſe poſſit materia incomprimibilis, quæ poros corporum non tranſeat, & tamen compreſſionem aëris non impediat. Rectiſſime notas denſitatem aëris duplici modo accipi poſſe; vel ex pondere ipſius & volumine, quæ revera mihi aliud eſt quam ipſa aëris gravitas ſpecifica; & quidem hæc æſtimatio denſitatis, qua ſupra uſus, mihi vera & genuina videtur; vel ex compreſſione, ſive vi elaſtica, ſeu ex pondere, quod aër poteſt ſuſtinere in vacuo; verbi gratia, ex altitudine mercurii; hæc æſtimatio non niſi impropria eſt; quia elaſticitas non eſt de eſſentia compreſſionis; ſicuti exempli gratia, farina in modio ad dimidium fere comprimitur ſpatium ſine reniſu. Interim ſpero me, ſuo tempore, experimenta facturum ad indagandum quantum incrementa gravitatis ſpecificæ abludant a proportione incrementorum vis elaſticæ.

Intelligo jam quomodo accipiendum, quando dixiſti aërem rarefac-

Digitized by Google

refactum videri accipere vim ſe dilatandi majorem quam proportione raritatis: nimirum pondus, quod aër rarior, certo caloris gradu calefactus, ſuſtentare poteſt, majorem habere rationem ad pondus, quod idem aër non calefactus ſuſtentat, quam habet pondus, quod aër denſior eodem caloris gradu calefactus ſuſtentare valet, ad pondus, quod ſuſtentat non calefactus. Ejus quidem rei experientia mihi nondum conſtat. Experimentum, quod in eum finem proponis, ope tuborum duorum factu facile videtur: poteſt tamen, ut puto adhuc facilius inſtitui per duo Barometra communia, quæ in ſuperiori parte ampulla grandiuſcula inſtructa eſſent; Ea ad uſum ita pararentur: implerentur primo more ſolito mercurio, ſed ita tamen, ut pauxillum aëris in utroque remaneret, & quidem in data ratione, exempli gratia, duplo plus in uno quam in altero; id quod facile agnoſci poteſt, ſi tubi ſunt æqualis craſſitiei; poſtea, impoſito digito orificio, inverterentur & mercurio ſtagnanti in vaſculo immergerentur; digito ſubducto, deſcenderet & mercurius paulo infra ſolitam altitudinem, ob illud exiguum aëris, quod in tubis relictum eſt; qui vero aër mirum in modum rarefiet, utpote qui occupabit totum ampullæ ſpatium, & bonam tubi partem: nihilominus tamen ſi duo iſti tubi, una cum ampullis ſuis, per totum ſibi mutuo ſint ſimiles & æquales, erit aër in uno, adhuc duplo major quam in altero, ſine ſenſibili diſcrimine. Jam ad experimentum faciendum, illa duo Barometra ex eodem loco frigido, in quo ſunt, ſubito transferrentur in eundem locum calidum [exempli gratia, ut effectus perceptibilior fieret in ſudatorium valde calefactum:] manifeſtum eſt, ob aërem in ampullis incluſum & incaleſcentem, mercurium fore deſcenſurum, & quidem in eo magis, in quo aër minus eſt rarus. Id igitur tantum obſervandum eſſet, an in illo etiam duplo plus deſcenſurus eſſet; nam ſi minus, quam duplo plus, deſcenderet; tunc conjectura BOYLII vera foret. Etenim aër rarior a calore tunc accepiſſet vim ſe dilatandi majorem, quam proportione raritatis. Nota quod in fabrica horum Barometrorum, in id incumbendum ſit, ut mercurius probe ſoliciteque purgetur ab aëris bullulis in interſtitiis mercurii latentibus; ne aër ex mercurio aſcendens, & aëri, qui debita opera in tubis relictus eſt,

1699 Sept.

1699 Sept. ſe ſe adjungens, rationem relicti aëris in utroque tubo turbaret, & ſic experimentum ſuſpectum redderet.

Cæterum probe notas, in Barometro ordinario, calorem parum nocere, ob aëris [ſcilicet, ejus qui tractu temporis ex mercurio exhalat ſuperioremque tubi partem occupat] magnam raritatem. Imo nihil omnino noceret, ſi perfecte adeo purgatus eſſet, mercurius, ut ex eo nihil aëris aſcendere poſſet. Sed id inquirendum eſſet, annon preſſio aëris externi per calorem mutari poſſet; ita ut aſcenſus vel deſcenſus mercurii non ſemper eſſet effectus mutati ponderis aëris Atmoſpheræ, ſed etiam interdum ſolius mutati caloris: quo reſpectu non Barometrum, ſed Thermometrum foret. Quamvis ea de re nullum experimentum habeam; videtur tamen calor ſolus preſſionem aëris atmoſphærici augere non poſſe; ut enim calor elaterium aëris augeat, oportet aërem incluſum eſſe & coercitum; aër vero atmoſphæricus, ſuperveniente calore, libere rarefieri & ſurſum verſus extendi poteſt; unde cum nullus ſit reniſus, & interim idem pondus Atmoſphæræ conſervetur; ſequitur ſubjectum mercurium eadem ſemper vi premi, quantuſcunque calor ingruat.

Si aër metaphyſice fingeretur elaſticus; id eſt, ſi ad infinite exiguum ſpatium extendi poſſet; tunc utique eſſet quod dicis, denſitates eſſe viribus proportionales; id non nego: ſed fingi non debet quod non eſt, ut exinde aliquid probes abſolute: aër enim cum annihilari nequeat, neque adeo in infinitum comprimi, habebit vires in majore proportione quam denſitates. Vale.

Groningæ 26. Septembris 1699.

Amplitudini Tuæ

Devotiſſimus

J. Bernoulli.

EPIS-

EPISTOLA XCIX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De libertate Dei. De aëris compreſſione & elaſticitate. De WALLISII *Operum Tomo tertio.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

CUm Tibi nomen Magnifici Rectoris, dignitaſque ſit collata, (de quo honore gratulor ex animo,) non poteris tam crebro vacare litteris; ſcilicet ſuum quæque res tempus habet. 1699 Octob.

Etiam Spinosa vult Deum non coacte, ſed ſponte agere. At in eo peccat inter alia, quod Deo adimit electionem; quaſi nihil aliud poſſibile fuerit, quam quod fecit. Videris nunc non diſſentire à diſtinctione Theologorum inter diverſos neceſſitatis modos.

Quod aërem attinet, poterimus diſcriminis gratia condenſationem æſtimare ex pondere, quod eſt in volumine, compreſſionem vero [niſi meliorem vocem ſuppeditare potes] ex vi elaſtica. Hinc ſi particulæ incomprimibiles per aërem ſint diſſeminatæ, compreſſio nihil ad illas pertinebit; & nulla in hac re eſt difficultas; concipiendæ ſunt diſperſæ per modum natantium inſularum, & initio non impedient aëris compreſſionem, ſed impedient ut ſit condenſationi proportionalis, etiamſi talis futura poneretur, ſi aër eſſet ſincerus. Si vero tanta fieret compreſſio, ut tandem particulæ incomprimibiles omnes ſe quam arctiſſime tangerent, tunc etiam compreſſio ulterior ceſſaret. Interim revera nihil eſt prorſus incomprimibile, ſed tale intelligitur comparative, ſufficitque ad divortium condenſationis, vel compreſſionis, partes eſſe comprimibiles inæqualiter. Sincerus aër poſſet habere condenſationes compreſſionibus proportionales, ſcilicet ad ſenſum & aliquouſque. Revera enim talia in Natura nunquam procedunt, ut in pura Matheſi, & perinde

eſt

1699 Octob. eſt ac cum in deſcenſu gravium, ponimus velocitatem æqualiter creſcere, nempe ad ſenſum & aliquouſque; alioqui nec id rigoroſe verum eſt, & quidem ſi ſatis longa eſſent deſcenſuum ſpatia, etiam ſenſu notari poſſet, quantum regula illa fallat. Abſolute utique fieri non poteſt, ut corpus ſit pure, ſeu metaphyſice elaſticum, & ut ita dicam, πρῶτον ἐλαςικὸν; quia elaſtica vis non eſt aliquid primitivum & mathematicum, etſi pro tali utcunque aſſumatur, ut locus ſit æſtimationi; & perinde eſt condenſationes ponere compreſſionibus proportionales, ac ponere extenſiones viribus tendentibus, ſeu elaſtri proportionales, quod ſolemus facere, aſſumentes aliquid certum & rotundum, pro incerto. Cæterum, quod ais metaphyſice elaſticum debere poſſe comprimi in nihilum, ſeu ſpatium infinite parvum, id non obeſſet; quia ad id etiam opus eſt & vi infinita. Interim revera omnis compreſſio eſt ſubtilioris materiæ expreſſio; unde fieri utique nequit, ut aliquid ſit pure elaſticum, & ut pro aucta vi augeri ſemper compreſſio poſſit.

Perutile erit experimenta aliquando inſtitui, tum de divortio condenſationis & compreſſionis, tum de effectu caloris & frigoris pro portione denſitatis aut compreſſionis in aëre ſe exerente. Experimenta mallem in aëre condenſato quam in rarefacto, quia poſſent eſſe ſenſibiliora.

NEWTONO credo diſplicuiſſe in FATII ſcripto, primum quod videtur id agere FATIUS, ut eum nobiſcum committat; deinde quod ſolutionem ipſius [falſo quidem] contendit perplexiorem ſua; tertio, quod neſcio quid ſibi vindicat in Theoria Gravitatis *Newtoniana* promota; quibus ſuſpicor accedere alia graviora nobis adhuc ignota. Interim videtur FATIUS exaggeratis illis [quanquam pro magna parte non immeritis] laudibus adulari voluiſſe NEWTONO, ut hic illius jactationes, [an plagia?] facilius ferret.

Meas ad Dnum. VOLDERUM noviſſimas Tibi placuiſſe libenter intelligo. Hinc jam experimentum de ejus vel judicio, vel potius candore capiemus, de quibus non parvam hactenus opinionem habui.

Accepi tandem Tomum tertium *Operum* WALLISII, miſſu Auctoris; in eo recuduntur Muſici veteres ab ipſo jam editi, & Arenarius

narius Archimedis, cum Comm. Eutocii, & fragmentum Libri ſecundi *Collectionis* Pappi hactenus ineditum, ubi de calculo numerico Veterum. Adjectæ ſunt Epiſtolæ quædam Mathematicæ, ex quibus maximam partem conſtituunt meæ olim ad Oldenburgium ſcriptæ, & nuper [occaſione recenſionis harum] ad ipſum Wallisium. Quæſivit Cl. Wallisius, an aliquid vellem mutatum, ſed cum nec autographum invenirem apud me, nec inde ex *Anglia* ad me apographa accerſere tanti putarem, rem totam ipſius judicio commiſi, nec pœnitet: ſatis enim apparebit inde, quid mihi, quid aliis debeam. 1699 Octob.

Wallisius miſit mihi Epiſtolam Secretarii Societatis Regiæ, ex qua patet Fatium per ſubreptionem impetraſſe approbationem libelli, nec in me tam inficete dicta probari. Vale & Fave.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{20}{30}$ Octobris 1699.

Deditiſſimus

G. G. Leibnitius.

EPISTOLA C.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De libertate Dei. De aëris condenſatione, & elaſticitate. De Wallisio. *Litteræ* Volderianæ.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Quod de Rectoris nominis honore mihi gratulari dignatus fueris, ago gratias. Etiam Spinosa, dicis, vult Deum non coacte, ſed ſponte agere? Quid tum? Certe in hoc non peccavit; adeoque nec ego, qui idem dixi; At in eo, dicis, peccavit inter alia, quod Deo adimit electionem; quaſi nihil aliud poſſibile fuerit, quam 1699 Novemb.

1699 Nov. quod fecit. Concedam in eo peccaſſe. Ego vero, qui id non ſtatui, in eo etiam non peccavi. Dixi, & etiamnum dico, nihil aliud poſſibile eſſe [non fuiſſe] quam quod Deus fecit & faciet [non fecit tantum]: præterea Deo non ademi electionem jam factam, ſecundum quam omnia decrevit; ſed ipſi adimo electionem adhuc faciendam, tanquam abſurdum quid, & perfectioni ejus repugnans; nihil enim amplius eligere poteſt, quod non ab æterno jam fuerit electum. Mallem igitur, ut ulteriori diſceptatione abſtineamus, quam ut pergas parallelismum inſtituere me inter & exoſum SPINOSAM: Quod ſi enim Tuæ litteræ in aliorum inciderent manus perpende quæſo, qualem effectum facerent; apud illos præſertim, qui hæreticorum claſſi me voluerunt adſcribere.

Placet quod diſcriminis gratia, aëris condenſationem æſtimes ex pondere, quod eſt in volumine; compreſſionem vero ex vi elaſtica; quamvis condenſatio & compreſſio idem fere ſignificent; nempe condenſare & comprimere eſt in minus ſpatium compellere, ſive ſint elaſtica, ſive non ſint elaſtica: quemadmodum farina, aliaque id genus, etiam comprimuntur. Cum igitur, loco compreſſionis, ſignificantiorem vocem expetas, putem ego eo modo adhiberi poſſe vocem coactionis; coactio enim ſupponit reſiſtentiam; ſeu illa tantum coguntur, quæ reſiſtunt & renituntur, ut elaſtica faciunt. Veriſſimum eſt quod dicis, compreſſionem, ſeu coactionem, non pertinere ad particulas incomprimibiles per aërem diſſeminatas; ſed eas ſeorſum conſiderando; nam ſi junctum ſumamus, tota moles aërea conſiſtit ex particulis incomprimibilibus. Aërem enim concipio, vel ut cumulum lanæ, cujus filamenta utique conſtant ex particulis ſolidis; vel ut globulos, inſularum inſtar natantes in materia ſubtili, per interſtitia illorum intercurrente, & patentiorem viam affectante; in quo elaſticitatem proprie conſiſtere puto; vel etiam concipi poteſt aër ut compoſitum quod ex minutiſſimis Vorticulis, majus ſpatium circa centra ſua continuo affectantibus; eum in modum fere, quo CARTESIUS ſuos Vortices celeſtes imaginatus eſt; vel aliis multis modis aëris natura effingi poteſt. Quocunque modo vero concipiatur compoſitus, tamen ſemper erit ex particulis ſolidis, eo ſenſu, quo Tu illas incomprimibiles vocas; nam & ego ſentio

ſentio tecum nihil perfecte ſolidum, vel prorſus incomprimibile eſſe. 1699
Quando dixi metaphyſice elaſticum debere poſſe comprimi in nihilum; utique non negavi, ad id etiam opus eſſe vi infinita: ſed hoc ipſo oſtendere volui, nihil poſſe eſſe metaphyſice elaſticum, quia nulla materia, etiamſi vi infinita adhibita, ad nihilum, ſeu ad ſpatium infinite parvum, redigi poteſt. Nov.

De Newtono & Fatio hactenus nihil amplius inaudivi. Videre valde optarem Epiſtolam illam Secretarii Societatis Regiæ Anglicanæ, ex qua patere dicis Fatium per ſubreptionem impetraſſe approbationem libelli. Quid interim de tua Apologia factum eſt? Comparuit ne in *Actis Lipſ.* †

Wallisii Operum Tomum tertium nondum vidi. Rumor Auctorem jam ante annum mortuum dicebat; ſed video revixiſſe. Forte ægre feret, quod ipſum nominaverim * *ſtrenuum gloriæ Anglicanæ vindicem.* Audiveram, jam ante Tuas acceptas, a cognato quodam Cassini ex Anglia veniente & hac tranſeunte, ſe Wallisium adiiſſe, eumque adeo adhuc in vivis eſſe; tum autem ſchediaſma meum jam fuerat *Lipſiam* miſſum, & forte jam impreſſum, neque adeo in poteſtate mea verba illa delendi. Quamvis non ſint injuria, poſſunt tamen Wallisium, non nihil bilioſum, exacerbare. Modo me mitius tractet quam omnium poſtremo Prestetum; id quod a ſenectutis ejus phlegmate, ſi quod habet, ſpero.

Ex adjectis Volderi litteris videbis Tuas poſtremas ad ipſum datas ipſi etiam non parum placuiſſe; movet interim etiamnum ſuas inſtantias; inſiſtit præſertim demonſtrationi a Te dandæ pro activitate ſubſtantiæ, ex qua mirum quantum inde elici poſſe ſibi perſuadet: Nec immerito omnium difficultatum, quas objicit, momentoſiſſima mihi videtur, quam petit ex ipſo Tuo modo explicandi commercium animæ & corporis; quas duas ſubſtantias in ſe mutuo nihil poſſe ipſe ſtatuis; quamvis interim earum mutationes, ex ſuis utriuſque propriis principiis, ſimul fiant. Sic enim ſequi putat Volderus etiam Entelechias [genere ſcilicet ab animalibus non diſferen-

† 1700. Mai. pag. 198.

* In ſchediaſm. de Cycloidis Segmentis quadrabilibus. Vid. Acta Erud. 1699. Jul. pag. 318.

1.5.127

1699 Nov. ferentes] nihil in materias, neque materiam in Entelechias quicquam poſſe. Memini hanc eandem objectionem jam ſemel a Voldero Tibi factam fuiſſe; miror quod tum non reſponderis; mihi quidem nonnulla reſponſione digna videtur. Cæterum, ſi Tecum Volderus, ita & mecum, ſerram adhucdum reciprocat. Hactenus eum nondum convincere potui, ut agnoſceret æquipollentiam inter aſcenſus continuos & interruptos; plus enim virium requiri arbitratur ad hos quam ad illos; ſpes tamen ſupereſt ad convictionem. Jubet me [ſcilicet, ut putat in majori gratia apud Te exiſtentem] a Te petere demonſtrationem activitatis ſubſtantiarum ſibi denegatam; Addit, [credo per jocum] cum ego in concluſione Tecum faciam, Te certe habere locum, quo mecum, qui mentem jam purgatam habeam, hanc demonſtrationem communices; nequaquam enim ſe credere me hujus rei cognoſcendæ ſe minus avidum. Fateor quidem me hujus rei avidum eſſe; ſed nollem Te urgere, ſi viderem id Tibi incommodum fore.

Neſcio qui fiat, quod nihil litterarum longo tempore ex Gallia acceperim; Habes ne tuum Diploma Receptionis in Academiam? meum ſaltem mihi nondum eſt miſſum. Quid hæc cunctatio ſibi velit, hariolari non poſſum.

. . . . Vale

Groningæ 21. *9bris* 1699.

Amplitudini Tuæ

Devotiſſimus
Bernoulli.

FINIS TOMI PRIMI.

Z

005643044

Digitized by Google